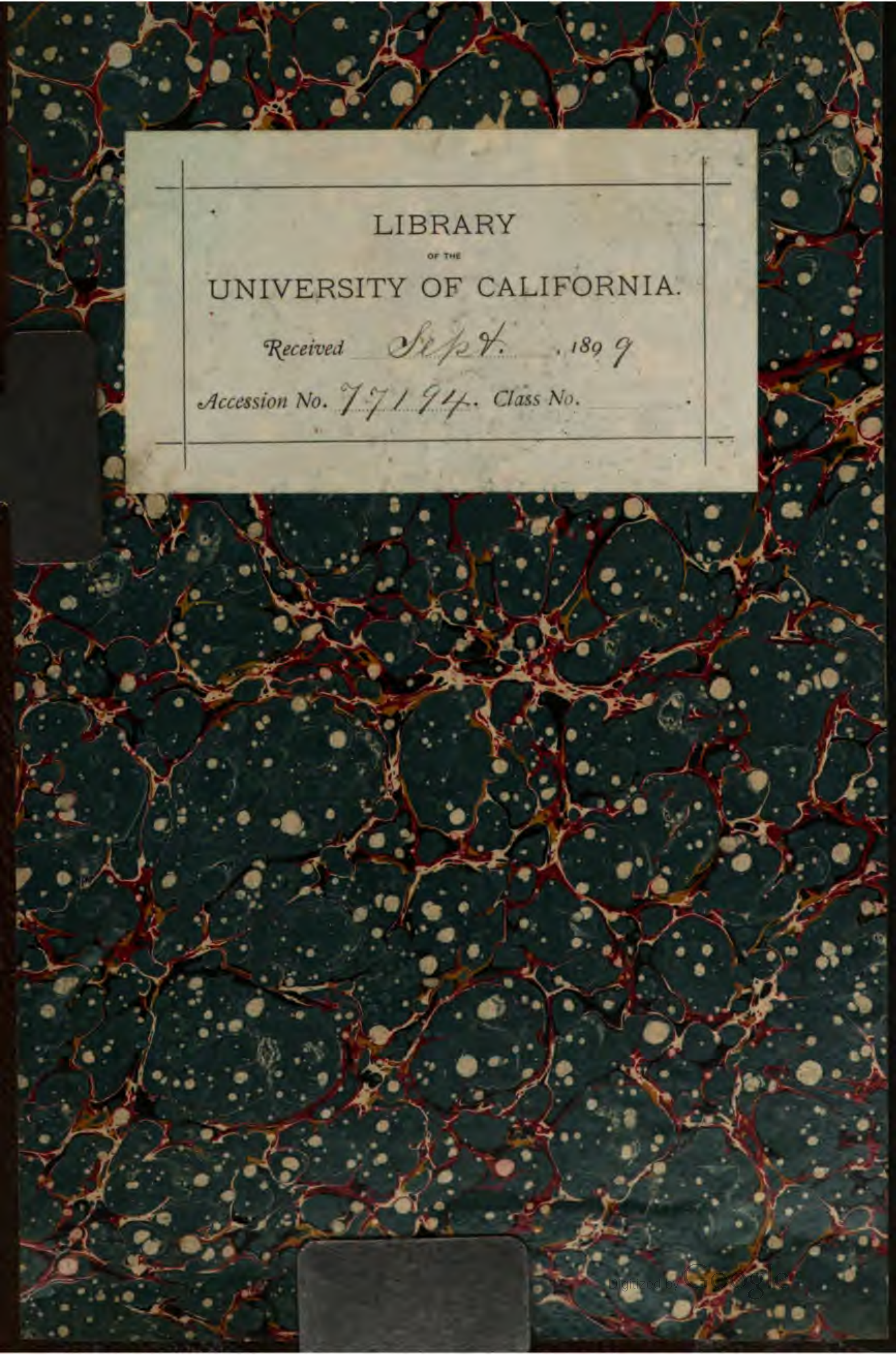




Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

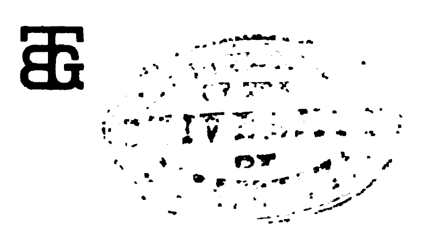
unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor.

40. Jahrgang.

Mit in den Text gedruckten Figuren und fünfzehn lithographirten Tafeln.



Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1895.

77194

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.



I.

Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve.

Von

Prof. R. Sturm

in Breslau.

1. Die Gradzahlen der mit der cubischen Raumcurve verbundenen Oerter der Normalebenen, rectificirenden Ebenen, Hauptnormalen, Binormalen u. s. w. findet man leicht mit Hilfe folgender allgemeiner Sätze:

1. Die Geraden, welche entsprechende Punkte zweier eindeutig auf einander bezogener Curven n^{ter} und n_1^{ter} Ordnung verbinden, erzeugen eine Regelfäche $(n+n_1)^{ten}$ Grades.

Denn in einem Ebenenbüschel entsteht durch die Ebenen, welche entsprechende Punkte enthalten, eine Correspondenz $[n_1, n]$, deren Coincidenzen die Geraden der Regelfläche enthalten, welche die Achse des Büschels schneiden.

Der Grad der Regelfläche vermindert sich um α, wenn α-mal entsprechende Punkte zusammenfallen.

2. Bei zwei Curven n^{ter} Ordnung, bezw. n_1^{ter} Klasse, welche sich in derselben Ebene befinden und in eindeutiger Beziehung der Punkte und Tangenten stehen, fällt $(n+n_1)$-mal ein Punkt der ersten auf die entsprechende Tangente der zweiten.

Die Correspondenz nämlich in einem beliebigen Strahlenbüschel der Ebene, in der zwei Strahlen einander entsprechen, von denen der eine nach einem Punkte der ersten Curve, der andere nach dem Schnitte der Tangente desselben mit der entsprechenden Tangente der zweiten Curve geht, ist, wenn n' die Klasse der ersten ist, $[n'+n_1, n]$. Zu den Coincidenzen gehören die im Büschel befindlichen Tangenten der ersten Curve, die übrigen führen zu Incidenzen entsprechender Punkte und Tangenten.

Ueberträgt man diesen Satz auf die Kegel, welche aus einem beliebigen Punkte die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung und die Geraden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades projiciren, so hat man:

3. Wenn die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf die Erzeugenden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades — im besonderen Falle auf die Tangenten einer Curve n_1^{ten} Ranges (n_1^{ter} Klasse, wenn sie eben ist) — bezogen sind, so umhüllen die Verbindungsebenen

entsprechender Punkte und Tangenten einen Torsus $(n+n_1)^{ter}$ Klasse.

Ebenso ist dual, wenn die Schmiegungsebenen einer Curve n^{ter} Klasse eindeutig auf die Erzeugenden einer Regelfläche n_1^{ten} Grades bezogen sind, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Curve $(n+n_1)^{ter}$ Ordnung.

Daraus ergiebt sich:

4. Wenn die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung auf die Schmiegungsebenen einer Curve n_1^{ter} Klasse eindeutig bezogen sind, so incidiren $(n+n_1)$-mal entsprechende Elemente.

Zum Beweise benutzt man das Erzeugniss der Schnittpunkte der Tangenten der ersten und der entsprechenden Schmiegungsebenen der zweiten Curve und eine Correspondenz in einem Ebenenbüschel.

2. Die Tangentenfläche der cubischen Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ schneidet in die unendlich ferne Ebene $\mathfrak{E}$ eine Curve $\mathfrak{C}^4{}_3$ vierter Ordnung dritter Klasse ein. Ihre acht Schnitte mit der absoluten Curve $\mathfrak{K}^2$ (dem unendlich fernen imaginären Kugelkreise) lehren, dass es acht Punkte auf $\mathfrak{R}^3$ giebt, deren Tangenten die $\mathfrak{K}^2$ treffen und bei denen sich Normalebene und rectificirende Ebenen — in eine die $\mathfrak{K}^2$ berührende Ebene — vereinigen.

Unter den Schmiegungsebenen der $\mathfrak{R}^3$ zeichnen sich die sechs aus, welche $\mathfrak{K}^2$ berühren; ihre 15 Schnittstrahlen sind die Focalstrahlen, die zehn Diagonalen (Verbindungslinien von Gegenecken) des durch die gebildeten Sechsflachs die Achsen der cubischen Raumcurve.*

Jede von diesen sechs Schmiegungsebenen vereinigt sich mit der zugehörigen rectificirenden Ebene, und ihr Krümmungs-Mittelpunkt, das heisst ihr Schnitt mit den beiden Normalebenen auf den in ihr gelegenen Tangenten, ist ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^2$.

3. Ist $\mathfrak{C}^3{}_4$ die Polarcurve von $\mathfrak{C}^4{}_3$ in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$, so erhalten wir, die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{R}^3$ und $\mathfrak{C}^3{}_4$ verbindend:

Die Binormalen der cubischen Raumcurve erzeugen eine Regelfläche sechsten Grades, von welcher drei Erzeugende in $\mathfrak{E}$ fallen, die Binormalen der unendlich fernen Punkte A, B, C von $\mathfrak{R}^3$.

Verbinden wir die Punkte von $\mathfrak{R}^3$ mit den Tangenten von $\mathfrak{C}^3{}_4$, so ergiebt sich:

Die Normalebenen der cubischen Raumcurve umhüllen einen Torsus siebenter Klasse, welcher $\mathfrak{E}$ zur dreifachen Berührungsebene hat; denn sie ist Normalebene für A, B, C.

Verbindet man aber die Tangenten von $\mathfrak{R}^3$ mit den entsprechenden Punkten von $\mathfrak{C}^3{}_4$, so hat man:

---

* H. Krüger, „Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurve", Dissertation. Breslau 1885. — Bekanntlich werden auch die Schnittlinien der Schmiegungsebenen Achsen genannt.

Die rectificirenden Ebenen von $\mathfrak{R}^3$ umhüllen einen Torsus ebenfalls siebenter Klasse, zu dem aber $\mathfrak{E}$ nicht gehört.*

Der Schnitt dieser rectificirenden Fläche mit $\mathfrak{E}$ ist eine Curve siebenter Klasse $\mathfrak{C}_7$; polarisiren wir sie in Bezug auf $\mathfrak{K}^2$ in die Curve siebenter Ordnung $\mathfrak{C}^7$ und verbinden wiederum die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{R}^3$ und $\mathfrak{C}^7$, so erhalten wir:

Die Hauptnormalen der cubischen Raumcurve erzeugen eine Regelfläche zehnten Grades.

Sie ist auch das Erzeugniss der Schnittlinien entsprechender Ebenen des Torsus dritter Klasse der Schmiegungsebenen und des Torsus siebenter Klasse der Normalebenen von $\mathfrak{R}^3$.

Ebenso sind die Binormalen Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Torsen siebenter Klasse der Normalebenen und der rectificirenden Ebenen; aber achtmal vereinigen sich entsprechende Ebenen, daher sinkt der Grad der Regelfläche der Binormalen von 14 auf 6 herab.

Die Fläche der Hauptnormalen hat drei in $\mathfrak{E}$ gelegene Erzeugenden, die Hauptnormalen von A, B, C.

4. Der Torsus der Normalebenen kann keine stationäre Ebene haben und ein ebener Schnitt von ihm keine Wendetangente. Dieser Schnitt ist vom Geschlechte 0 und hat eine dreifache Tangente im Unendlichen; daraus ergiebt sich, mit Hilfe der Plücker'schen Formeln, dass er zwölf weitere Doppeltangenten hat und seine Ordnung 12 ist.

Die Krümmungsachsen der cubischen Raumcurve erzeugen eine abwickelbare Fläche zwölfter Ordnung siebenter Klasse.

Schneiden wir entsprechende Schmiegungsebenen und Krümmungsachsen, so ergiebt sich:

Die Krümmungs-Mittelpunkte der cubischen Raumcurve erzeugen eine Curve 15. Ordnung.

Die Krümmungsachsen verbinden die Punkte dieser Curve mit den entsprechenden von $\mathfrak{C}^3_4$. Die Reduction der Ordnung ihrer Fläche von $15+3$ auf 12 beruht darauf, dass sechsmal — bei den $\mathfrak{K}^2$ berührenden Schmiegungsebenen — entsprechende Punkte zusammenfallen.

Andererseits verbinden die Hauptnormalen entsprechende Punkte der $\mathfrak{R}^3$ und dieser Curve 15. Ordnung; die Reduction um 8 geschieht wegen der Punkte von $\mathfrak{R}^3$, bei denen die Normalebene mit der rectificirenden Ebene und infolge dessen der Krümmungs-Mittelpunkt mit dem Punkte von $\mathfrak{R}^3$ sich vereinigt, zu dem er gehört.

5. Wenn A', A'' die beiderseitigen Nachbarpunkte des unendlich fernen Punktes A der $\mathfrak{R}^3$ sind, so ist $\mathfrak{E}$ die zu A gehörige Normalebene, die von

* Dieser Satz und der über die Binormalen findet sich schon bei Krüger.

A', A'' schneiden beide die $\mathfrak{E}$ in der Wendetangente $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}^3_4$, welche dem gemeinsamen Punkte A der Tangenten AA', $A''A$ von $\mathfrak{R}^3$ — der ein Rückkehrpunkt von $\mathfrak{E}^3_4$ ist — entspricht. Daher wird sie Rückkehr-Erzeugende der abwickelbaren Fläche der Normalebenen und dreipunktig berührende Tangente der Rückkehrcurve dieser Fläche. Die drei Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, den unendlich fernen Punkten A, B, C von $\mathfrak{R}^3$ zugehörig, je dreifach gerechnet — weil $\mathfrak{E}$ die zugehörige Berührungsebene ist — vervollständigen $\mathfrak{E}^3_4$ zum Schnitte zwölfter Ordnung.

Ein ebener Schnitt des Normalebenen-Torsus ist siebenter Klasse zwölfter Ordnung, hat eine dreifache und zwölf doppelte Tangenten, also 15 Rückkehrpunkte, von denen drei von den eben erwähnten Rückkehr-Erzeugenden herrühren. Die zwölf übrigen lehren:

Die Rückkehrcurve des Normalebenen-Torsus oder die Curve der Mittelpunkte der vierpunktig berührenden Kugeln (Schmiegungskugeln) ist zwölfter Ordnung (zwölften Ranges siebenter Klasse).

Wirkliche Doppelpunkte kann sie nicht besitzen; daher haben wir, wenn h die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte und s die der Rückkehrpunkte dieser Curve ist, $2h + 3s = 12.11 - 12 = 120$, und wegen des Geschlechts 0: $h + s = 55$, also: $h = 45$, $s = 10$. Die letztere Zahl liefert den Satz:

Die cubische Raumcurve besitzt zehn Kugeln, welche sie fünfpunktig berühren.

6. Auch zwei auf einander folgende rectificirende Ebenen können nicht zusammenfallen. Daraus schliessen wir:

Die rectificirende Fläche der cubischen Raumcurve ist zwölfter Ordnung.

In jeder Ebene giebt es 15 Gerade, durch welche zwei rectificirende Ebenen gehen.

Die Rückkehrcurve dieser Fläche ist 15. Ordnung und hat 16 Rückkehrpunkte.

Es giebt also 16 Punkte, durch welche vier auf einander folgende rectificirende Ebenen von $\mathfrak{R}^3$ gehen.

Weil die rectificirende Ebene Grenzlage der Halbirungsebene des einen Flächenwinkels zweier benachbarter Schmiegungsebenen ist, so ist jeder Punkt in ihr Mittelpunkt einer Kugel, welche beide Schmiegungsebenen berührt.

Folglich sind die 16 Punkte Mittelpunkte von Kugeln, welche je fünf auf einander folgende Schmiegungsebenen tangiren.

Die Krümmungsachsen verbinden entsprechende Punkte der Curve 15. Ordnung der Krümmungs-Mittelpunkte und der Curve zwölfter Ordnung der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln und erzeugen eine Fläche zwölfter Ordnung, also:

Der Krümmungs-Mittelpunkt fällt 15-mal mit dem zugehörigen Schmiegungskugel-Mittelpunkte zusammen.

Von den unendlich fernen Punkten der Curve der Krümmungs-Mittelpunkte fallen sechs in die Punkte, in denen $\mathfrak{K}^2$ von Schmiegungsebenen der $\mathfrak{R}^3$ berührt wird; die neun übrigen fallen zu je dreien in die Schnitte der Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, der Krümmungsachsen von A, B, C, mit den Schmiegungsebenen α, β, γ dieser Punkte; denn für jeden dieser drei Punkte der $\mathfrak{R}^3$ und seine beiden Nachbarpunkte ist der Krümmungs-Mittelpunkt unendlich fern.

Die zwölf Schnitte aber der Curve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln mit $\mathfrak{E}$ fallen zu je vier in die diesen Wendetangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{E}^3_4$ zugehörigen Wendepunkte, denn durch jeden der Punkte A, B, C gehen vier unendlich nahe Schmiegungskugeln, sämmtlich mit unendlich fernem Mittelpunkte, in ihrem Berührungspunkte aber mit $\mathfrak{E}^3_4$ wird die Wendetangente, als Krümmungsachse der $\mathfrak{R}^3$, von der nächstfolgenden Normalebene geschnitten.

Der Krümmungskreis eines der Punkte A, B, C besteht aus dessen Tangente und der unendlich fernen Geraden der Schmiegungsebene, die Schmiegungskugel aus dieser Schmiegungsebene und der unendlich fernen Ebene.

7. Die Kreise auf den Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bilden eine Congruenz von Kreisen, von der durch jeden Punkt sechs gehen.

Die Ebenen dieser ∞^2 Kreise berühren alle die Cayley'sche Curve dritter Klasse des Netzes von Kegelschnitten in $\mathfrak{E}$, das durch den $\mathfrak{K}^2$ und den vom Flächenbüschel eingeschnittenen Kegelschnittbüschel constituirt wird. Folglich umhüllen die Ebenen derjenigen von diesen Kreisen, die durch einen Punkt O der Grundcurve $\mathfrak{R}^4$ des Büschels gehen, einen Kegel dritter Klasse. Und auf dem Erzeugnisse dieser Kreise ist $\mathfrak{R}^4$ dreifach.

Lassen wir auf einer Geraden l einem Punkte X die sechs Punkte X' entsprechen, in denen l von den Ebenen der sechs durch O gehenden Kreise auf der Fläche des Büschels durch X geschnitten wird, so gehen umgekehrt durch jeden X' die Ebenen von drei durch O gehenden Kreisen auf Flächen des Büschels und es entsprechen dem X' die sechs Punkte X, in welchen diese Flächen die l schneiden. Aus den zwölf Coincidenzen dieser Correspondenz [6,6] folgt:

Die Kreise auf den Flächen eines F^2-Büschels, welche durch einen Punkt O der Grundcurve $\mathfrak{R}^4$ gehen, erzeugen eine Fläche zwölfter Ordnung.

Der Schnitt dieser Fläche mit jeder Fläche des Büschels besteht aus der dreifachen Grundcurve und den sechs auf der letzteren Fläche gelegenen Kreisen durch O, der unendlich ferne Schnitt aber aus $\mathfrak{K}^2$, dreifach gerechnet, und den sechs Geraden der drei Paraboloide des Büschels; denn jede von ihnen

setzt mit der durch O gehenden Geraden der anderen Schaar einen Kreis zusammen.

Der Punkt O ist auf ihr neunfach, denn die drei weiteren Schnitte einer durch ihn gehenden Geraden rühren von den Kreisen her, die sich in den drei Berührungsebenen befinden, welche von der Geraden an den Kegel dritter Klasse gehen.

Wenn O einer von den unendlich fernen Punkten von $\mathfrak{R}^4$ ist, so zerfällt die Fläche in diejenigen drei Regelschaaren der Paraboloide, zu denen die drei durch O gehenden von den sechs Geraden nicht gehören, und in die Ebene $\mathfrak{E}$, sechsfach gerechnet, da auf jeder F^2 der unendlich ferne Schnitt zu allen sechs Kreisschaaren gehört.

8. Lassen wir $\mathfrak{R}^4$ in eine cubische Raumcurve und eine Sehne derselben zerfallen, so haben wir:

Eine cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ führt zu einem Complexe von Kreisen, denjenigen nämlich, welche durch die drei Schnitte der verschiedenen Ebenen gehen. Jeder von ihnen ist mit $\mathfrak{R}^3$ durch eine Fläche zweiten Grades verbunden.

Alle Flächen zweiten Grades, welche durch $\mathfrak{R}^3$ und die Tangente dieser Curve im Punkte P gehen, berühren in P die Schmiegungsebene π, so dass jeder Strahl des Büschels (P, π) auf einer dieser Flächen liegt. So zeigt sich, wie die in Geradenpaare zerfallenden Krümmungskreise der Punkte A, B, C mit $\mathfrak{R}^3$ durch Flächen zweiten Grades verbunden sind.

Die durch einen Punkt O gehenden Kreise unseres Complexes erzeugen eine Fläche zwölfter Ordnung.

Auf derselben sind $\mathfrak{R}^3$, $\mathfrak{K}^2$ und die Sehne o von $\mathfrak{R}^3$ durch O dreifach, die unendlich fernen Sehnen der $\mathfrak{R}^3$ und die drei weiteren Geraden der durch $\mathfrak{R}^3$ und O gehenden Paraboloide, welche mit $\mathfrak{E}$ oder O incidiren, einfach, der Punkt O endlich neunfach.

Die Ebenen dieser Kreise umhüllen einen Kegel dritter Klasse.

Weil die Curve dritter Klasse in $\mathfrak{E}$, nach welcher dieser Kegel geht, von neun Schmiegungsebenen der $\mathfrak{R}^3$ tangirt wird, so gehen von den Flächen zweiten Grades, die durch $\mathfrak{R}^3$ und die verschiedenen Krümmungskreise gelegt sind, neun durch jeden Punkt.

Diese Flächen rufen zwischen den Punktreihen auf $\mathfrak{R}^3$ und auf einer beliebigen Geraden eine Correspondenz [9,2] hervor. Sie hat auf $\mathfrak{R}^3$ $2.9(2-1)=18$ und auf der Geraden $2.2(9-1)=32$ Verzweigungspunkte.*

Von den genannten Flächen berühren 18 eine Gerade und ihre Enveloppe ist 32. Ordnung.

* In Bezug auf höhere Correspondenzen vergleiche mein Buch: „Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie Theil I" (Leipzig 1892) S. 16 flg.

9. *Ein allgemeines F^2-Netz führt ebenfalls zu einem Complexe von Kreisen;* jede Ebene schneidet eine Fläche des Netzes in einem Kreise.

Die Kreise dieses Complexes in den Ebenen eines Büschels erzeugen eine Fläche fünfter Ordnung, auf der die Achse dreifach ist.

Auf jeder Geraden $\mathfrak{l}$ entsteht nämlich durch die Schnitte mit einer Ebene des Büschels und mit der Fläche des Netzes, welche die Ebene in einem Kreise schneidet, eine Correspondenz [3,2]; denn durch einen Punkt von $\mathfrak{l}$ wird aus dem Netze ein Büschel ausgeschieden, dessen in $\mathfrak{E}$ gelegene Umhüllungscurve der Kreisschnitt-Ebenen von drei Ebenen des Büschels berührt wird. Die fünf Coincidenzen führen zur Behauptung.

Die Ebenen derjenigen Kreise unseres Complexes, welche eine gegebene Gerade $\mathfrak{l}$ treffen, umhüllen eine Fläche fünfter Klasse, für welche alle Ebenen durch $\mathfrak{l}$ doppelt sind.

Wenn $\mathfrak{l}$ durch einen Grundpunkt des Netzes geht, oder in dem uns besonders interessirenden Falle, wo alle Flächen des Netzes durch eine $\mathfrak{R}^3$ gehen, wenn $\mathfrak{l}$ diese Curve trifft, sondert sich von der Fläche ein Bündel ab. Geschieht es zweimal, so bleibt nur eine Fläche dritter Klasse, offenbar die unendlich ferne Curve dritter Klasse, die zu dem Büschel aus dem Netze gehört, auf dessen Flächen sich die fraglichen Kreise befinden.

Ein Punkt O scheidet aus dem Netze einen Büschel aus. Die Ebenen der zwölf Kreise, welche durch O gehen und $\mathfrak{l}$ treffen, berühren sowohl den Kegel dritter Klasse, der zu dem Büschel und dem auf seiner Grundcurve gelegenen Punkte O gehört, als auch die Fläche fünfter Klasse, welche zum Netze und zur Geraden $\mathfrak{l}$ gehört. Es bleiben also noch drei weitere gemeinsame Ebenen.

10. *Verbundene Kreisschnitt- oder cyklische Ebenen einer Fläche zweiten Grades F^2* seien solche, die zur nämlichen Achse der Fläche parallel sind. Ihre unendlich fernen Geraden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ bilden ein Geradenpaar des Büschels ($F^2\mathfrak{E}$, $\mathfrak{K}^2$); die bei den Flächen unseres Netzes sich ergebenden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ bilden daher die Geradenpaare des Gebüsches von Kegelschnitten, das durch $\mathfrak{K}^2$ und das aus dem Flächennetze ausgeschnittene Kegelschnittnetz constituirt wird. Folglich sind je zwei zusammengehörige $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar conjugirt, welche sich auf dies Gebüsche stützt. Grundtangenten dieser Schaar sind die Berührungssehnen, mit $\mathfrak{K}^2$, der vier zum Netze gehörigen Rotationsflächen.

Die unendlich fernen Geraden $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ verbundener cyklischer Ebenen der Flächen eines F^2-Netzes entsprechen sich in einer involutorischen quadratischen Verwandtschaft. Ihr Hauptdreiseit ist das Polardreiseit der Kegelschnittschaar.

Jeder Seite $\mathfrak{s}$ dieses Dreiseits als $\mathfrak{f}$ entsprechen als $\mathfrak{f}'$ alle Strahlen durch die Gegenecke $\mathfrak{S}$. Daraus folgt, dass in jeder Ebene durch $\mathfrak{s}$ nicht blos

ein Kreis liegt, sondern ∞^1, auf verschiedenen Flächen des Netzes befindlich, deren verbundene cyklische Ebenen durch die verschiedenen Strahlen des Büschels (𝔖, 𝔈) gehen.

Die Flächen bilden auch einen Büschel, dessen Grundcurve durch die beiden Punkte $\mathfrak{K}^2 \mathfrak{l}$ geht; die Strahlenbüschel um diese Punkte und der um 𝔖 setzen die zu diesem Flächenbüschel gehörige Curve dritter Klasse zusammen.

Bei einem F^2-Netze giebt es drei ausgezeichnete Stellungen von Ebenen, welche nicht blos eine Fläche, sondern sämmtliche Flächen eines Büschels des Netzes in Kreisen schneiden.

Alle diese Ebenen tangiren die zu einer Geraden 𝔩 gehörigen Fläche fünfter Klasse, und die drei durch O gehenden sind die am Schlusse von Nr. 9 erwähnten; zu jener Fläche aber und zum Kegel dritter Klasse gehören sie wegen verschiedener Kreise.

11. Wenn nun alle Flächen des Netzes eine cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ gemeinsam haben, so gehen die ausgezeichneten Ebenen nach den unendlich fernen Sehnen derselben. Jede von ihnen ist cyklische Ebene für einen Büschel von Paraboloiden im Netze; die ausgeschnittenen Kreise aber bestehen aus der Sehne und einer Geraden der anderen Schaar.

Die Kreise aus dem zu $\mathfrak{R}^3$ gehörigen Complexe, welche eine Gerade 𝔩 treffen, befinden sich in den Tangentialebenen einer Fläche fünfter Klasse. Diese Fläche ist nur vierter Klasse, wenn 𝔩 sich auf $\mathfrak{R}^3$ stützt.

Die Krümmungskreise einer cubischen Raumcure $\mathfrak{R}^3$ erzeugen eine Fläche 15. Ordnung, auf welcher $\mathfrak{R}^3$ sowie $\mathfrak{K}^2$ dreifach sind.

Ihr unendlich ferner Schnitt besteht aus $\mathfrak{K}^2$ und den unendlich fernen Geraden der Schmiegungsebenen von A, B, C und je den beiden Nachbarpunkten auf $\mathfrak{R}^3$.

12. Die Kugeln, welche durch einen Kreis K des Complexes gelegt sind, treffen $\mathfrak{R}^3$ noch in den Tripeln einer cubischen Involution, deren Ebenen also einen Büschel bilden. Unter diesen Ebenen befindet sich 𝔈, wegen des Ebenenpaars im Kugelbüschel. Also sind die Ebenen der Tripel der Involution parallel. Diese Involution ändert sich nicht, wenn die Ebene von K durch parallele Ebenen ersetzt wird. Die einen und die anderen parallelen Ebenen sind verbundene cyklische Ebenen einer und derselben F^2 durch $\mathfrak{R}^3$.

Wenn K ein Krümmungskreis der $\mathfrak{R}^3$ ist, der zum Punkte P gehört, so haben wir in der zugeordneten Involution das Tripel $PQ'Q''$, wo Q', Q'' die beiden weiteren Schnitte von $\mathfrak{R}^3$ mit der Schmiegungskugel von P sind. Die unendlich fernen Geraden der Ebenen $PQ'Q''$ umhüllen die Curve sechster Klasse, welche in der obigen Verwandtschaft der 𝔨 und 𝔨′ der

Curve $\mathfrak{C}^4_3$, in der $\mathfrak{E}$ den Torsus der Schmiegungsebenen schneidet, entspricht.

Für jeden der drei Punkte A, B, C als P sind die beiden anderen Q', Q''. Also hat der von den Ebenen $PQ'Q''$ erzeugte Torsus die $\mathfrak{E}$ zur dreifachen Ebene und ist neunter Klasse.

Mithin ist jeder Punkt von $\mathfrak{R}^3$ einmal P und achtmal Q' oder Q''.

Durch jeden Punkt der cubischen Raumcurve gehen acht Kugeln, welche sie an anderer Stelle vierpunktig berühren.

Und wir haben auf $\mathfrak{R}^3$ eine Correspondenz [8,2], in der sich der Berührungspunkt einer Schmiegungskugel und einer der beiden weiteren Schnitte entsprechen.

Die zehn Coincidenzen dieser Correspondenz sind die Berührungspunkte der fünfpunktig berührenden Kugeln.

Zwischen den Punkten Q', Q'' besteht eine involutorische Correspondenz [8]. Mit der durch einen Ebenenbüschel eingeschnittenen cubischen Involution — einer involutorischen Correspondenz [2] — hat sie 2.8 Paare entsprechender Punkte gemeinsam.

Die Schnittsehnen $Q'Q''$ der Schmiegungskugeln der $\mathfrak{R}^3$ erzeugen eine Regelfläche 16. Grades, auf welcher die Curve achtfach ist.

Der Torsus der Ebenen $PQ'Q''$ ist, wie wir fanden, neunter Klasse; diese Ebenen verbinden die Punkte P von $\mathfrak{R}^3$ mit den entsprechenden Erzeugenden $Q'Q''$ der Regelfläche. Die Erniedrigung um 10 erfolgt durch die Sehnen $Q'Q''$, welche durch die zugehörigen P gehen, das sind die Sehnen, welche die Berührungspunkte der fünfpunktig tangirenden Kugeln je mit dem sechsten Schnitte verbinden.

13. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{R}^3$ gehen vier auf einander folgende Schmiegungskugeln und acht, welche anderwärts berühren.

Folglich gehen durch jeden Punkt zwölf Schmiegungskugeln.

Deshalb entsteht zwischen der Punktreihe auf $\mathfrak{R}^3$ und auf einer Geraden $\mathfrak{l}$ eine Correspondenz [12,2], in der sich ein Punkt von $\mathfrak{R}^3$ und die beiden Schnitte seiner Schmiegungskugel mit $\mathfrak{l}$ entsprechen. Sie hat auf $\mathfrak{l}$ $2.2(12-1) = 44$ Verzweigungspunkte. Zu ihnen gehört der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{l}$ und zwar $3(4-1)$-fach, indem durch ihn dreimal vier benachbarte Schmiegungskugeln gehen, ferner die 20 Schnitte der $\mathfrak{l}$ mit fünfpunktig beruhenden Kugeln; die 15 übrigen sind die Schnitte der Geraden $\mathfrak{l}$ mit der Enveloppe der Schmiegungskugeln, oder, was dasselbe ist, mit der Fläche der Krümmungskreise, deren Ordnung 15 so von neuem gefunden ist.

Die $2.12(2-1) = 24$ Verzweigungspunkte auf $\mathfrak{R}^3$ aber lehren, dass jede Gerade von 24 Schmiegungskugeln berührt wird.

14. Auf der cubischen Raumcurve wird durch alle Kugeln des Raumes eine Involution sechsten Grades vierter Stufe eingeschnitten, die Kugeln eines Gebüsches, eines Netzes, eines Büschels schneiden Involutionen sechsten Grades dritter, zweiter, erster Stufe ein.

Für solche höhere Involutionen gilt folgender Satz:

In einer Involution J^k_n n^{ten} Grades k^{ter} Stufe ($k < n$) auf einem rationalen Träger giebt es $(k+1)(n-k)$ Gruppen mit einem $(k+1)$-fachen Elemente und $(t+1)(k-t+1)(n-k)(n-k-1)$ Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen und einem $(k-t+1)$-fachen Elemente, wofern $t < k$ und $\gtrless \frac{k}{2}$.

Ist k gerade, so giebt es $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)^2(n-k)(n-k-1)$ Gruppen mit zwei $\left(\frac{k}{2}+1\right)$-fachen Elementen.*

Es ist wegen der zahlreichen Anwendungen vielleicht besser, wenn ich für diesen weniger bekannten Satz einen Beweis mittheile.

Der erste Theil unseres Satzes über die Anzahl der Gruppen mit einem $(k+1)$-fachen Elemente ist richtig für $k=1$, denn eine Involution J^1_n hat bekanntlich $2(n-1)$ Gruppen mit einem Doppelelemente.

Nehmen wir an, er sei richtig für $k-1$, so wollen wir zeigen, dass er dann auch richtig ist für k. Aus J^k_n scheidet ein Element X eine Involution J^{k-1}_{n-1} aus; das heisst, die $n-1$ übrigen Elemente aller Gruppen von J^k_n, welche das Element X enthalten, bilden die Gruppen einer J^{k-1}_{n-1}. Diese hat nach der Annahme $k\{n-1-(k-1)\}=k(n-k)$ Gruppen mit einem k-fachen Elemente; so werden jedem X $k(n-k)$ Elemente X_1 zugeordnet. Umgekehrt, wie allgemein eine Gruppe von J^k_n durch k Elemente bestimmt ist, so auch durch ein Element X_1, das ein k-faches einer Gruppe sein soll; die $n-k$ übrigen Elemente dieser Gruppe sind die entsprechenden X. Somit haben wir eine Correspondenz $[n-k,\ k(n-k)]$ zwischen X und X_1; sie hat, weil der Träger rational ist, $(k+1)(n-k)$ Coincidenzen; das sind $(k+1)$-fache Elemente von Gruppen von J^k_n.

$k-t$ Elemente scheiden aus J^k_n eine Involution J^t_{n-k+t} aus, das heisst, die $n-k+t$ übrigen Elemente aller Gruppen von J^k_n, welche jene Elemente gemeinsam haben, bilden die Gruppen einer J^t_{n-k+t}. Insbesondere scheidet also auch ein Element X als $(k-t)$-faches Element einer Gruppe eine solche Involution aus. Diese besitzt dann nach dem eben erhaltenen Resultate $(t+1)(n-k+t-t)=(t+1)(n-k)$ Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen Elemente; jede von ihnen hat $n-k-1$ weitere Elemente; diese $(t+1)(n-k)(n-k-1)$ Elemente ordnen wir als X_1 dem

* Vergl. Guccia: „Rendiconti del Circolo matematico di Palermo“ Bd. 7 S. 55 – 57, wo die Literatur ausführlich besprochen ist.

X zu. Umgekehrt, ein Element X_1 scheidet als J_n^k eine J_{n-1}^{k-1} aus, welche eine Anzahl von Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen und einem $(k-t)$-fachen Elemente hat; die Zahl derselben sei $Z_{n-1}^{k-1, t}$, die gesuchte Zahl für $n-1$ und $k-1$ statt für n und k; die $(k-t)$-fachen Elemente derselben sind die dem X_1 entsprechenden X, und so haben wir zwischen den X und X_1 eine Correspondenz $[Z_{n-1}^{k-1, t}, (t+1)(n-k)(n-k-1)]$. Die Anzahl der Coincidenzen dieser Correspondenz ist die Anzahl $Z_n^{k, t}$ der Gruppen von J_n^k, welche ein $(t+1)$-faches und ein $(k-t+1)$-faches Element haben; also:

$$Z_n^{k, t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-1}^{k-1, t},$$

$$Z_{n-1}^{k-1, t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-2}^{k-2, t},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$Z_{n-k+t+1}^{t+1, t} = (t+1)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-k+t}^{t, t};$$

demnach durch Addition:

$$Z_n^{k, t} = (t+1)(k-t)(n-k)(n-k-1) + Z_{n-k+t}^{t, t}.$$

Diese Zahl $Z_{n-k+t}^{t, t}$ ist die Zahl der Gruppen einer J_{n-k+t}^t, welche ein $(t+1)$-faches und ein $(t-t+1)$-faches, also ein einfaches Element haben. Wir haben in ihr eine endliche Zahl von Gruppen mit einem $(t+1)$-fachen Elemente, nämlich nach dem ersten Theile des Satzes $(t+1)(n-k)$, und da jede dieser Gruppen $n-k-1$ weitere Elemente hat, so genügt sie der obigen Anforderung $(n-k-1)$-fach, und

$$Z_{n-k+t}^{t, t} = (t+1)(n-k)(n-k-1).$$

Also:

$$Z_n^{k, t} = (t+1)(k-t+1)(n-k)(n-k-1).$$

Damit ist der zweite Theil unseres Satzes für den allgemeinen Fall bewiesen, dass die beiden Vielfachheitszahlen $t+1$ und $k-t+1$ nicht gleich sind. Ist aber $t = k-t$, so sind die beiden vielfachen Elemente gleichartig und jedes von ihnen kann das $(t+1)$-fache sein; das andere ist die Coincidenz. Daher ist die erhaltene Anzahl zu halbiren.

15. Durch Anwendung auf die obigen Involutionen der $\mathfrak{R}^3$ erhalten wir:

Es giebt zehn Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ fünfpunktig berühren; wie wir schon wissen.

Unter den Kugeln eines Gebüsches befinden sich zwölf Schmiegungskugeln.

Insbesondere:

Durch jeden Punkt gehen zwölf Schmiegungskugeln, wie wir auch schon auf andere Weise gefunden haben.

Liegt der Punkt im Unendlichen, so sind dies die Schmiegungskugeln der drei Punkte A, B, C und je der drei Nachbarpunkte auf $\mathfrak{R}^3$, zu denen allen die unendlich ferne Ebene gehört.

In einem Kugelnetze befinden sich oder durch zwei Punkte gehen zwölf Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ osculiren.

Oder, die Kugelbüschel durch die Krümmungskreise von $\mathfrak{R}^3$ bilden ein doppelt unendliches System von Kugeln, von denen zwölf durch zwei gegebene Punkte gehen.

Durch zwei Punkte der $\mathfrak{R}^3$ gehen $12-2.3=6$ Kugeln, welche sie anderwärts osculiren; insbesondere wird $\mathfrak{R}^3$ in jedem Punkte von sechs anderswo osculirenden Kugeln berührt.

Durch drei Punkte oder durch einen Kreis gehen zehn Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ berühren.

Liegen die drei Punkte selbst auf $\mathfrak{R}^3$, so ergeben sich $10-3.2=4$ Kugeln, welche anderwärts berühren. In jedem Punkte wird $\mathfrak{R}^3$ von vier Kugeln osculirt, welche sie noch an einer anderen Stelle berühren.

So erhalten wir auf $\mathfrak{R}^3$ eine Correspondenz [6,4], in deren entsprechenden Punkten dieselbe Kugel drei-, bezw. zweipunktig berührt. Die zehn Coincidenzen sind die Stellen fünfpunktiger Berührung.

Es giebt neun Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ an zwei verschiedenen Stellen osculiren.

Oder, es giebt neun Paare von Krümmungskreisen der $\mathfrak{R}^3$, welche sich zweimal schneiden und infolge dessen auf derselben Fläche zweiten Grades durch $\mathfrak{R}^3$ liegen.

Es giebt 16 Schmiegungskugeln der $\mathfrak{R}^3$, welche sie noch an anderer Stelle berühren, offenbar in den Coincidenzpunkten der Correspondenz [8] der Punkte Q', Q''.

In einem Gebüsche befinden sich (insbesondere durch einen gegebenen Punkt gehen) 36 Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ an einer Stelle drei-, an einer anderen zweipunktig berühren.

In einem Netze befinden sich (durch zwei Punkte gehen) 24 Kugeln, welche $\mathfrak{R}^3$ zweimal berühren.*

16. Jede Involution $J^2{}_n$ auf rationalem Träger hat $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ neutrale Paare, die nicht blos zu einer Gruppe, sondern zu ∞^1 Gruppen der $J^2{}_n$ gehören, welche in ihr eine $J^1{}_n$ bilden; so viele Paare, als an eine rationale Raumcurve n^{ter} Ordnung von einem Punkte O Doppelsecanten kommen; denn die Ebenen des Bündels O erzeugen auf ihr eine $J^2{}_n$.

---

* Mehrere von diesen Sätzen, sowie auch die Sätze über die Ordnung der Curven der Krümmungs-Mittelpunkte, der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln und der Fläche der Krümmungskreise sind analytisch für die cubische Hyperbel in einer kürzlich erschienenen Dissertation: „Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren" (Strassburg 1894) von E. Timerding bewiesen worden. Nicht richtig ist dort der Satz über die Zahl der fünfpunktig berührenden Kugeln. — Selbständig und gleichzeitig mit mir hat mehrere von den Sätzen dieser Abhandlung auch ein Zuhörer von mir, Herr J. Sobotka, gefunden. Die cubische Raumcurve war Gegenstand der Seminarübungen im vergangenen Winterhalbjahre.

Die J^2_6, welche auf $\mathfrak{R}^3$ durch die Kugeln entsteht, die durch zwei gegebene Punkte O', O'' gehen, hat daher zehn solche Paare. Unter ihnen befinden sich die drei Paare AB, AC, BC, weil diese auf allen in Ebenenpaare zerfallenden Kugeln des Netzes liegen. Die sieben übrigen Paare müssen je auf allen Kugeln eines (aus eigentlichen Kugeln bestehenden) Büschels des Netzes liegen.

Durch zwei Punkte O', O'' gehen sieben Kreise, welche $\mathfrak{R}^3$ zweimal treffen.

Alle Kreise durch O', O'', welche $\mathfrak{R}^3$ treffen, bilden eine Fläche neunter Ordnung, auf welcher diese sieben Kreise doppelt, die $\mathfrak{R}^3$ einfach, $\mathfrak{K}^2$ und die Gerade $O'O''$ dreifach, die Punkte O', O'' aber sechsfach sind.

17. Die Ebenen, welche auf den Sehnen von $\mathfrak{R}^3$ je in der Mitte senkrecht stehen, umhüllen eine Fläche vierter Klasse, für welche $\mathfrak{E}$ dreifache Berührungsebene ist.

Denn die Sehnen, welche auf den Ebenen eines Büschels senkrecht stehen, erzeugen eine Regelfläche vierten Grades mit einer unendlich fernen Leitgeraden. Ihre Mitten erzeugen eine cubische Raumcurve, als conjugirte Punkte zu den Punkten dieser Geraden. Daher fällt viermal ein Punkt dieser Curve auf die entsprechende Ebene des Büschels.

18. Der Ort der Fusspunkte der aus einem Punkte O auf die Sehnen der $\mathfrak{R}^3$ gefällten Lothe ist eine Fläche fünfter Ordnung, auf welcher die $\mathfrak{R}^3$ doppelt ist.

In der That, die Ebenen ξ, welche in den verschiedenen Punkten X einer Geraden $\mathfrak{l}$ auf OX senkrecht stehen, umhüllen einen parabolischen Cylinder, und die Strahlenbüschel (X, ξ) erzeugen daher eine Congruenz [2,1]. Diese hat mit der Congruenz [1,3] der Sehnen von $\mathfrak{R}^3$ $2.1+1.3=5$ Strahlen gemeinsam, so dass fünf Fusspunkte auf $\mathfrak{l}$ fallen.

Die Fläche muss elf Gerade, welche alle die Doppelcurve $\mathfrak{R}^3$ zweimal treffen, und 55 Kegelschnitte enthalten.* Auf elf Sehnen muss also der Fusspunkt unbestimmt sein. Zu ihnen gehören die drei unendlich fernen Sehnen; die acht anderen sind in den aus O senkrecht zu ihnen geführten Ebenen gelegen und sämmtlich imaginär. Die Sehnen nämlich von $\mathfrak{R}^3$, welche $\mathfrak{K}^2$ treffen, erzeugen eine Regelfläche achten Grades. Ein ebener Schnitt derselben und der Kegel, welcher aus O die Tangenten von $\mathfrak{K}^2$ projicirt, stehen in eindeutiger Beziehung. Es fällt also zehnmal ein Punkt des Schnittes auf die entsprechende Berührungsebene des Kegels; zwei von diesen Punkten sind die auf $\mathfrak{K}^2$ gelegenen Punkte des Schnittes; durch die acht übrigen gehen die acht Sehnen.

Die 55 Kegelschnitte liegen auf den Flächen zweiten Grades durch $\mathfrak{R}^3$ und je zwei von diesen elf Geraden. Sie zerfallen daher in drei Arten,

* Clebsch, Math. Annalen Bd. 1 S. 284; Sturm, ebenda Bd. 4 S. 273.

je nachdem unter den zwei Geraden zwei, eine oder keine von den unendlich fernen Sehnen enthalten ist. Die drei der ersten Art sind die Fusspunkts-Curven von O in Bezug auf die drei Cylinder durch $\mathfrak{R}^3$, von den 3.8 der zweiten Art, die sämmtlich imaginär sind, wollen wir absehen; es bleiben die 28 der dritten Art, unter denen vier reell sind.

Das sind Fusspunkts-Curven in Bezug auf die Sehnen-Regelschaaren von durch $\mathfrak{R}^3$ gehenden allgemeinen Flächen F^2.

Im Allgemeinen ist die Fusspunkts-Curve in Bezug auf eine Regelschaar eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art.

Sie kann aber in speciellen Fällen ein Kegelschnitt werden, und zwar sind diese Fusspunkts-Curven die Kreise des Hyperboloids.

In vier Punkten wird ein Kegelschnitt von F^2 von der Fusspunkts-Curve eines beliebigen Punktes in Bezug auf die eine Regelschaar getroffen; also umhüllen die Ebenen, welche auf der Geraden einer Regelschaar in den Punkten, in denen sie einen Kegelschnitt der Fläche treffen, senkrecht stehen, einen Torsus vierter Klasse (zweiter Art). Handelt es sich aber um einen Kreis, so sinkt, weil derselbe durch zwei von den vier allen Fusspunkts-Curven gemeinsamen unendlich fernen Punkten (den Schnitten $F^2\,\mathfrak{K}^2$) geht, die Klasse des Torsus auf 2 herab; er wird ein Kegel zweiten Grades, und die Spitze desselben hat den Kreis zur Fusspunkts-Curve. Durchläuft letzterer seine Schaar, so durchwandert die Spitze eine Gerade, welche auf den Ebenen der verbundenen Schaar normal ist; denn alle diese Kegel berühren die beiden Ebenen, welche durch die zu diesen Ebenen parallelen Geraden der Regelschaar gehen und $\mathfrak{K}^2$ tangiren.

Somit haben wir auf unserer Fusspunkts-Fläche 28 Kreise, darunter vier reelle.

II.

Additionslogarithmen für complexe Grössen.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

Je mehr man in der Physik und auf anderen Gebieten die Theorie der Functionen complexer Veränderlichen anwenden wird, um so stärker wird sich das Bedürfniss nach Erleichterung des numerischen Rechnens mit complexen Grössen fühlbar machen. Diese Ueberzeugung hegend, habe ich einige der Hilfsmittel, die sich beim Rechnen mit reellen Grössen seit langer Zeit bewährt haben, durch Einführung complexer Grössen zu verallgemeinern gesucht. So hatte ich für die Münchener mathematische Ausstellung eine Rechentafel im Entwurf gezeichnet*, welche in diesem Sinne eine Verallgemeinerung des logarithmischen Rechenschiebers darstellte. Hier lege ich den Rechnern einen dreistelligen Auszug aus einer Tafel der „Additionslogarithmen für complexe Grössen" vor, die mit fünf oder auch nur vier Stellen gedruckt sich meines Erachtens beim Rechnen mit complexen Grössen nicht weniger nützlich erweisen würde, als Leonelli's Logarithmen beim gewöhnlichen Rechnen.**

Die einfachste, mit Hilfe dieser Tafel bequemer und schneller als auf die gewöhnliche Art zu lösende Aufgabe lautet: Gegeben die Logarithmen der Moduln und die Amplituden zweier complexen Zahlen, gesucht der Logarithmus des Moduls und die Amplitude der Summe jener complexen

* Siehe den Nachtrag zum Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben von W. Dyck, München 1893, S. 21 Nr. 44d.

** Die Additionslogarithmen für reelle Grössen werden mitunter nach Gauss benannt, welcher zwar eine fünfstellige Tafel derselben 1812 in Zach's „Monatlicher Correspondenz" veröffentlicht, aber dort ausdrücklich auf Leonelli als ihren geistigen Urheber zurückgewiesen hat (vergl. Gauss' Werke 3. Bd. S. 244). In der Vorrede zu Houël's fünfstelligen Logarithmentafeln ist angegeben, dass Leonelli seinen Gedanken zuerst in dem 1803 in Bordeaux erschienenen „Supplément logarithmique" entwickelt habe.

Zahlen. Von weitergehenden Anwendungen mache ich eine solche auf die Berechnung der Wurzeln beliebiger algebraischer Gleichungen mit complexen Coefficienten namhaft, welche die bekannte Methode von Gauss, reelle trinomische Gleichungen aufzulösen, als besonderen Fall in sich enthält. Ich werde diese Methode zusammen mit anderen in einem späteren Aufsatze mittheilen.

Die Einführung der gewöhnlichen Additionslogarithmen wird Vielen bisher als ein vereinzelter Kunstgriff erschienen sein. Sie lässt sich aber, wie ich schon an anderer Stelle gezeigt habe*, aus einem höheren Gesichtspunkte betrachten. Sei nämlich

$$z = f(x, y)$$

irgend eine reelle homogene Function n^{ten} Grades der beiden reellen Veränderlichen x und y, so ist

$$z = f\left(\frac{x}{y}, 1\right) . y^n,$$

oder, wenn man

$$\log f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = v$$

setzt,

$$\log z = v + n \log y.$$

Dabei lässt sich v als Function von

$$u = \log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

ansehen. Eine numerische Tafel dieser Function ermöglicht offenbar in einfachster Weise die Bestimmung des Werthes von $\log z$, der zu einem gegebenen Werthepaare $\log x$, $\log y$ gehört. Man hat

$$f(x, y) = x + y$$

zu nehmen, um Leonelli's Fall zu erhalten, in welchem es üblich ist, A statt u und B statt v zu schreiben. Die Beziehung zwischen u und v lässt sich allgemein durch

$$10^v = f(10^u, 1)$$

ausdrücken.

Der Uebergang zu complexen Veränderlichen ist leicht. Mit Rücksicht auf die Einrichtung unserer Logarithmentafeln werde ich bei der Darstellung einer beliebigen complexen Zahl durch

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

die Amplitude φ nicht in Theilen des Halbmessers, sondern in Graden ausdrücken, und zwar nach sogenannter neuer Theilung.**

---

* A. a. O. S. 20 Nr. 44c.

** An guten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für die centesimale Theilung des Quadranten ist kein Mangel. Es giebt deren vier- und fünfstellige von F. G. Gauss, Gravelius u. A., sechsstellige von Jordan, achtstellige vom französischen „Service géographique de l'armée". Daher liegt für den reinen Mathematiker nicht der mindeste Grund vor, sich noch länger mit der sexagesimalen Theilung abzumühen.

Bezeichnet man die gemeinen Logarithmen der Moduln der (jetzt als complex betrachteten) Grössen x, y, z beziehentlich mit ξ, η, ζ, ihre Amplituden mit ξ', η', ζ', so ist

$$x = 10^{\xi}(\cos\xi' + i\sin\xi')$$

und ähnliche Ausdrücke gelten für y und z. Setzt man dieselben in die Gleichung

$$z = f\left(\frac{x}{y},\ 1\right).y^n$$

ein, so kann die entstehende Gleichung in folgende beiden zerlegt werden:

$$\zeta = v + n\eta,$$

$$\zeta' \equiv v' + n\eta' \ (mod\, 400),$$

wobei

$$10^v(\cos v' + i\sin v') = f[10^u(\cos u' + i\sin u'),\ 1]$$

und

$$u = \xi - \eta, \quad u' \equiv \xi' - \eta' \ (mod\, 400)$$

ist. Man hat jetzt, um nach diesen Formeln zu gegebenen Werthen von ξ, ξ', η, η' diejenigen von ζ und ζ' finden zu können, eine Doppeltafel nöthig, deren erster Theil v, deren zweiter v', jedesmal als Function der beiden reellen Veränderlichen u und u' liefert.

Beschränken wir uns von jetzt an auf den Fall

$$f(x,\ y) = x + y.$$

Wir wollen in demselben beziehentlich die Zeichen A, A, B, B* statt u, u', v, v' anwenden, so dass wir die fundamentale Gleichung erhalten:

$$1)\qquad 10^B(\cos\mathsf{B} + i\sin\mathsf{B}) = 10^A(\cos\mathsf{A} + i\sin\mathsf{A}) + 1,$$

welcher man auch die Gestalt

$$e^{\ln 10\,.\,B + i\frac{200}{\pi}\cdot\mathsf{B}} = e^{\ln 10\,.\,A + i\frac{200}{\pi}\cdot\mathsf{A}} + 1$$

geben kann. Auf den Seiten 23—30 findet man eine dreistellige Tafel der B und eine solche der B, für welche die zusammenfassende Bezeichnung „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ gestattet sein möge, trotzdem die zweite Tafel nicht Logarithmen, sondern Winkel enthält.**

Entsprechend den zwei unabhängigen Veränderlichen A und A haben die Tafeln zwei Eingänge; die Anordnung ist so getroffen, dass A von Reihe zu Reihe, A von Spalte zu Spalte sich ändert. Hinter einigen Zahlen

---

* Es wird zwar der Buchstabe B schon als Zeichen einer anderen Function gebraucht, ein Missverständniss ist aber hier, wo B immer mit A, A und B zusammen vorkommt, kaum zu befürchten.

** Wenn hier nicht in erster Linie die Bedürfnisse des Zahlenrechnens berücksichtigt werden müssten, so wäre es natürlich einfacher, als „Additionslogarithmus“ im weiteren Sinne die durch

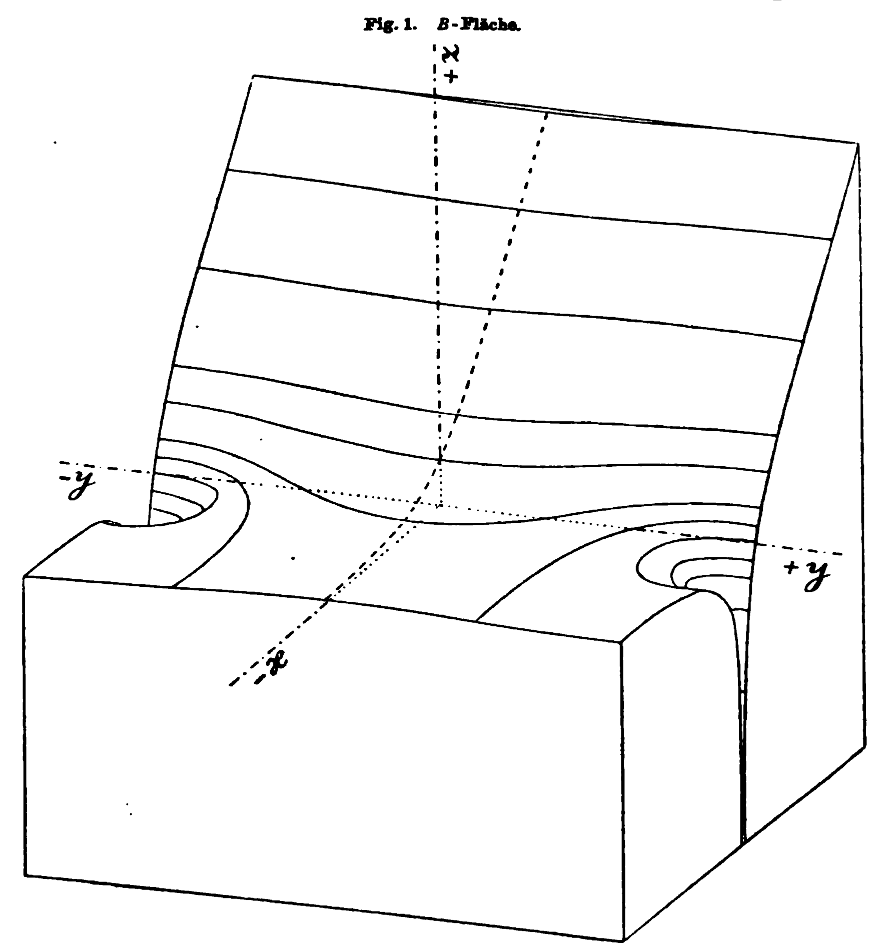
$$e^w = e^z + 1$$

definirte Function w der complexen Veränderlichen z zu bezeichnen.

der Tafeln bemerkt man einen Strich; derselbe bedeutet, dass die letzte von Null verschiedene Ziffer der betreffenden Zahlen eine durch Erhöhung aus 4 entstandene 5 ist.

Behufs geometrischer Veranschaulichung der Functionen B und B betrachtet man am einfachsten A und A als Abscisse und Ordinate, B bezw. B als Höhe eines veränderlichen Raumpunktes. Die beiden sich ergebenden

Fig. 1. B-Fläche.



Flächen sind in den Figuren 1 und 2 mit Hilfe einer Anzahl von wagerechten Schnitten parallel-perspectivisch dargestellt.

Es sollen jetzt einige der wichtigsten Eigenschaften der in Rede stehenden Functionen bezw. der zugehörigen Flächen abgeleitet werden. Zunächst sieht man, dass B eine eindeutige, B dagegen eine unendlich vieldeutige Function ist, indem zu jedem Werthe von B ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von $\pm 400^0$ hinzugefügt werden darf; dass ferner B und B periodische Functionen von A mit der Periode 400^0 sind. Daher

kann man sich bei A und B von vornherein auf die Werthe zwischen -200^0 und $+200^0$ beschränken. Wird auf beiden Seiten von Gleichung 1) $-i$ an Stelle von $+i$ gesetzt, so kommt

$$10^{B}(\cos \mathsf{B} - i \sin \mathsf{B}) = 10^{A}(\cos \mathsf{A} - i \sin \mathsf{A}) + 1,$$

oder

$$10^{B}[\cos(-\mathsf{B}) + i \sin(-\mathsf{B})] = 10^{A}[\cos(-\mathsf{A}) + i \sin(-\mathsf{A})] + 1,$$

woraus hervorgeht, dass B eine gerade, B eine ungerade Function von A ist. Das heisst geometrisch:

Die B-Fläche ist symmetrisch zur xz-Ebene, die B-Fläche symmetrisch zur x-Achse. Zugleich ist klar, dass wegen dieser Eigenschaft die Tafeln blos von $\mathsf{A} = 0^0$ bis $\mathsf{A} = 200^0$ zu gehen brauchen.

Setzt man $A' = -A$ und bezeichnet, bei unverändertem A, die zugehörigen Werthe von B und B mit B' und B', so ist wegen Gleichung 1)

$$10^{B'}(\cos \mathsf{B}' + i \sin \mathsf{B}') = 10^{-A}(\cos \mathsf{A} + i \sin \mathsf{A}) + 1,$$

oder nach Vertauschung von i mit $-i$:

$$10^{B'}[\cos(-\mathsf{B}') + i \sin(-\mathsf{B}')] = 10^{-A}(\cos \mathsf{A} - i \sin \mathsf{A}) + 1.$$

Durch Multiplication mit

$$10^{A}(\cos \mathsf{A} + i \sin \mathsf{A})$$

und Benützung von Gleichung 1) erhält man hieraus

$$10^{B'+A}[\cos(\mathsf{A} - \mathsf{B}') + i \sin(\mathsf{A} - \mathsf{B}')] = 1 + 10^{A}(\cos \mathsf{A} + i \sin \mathsf{A}) = 10^{B}(\cos \mathsf{B} + i \sin \mathsf{B}).$$

Daher ist

$$B' + A = B,$$
$$\mathsf{A} - \mathsf{B}' \equiv \mathsf{B} \pmod{400}$$

oder:

$$2)\quad \begin{cases} B' = B - A = B + A', \\ \mathsf{B}' \equiv \mathsf{A} - \mathsf{B} \pmod{400}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die leicht als geometrische Eigenschaften der B- und B-Fläche gedeutet werden könnten, deren erste auch bei den gewöhnlichen Additionslogarithmen wohlbekannt ist, zeigen uns, dass man bei dem Argument A sich entweder auf negative oder auf positive Werthe beschränken dürfte, wodurch am Umfang der Tafeln um die Hälfte gespart würde. Für manche Anwendungen ist es jedoch bequemer, die vollständigen Tafeln zur Verfügung zu haben.

Lässt man in Gleichung 1) A von Null an fortwährend abnehmen, so nähert sich, welches auch der Werth von A sein mag, die rechte Seite unaufhörlich der Eins, folglich nähern sich B und der zwischen -200^0 und $+200^0$ liegende Werth von B gleichzeitig der Null. Die B- und B-Fläche haben somit beide die xy-Ebene zur Asymptotenebene; die Annäherung findet in der $-x$-Richtung statt. In Verbindung mit Gleichung 2) ergiebt sich aus dem eben Gefundenen, dass, wenn A über alle Grenzen hinauswächst, B und A, wie auch B und A einander immer näher kommen. Daher ist die Halbirungsebene des zwischen der $+x$- und $+z$-Achse enthaltenen Winkels der xy- und yz-Ebene gleichfalls eine Asymptotenebene

der B-Fläche, und die Halbirungsebene der zwischen den gleichnamigen Theilen der y- und z-Achse enthaltenen Scheitelwinkel der xy- und xz-Ebene eine Asymptotenebene der B-Fläche. — Für $\mathsf{A} = 0$ erhält man aus Gleichung 1)

$$10^{B}(\cos \mathsf{B} + i \sin \mathsf{B}) = 10^{A} + 1.$$

Da die rechte Seite stets positiv ist, so wird

$$\mathsf{B} \equiv 0 \,(mod\, 400)$$

und

$$10^{B} = 10^{A} + 1.$$

Letztere Gleichung zeigt, dass man es in diesem Falle mit den gewöhnlichen Additionslogarithmen zu thun hat.

Ist $\mathsf{A} = 200^{0}$, so ergiebt sich

$$10^{B}(\cos \mathsf{B} + i \sin \mathsf{B}) = -10^{A} + 1.$$

Hat man nun $A < 0$ bezw. $A > 0$, so wird die rechte Seite positiv bezw. negativ, also $\mathsf{B} \equiv 0$ bezw. $\mathsf{B} \equiv 200 \,(mod\, 400)$. Wenn dagegen $A = 0$ ist, so verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung und man erhält $B = -\infty$, während B ganz unbestimmt wird. Letzterem Umstande entspricht es, dass die B-Fläche unendlich viele zur z-Achse parallele Kanten hat, welche durch die Punkte $x (= A) = 0$, $y (= \mathsf{A}) \equiv 200^{0} (mod\, 400)$ gehen. Uebrigens stehen in diesem Falle ($\mathsf{A} = 200^{0}$) die Grössen B zu I. Zech's „Subtractionslogarithmen", welche man in Hülsse's Sammlung mathematischer Tafeln findet, in einfacher Beziehung. Diese geben nämlich zum Argumente $u = \log t$ den Werth

$$v = \log \frac{t}{t-1},$$

so dass

$$10^{u-v} = 10^{u} - 1$$

ist. Man hat aber zum Beispiel für $A > 0$, $\mathsf{A} = 200^{0}$:

$$10^{B} = 10^{A} - 1,$$

weshalb die zu gleichen Argumenten $A = u$ gehörigen Werthe B und v durch die Gleichung

$$B = u - v \quad \text{oder} \quad v = A - B$$

verknüpft sind.

Setzt man in Gleichung 1) $A = 0$, so kommt

$$10^{B}(\cos \mathsf{B} + i \sin \mathsf{B}) = 1 + \cos \mathsf{A} + i \sin \mathsf{A},$$

woraus

$$tg\, \mathsf{B} = \frac{\sin \mathsf{A}}{1 + \cos \mathsf{A}} = tg\, \frac{\mathsf{A}}{2},$$

also

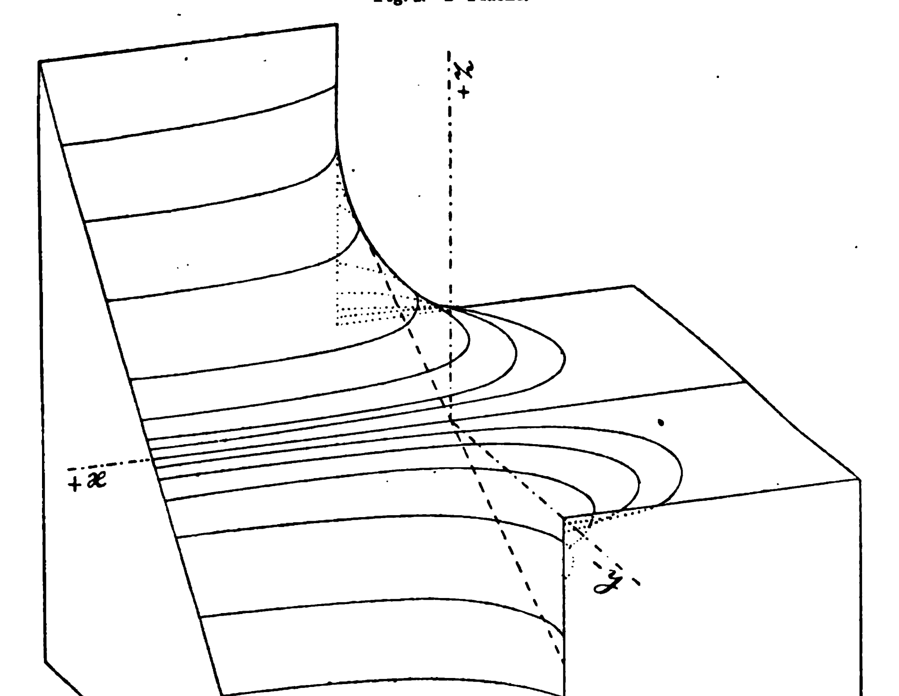
$$\mathsf{B} \equiv \frac{\mathsf{A}}{2} \,(mod\, 200)$$

folgt. Zu dieser Gleichung gehören unendlich viele, einander in gleichen Abständen folgende, parallele Geraden — eine davon (siehe Fig. 2) geht durch den Ursprung und halbirt die Winkel zwischen den gleichnamigen Theilen der y- und z-Achse —, nach welchen (abgesehen von den bereits

erwähnten Kanten) die B-Fläche von der yz-Ebene geschnitten wird. Wenn man, den Werth $A = 0$ festhaltend und von B = 0 ausgehend, A von 0° bis 200° wachsen lässt, so nähert sich B dem Grenzwerthe 100°, welcher denn auch in der Tafel der B unter $A = 0$, A = 200° aufgeführt ist.

Was die Eingangs erwähnte Aufgabe betrifft, den Logarithmus des Moduls r und die Amplitude φ der Summe zweier complexen Zahlen zu be-

Fig. 2. B-Fläche.



stimmen, wenn von letzteren die Logarithmen der Moduln r_1 und r_2 sowie die Amplituden φ_1 und φ_2 gegeben sind, so ergiebt sich aus dem Früheren, dass deren Lösung in den Formeln enthalten ist:

$$A = \log r_1 - \log r_2, \quad \mathrm{A} = \varphi_1 - \varphi_2,$$
$$\log r = B + \log r_2, \quad \varphi = \mathrm{B} + \varphi_2.$$

An einem Zahlenbeispiele möge noch diese Auflösung mit der gewöhnlichen verglichen werden. Sei

$$\log r_1 = 0.62532, \quad \varphi_1 = 59{,}637^0,$$
$$\log r_2 = 0.99260, \quad \varphi_2 = 48.626^0.$$

1. Berechnung von $log\,r$ und φ mittelst fünfstelliger Additionslogarithmen für complexe Grössen.

$$\begin{array}{rl} log\,r_1 = & 0.62532 \\ log\,r_2 = & 0.99260 \\ B = & 0.15374 \\ \hline A = & 9.63272-10 \\ \hline log\,r = & \underline{1.14634} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \varphi_1 = & 59{,}637^0 \\ \varphi_2 = & 48{,}626^0 \\ \mathrm{B} = & 3{,}302^0 \\ \hline \mathrm{A} = & 11{,}011^0 \\ \hline \varphi = & \underline{51{,}928^0} \end{array}$$

2. Berechnung von $log\,r$ und φ auf gewöhnliche Weise.

$$\begin{array}{rl} \varphi_1 = & 59{,}637^0 \\ \hline log\,cos\,\varphi_1 = & 9.77261-10 \\ log\,r_1 = & 0.62532 \\ log\,sin\,\varphi_1 = & 9.90615-10 \\ \hline log\,r_1\,cos\,\varphi_1 = & 0.39793 \\ log\,r_2\,sin\,\varphi_1 = & 0.53147 \\ \hline r_1\,cos\,\varphi_1 = & 2{,}4999 \\ r_2\,cos\,\varphi_2 = & 7{,}1000 \\ \hline r\,cos\,\varphi = & 9{,}5999 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \varphi_2 = & 48{,}626^0 \\ \hline log\,cos\,\varphi_2 = & 9.85866-10 \\ log\,r_2 = & 0.99260 \\ log\,sin\,\varphi_2 = & 9.83990-10 \\ \hline log\,r_2\,cos\,\varphi_2 = & 0.85126 \\ log\,r_2\,sin\,\varphi_2 = & 0.83250 \\ \hline r_1\,sin\,\varphi_1 = & 6{,}7999 \\ r_2\,sin\,\varphi_2 = & 3{,}3999 \\ \hline r\,sin\,\varphi = & 10{,}1998 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} log\,r\,sin\,\varphi = & 1.00859 \\ \mathrm{E}\,log\,\frac{cos}{sin}\,\varphi = & 0.13775 \\ log\,r\,cos\,\varphi = & 0.98227 \\ \hline log\,tg\,\varphi = & 0.02632 \\ \hline \varphi = & \underline{51{,}928^0} \\ \hline log\,r = & \underline{1.14634} \end{array}$$

Bei der alten Methode ist eine zwölfmalige, bei der neuen blos eine zweimalige Benützung einer Tafel nöthig, und wenn es auch im letzteren Falle sich um Tafeln mit zwei Eingängen handelt, bei welchen die Interpolation doppelt so viel Zeit in Anspruch nimmt, als bei Tafeln mit einem Eingange, so ist doch der Gewinn ein überraschend grosser.

I. Tafel der B.

A	A = 0°	10°	20°	30°	40°	50°
8.0	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.003
8.1	0.005	0.005	0.005	0.005 —	0.004	0.004
8.2	0.007	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005 —
8.3	0.009	0.008	0.008	0.008	0.007	0.006
8.4	0.011	0.011	0.010	0.010	0.009	0.008
8.5	0.014	0.013	0.013	0.012	0.011	0.010
8.6	0.017	0.017	0.016	0.015	0.014	0.012
8.7	0.021	0.021	0.020	0.019	0.017	0.015
8.8	0.027	0.026	0.025	0.024	0.022	0.019
8.9	0.033	0.033	0.032	0.030	0.027	0.024
9.0	0.041	0.041	0.040	0.037	0.034	0.031
9.1	0.051	0.051	0.049	0.047	0.043	0.038
9.2	0.064	0.063	0.061	0.058	0.054	0.048
9.3	0.079	0.078	0.076	0.072	0.067	0.061
9.4	0.097	0.096	0.094	0.090	0.084	0.076
9.5	0.119	0.118	0.115	0.111	0.104	0.095 —
9.6	0.146	0.144	0.141	0.136	0.128	0.118
9.7	0.176	0.175	0.172	0.166	0.157	0.146
9.8	0.212	0.211	0.207	0.201	0.192	0.180
9.9	0.254	0.253	0.249	0.242	0.232	0.220
0.0	0.301	0.300	0.296	0.289	0.279	0.267
0.1	0.354	0.353	0.349	0 342	0.332	0.320
0.2	0.412	0.411	0.407	0.401	0.392	0.380
0.3	0.476	0.475	0.472	0.466	0.457	0 446
0.4	0.546	0.544	0.541	0.536	0.528	0.518
0.5	0.619	0.618	0.615	0.611	6.604	0.595 —
0.6	0.697	0.696	0.694	0.690	0.684	0.676
0.7	0.779	0.778	0.776	0.772	0.767	0.761
0.8	0.864	0.863	0.861	0.858	0.854	0.848
0.9	0.951	0.951	0.949	0.947	0.943	0.938
1.0	1.041	1.041	1.040	1.037	1.034	1.031
1.1	1.133	1.133	1.132	1.130	1.127	1.124
1.2	1.227	1.226	1.225	1.224	1.222	1.219
1.3	1.321	1.321	1.320	1.319	1.317	1.315
1.4	1.417	1.417	1.416	1.415	1.414	1.412
1.5	1.514	1.513	1.513	1.512	1.511	1.510
1.6	1.611	1.611	1.610	1.610	1.609	1.608
1.7	1.709	1.708	1.708	1.708	1.707	1.706
1.8	1.807	1.807	1.807	1.806	1.806	1.805 —
1.9	1.905	1.905	1.905	1.905 —	1.904	1.904
2.0	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.003

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 50°	60°	70°	80°	90°	100°
8.0	0.003	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000
8.1	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000
8.2	0.005 –	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000
8.3	0.006	0.005	0.004	0.003	0.001	0.000
8.4	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.000
8.5	0.010	0.008	0.006	0.004	0.002	0.000
8.6	0.012	0.010	0.008	0.006	0.003	0.000
8.7	0.015	0.013	0.010	0.007	0.004	0.001
8.8	0.019	0.016	0.013	0.009	0.005	0.001
8.9	0.024	0.021	0.016	0.012	0.007	0.001
9.0	0.031	0.026	0.021	0.015	0.009	0.002
9.1	0.038	0.033	0.027	0.019	0.012	0.003
9.2	0.048	0.042	0.034	0.025	0.016	0.005
9.3	0.061	0.053	0.043	0.033	0.021	0.008
9.4	0.076	0.067	0.055	0.043	0.029	0.013
9.5	0.095 –	0.084	0.071	0.056	0.039	0.021
9.6	0.118	0.106	0.091	0.074	0.054	0.032
9.7	0.146	0.132	0.116	0.097	0.074	0.049
9.8	0.180	0.165	0.147	0.126	0.101	0.073
9.9	0.220	0.205 –	0.186	0.163	0.137	0.106
0.0	0.267	0.251	0.232	0.209	0.182	0.151
0.1	0.320	0.305 –	0.286	0.263	0.237	0.206
0.2	0.380	0.365	0.347	0.326	0.301	0.273
0.3	0.446	0.432	0.416	0.397	0.374	0.349
0.4	0.518	0.506	0.491	0.474	0.454	0.432
0.5	0.595 –	0.584	0.571	0.556	0.539	0.521
0.6	0.676	0.666	0.655	0.643	0.629	0.613
0.7	0.761	0.753	0.743	0.733	0.721	0.708
0.8	0.848	0.842	0.834	0.825	0.816	0.805
0.9	0.938	0.933	0.927	0.919	0.912	0.903
1.0	1.031	1.026	1.021	1.015	1.009	1.002
1.1	1.124	1.121	1.116	1.112	1.107	1.101
1.2	1.219	1.216	1.213	1.209	1.205	1.201
1.3	1.315	1.313	1.310	1.307	1.304	1.301
1.4	1.412	1.410	1.408	1.406	1.403	1.400
1.5	1.510	1.508	1.506	1.504	1.502	1.500
1.6	1.608	1.606	1.605	1.603	1.602	1.600
1.7	1.706	1.705	1.704	1.703	1.701	1.700
1.8	1.805 –	1.804	1.803	1.802	1.801	1.800
1.9	1.904	1.903	1.903	1.902	1.901	1.900
2.0	2.003	2.003	2.002	2.001	2.001	2.000

Tafel der B* (Fortsetzung).

A	A = 100°	110°	120°	130°	140°	150°
8.0	0.000	9.999	9.999	9.998	9.997	9.997
8.1	0.000	9.999	9.998	9.998	9.997	9.996
8.2	0.000	9.999	9.998	9.997	9.996	9.995
8.3	0.000	9.999	9.997	9.996	9.995 —	9.994
8.4	0.000	9.998	9.997	9.995	9.994	9.992
8.5	0.000	9.998	9.996	9.994	9.992	9.990
8.6	0.000	9.998	9.995 —	9.992	9.990	9.988
8.7	0.001	9.997	9.994	9.990	9.987	9.985 —
8.8	0.001	9.997	9.992	9.988	9.984	9.981
8.9	0.001	9.996	9.991	9.985	9.980	9.976
9.0	0.002	9.995	9.988	9.982	9.975	9.969
9.1	0.003	9.995 —	9.986	9.977	9.969	9.962
9.2	0.005	9.995 —	9.984	9.973	9.962	9.952
9.3	0.008	9.995	9.981	9.967	9.953	9.940
9.4	0.013	9.997	9.979	9.961	9.943	9.925 —
9.5	0.021	0.000	9.978	9.955	9.931	9.907
9.6	0.032	0.007	9.980	9.951	9.920	9.887
9.7	0.049	0.020	9.987	9.950	9.910	9.875 —
9.8	0.073	0.040	0.002	9.958	9.909	9.852
9.9	0.106	0.070	0.028	9.979	9.922	9.853
0.0	0.151	0.114	0.070	0.019	9.958	9.884
0.1	0.206	0.170	0.128	0.079	0.022	9.953
0.2	0.273	0.240	0.202	0.158	0.109	0.052
0.3	0.349	0.320	0.287	0.250	0.210	0.175 —
0.4	0.432	0.407	0.380	0.351	0.320	0.287
0.5	0.521	0.500	0.478	0.455	0.431	0.407
0.6	0.613	0.597	0.579	0.561	0.543	0.525 —
0.7	0.708	0.695	0.681	0.667	0.653	0.640
0.8	0.805	0.795 —	0.784	0.773	0.762	0.752
0.9	0.903	0.895 —	0.886	0.877	0.869	0.862
1.0	1.002	0.995	0.988	0.982	0.975	0.969
1.1	1.101	1.096	1.091	1.085	1.080	1.076
1.2	1.201	1.197	1.192	1.188	1.184	1.181
1.3	1.301	1.297	1.294	1.290	1.287	1.285 —
1.4	1.400	1.398	1.395 —	1.392	1.390	1.388
1.5	1.500	1.498	1.496	1.494	1.492	1.490
1.6	1.600	1.598	1.597	1.595	1.594	1.592
1.7	1.700	1.699	1.697	1.696	1.695 —	1.694
1.8	1.800	1.799	1.798	1.797	1.796	1.795
1.9	1.900	1.899	1.898	1.898	1.897	1.896
2.0	2.000	1.999	1.999	1.998	1.997	1.997

* Den Logarithmen mit der Kennziffer 9 ist — 10 anzuhängen.

Tafel der B* (Fortsetzung).

A	A = 150°	160°	170°	180°	190°	200°
8.0	9.997	9.996	9.996	9.996	9.996	9.996
8.1	9.996	9.996	9.995	9.995 –	9.995 –	9.995 –
8.2	9.995	9.994	9.994	9.993	9.993	9.993
8.3	9.994	9.993	9.992	9.992	9.991	9.991
8.4	9.992	9.991	9.990	9.990	9.989	9.989
8.5	9.990	9.989	9.988	9.987	9.986	9.986
8.6	9.988	9.986	9.984	9.983	9.983	9.982
8.7	9.985 –	9.982	9.980	9.979	9.978	9.978
8.8	9.981	9.978	9.975	9.973	9.972	9.972
8.9	9.976	9.972	9.968	9.966	9.965 –	9.964
9.0	9.969	9.964	9.960	9.957	9.955 –	9.954
9.1	9.962	9.955 –	9.949	9.945	9.942	9.942
9.2	9.952	9.943	9,935	9.930	9.926	9.925
9.3	9.940	9.928	9.918	9.910	9.905	9.903
9.4	9.925 –	9.909	9.895 –	9.884	9.877	9.874
9.5	9.907	9.885 –	9.865 –	9.849	9.839	9.835 –
9.6	9.887	9.856	9.826	9.802	9.785	9.780
9.7	9.875 –	9.822	9.777	9.737	9.708	9.698
9.8	9.852	9.788	9.719	9.648	9.591	9.567
9.9	9.853	9.769	9.667	9.540	9.396	9.313
0.0	9.884	9.791	9.669	9.495	9.196	– ∞
0.1	9.953	9.869	9.767	9.640	9.496	9.413
0.2	0.052	9.988	9.919	9.848	9.791	9.767
0.3	0.175 –	0.122	0.077	0.037	0.008	9.998
0.4	0.287	0.256	0.226	0.202	0.185	0.180
0.5	0.407	0.385 –	0.365 –	0.349	0.339	0.335 –
0.6	0.525 –	0.509	0.495 –	0.484	0.477	0.474
0.7	0.640	0.628	0.618	0.610	0.605	0.603
0.8	0.752	0.743	0.735	0.730	0.726	0.725
0.9	0.862	0.855 –	0.849	0.845	0.842	0.842
1.0	0.969	0.964	0.960	0.957	0.955 –	0.954
1.1	1.076	1.072	1.068	1.066	1.065 –	1.064
1.2	1.181	1.178	1.175	1.173	1.172	1.172
1.3	1.285 –	1.282	1.280	1 279	1.278	1.278
1.4	1.388	1.386	1.384	1.383	1.383	1.382
1.5	1.490	1.489	1.488	1.487	1.486	1.486
1.6	1.592	1.591	1.590	1.590	1.589	1.589
1.7	1.694	1.693	1.692	1.692	1.691	1.691
1.8	1.795	1.794	1.794	1.793	1.793	1.793
1.9	1.896	1.896	1.895	1.895 –	1.895 –	1.895 –
2.0	1.997	1.996	1.996	1.996	1.996	1.996

* Den Logarithmen mit der Kennziffer 9 ist — 10 anzuhängen.

II. Tafel der B.

A	A = 0°	10°	20°	30°	40°	50°
8.0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4
8.1	0,0	0,1	0,2	0,4	0,5 —	0,6
8.2	0,0	0,2	0,3	0,5 —	0,6	0,7
8.3	0,0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9
8.4	0,0	0,2	0,5 —	0,7	0,9	1,1
8.5	0,0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,4
8.6	0,0	0,4	0,8	1,1	1,4	1,7
8.7	0,0	0,5 —	0,9	1,4	1,8	2,2
8 8	0,0	0,6	1,2	1,7	2,2	2,7
8.9	0,0	0,7	1,5 —	2,1	2,8	3,4
9.0	0,0	0,9	1,8	2,7	3,5 —	4,2
9.1	0,0	1,1	2,2	3,3	4,3	5,2
9.2	0,0	1,4	2,7	4,0	5,2	6,4
9.3	0,0	1,7	3,3	4,9	6,4	7,8
9.4	0,0	2,0	4,0	5,9	7,8	9,5
9.5	0,0	2,4	4,8	7,1	9,4	11,5
9.6	0,0	2,8	5,7	8,4	11,2	13,8
9.7	0,0	3,3	6,7	9,9	13,2	16,3
9.8	0,0	3,9	7,7	11,5	15,3	19,1
9.9	0,0	4,4	8,8	13,2	17,6	22,0
0.0	0,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
0.1	0,0	5,6	11,2	16,8	22,4	28,0
0.2	0,0	6,1	12,3	18,5 —	24,7	30,9
0.3	0,0	6,7	13,3	20,1	26,8	33,7
0.4	0,0	7,2	14,3	21,6	28,8	36,2
0.5	0,0	7,6	15,2	22,9	30,6	38,5 —
0.6	0,0	8,0	16,0	24,1	32,2	40,5 —
0.7	0,0	8,3	16,7	25,1	33,6	42,2
0.8	0,0	8,6	17,3	26,0	34,8	43,6
0.9	0,0	8,9	17,8	26,7	35,7	44,8
1.0	0,0	9,1	18,2	27,3	36,5	45,8
1.1	0,0	9,3	18,5	27,9	37,2	46,6
1.2	0,0	9,4	18,8	28,3	37,8	47,3
1.3	0,0	9,5	19,1	28,6	38,2	47,8
1 4	0,0	9,6	19,2	28,9	38,6	48,3
1.5	0,0	9,7	19,4	29,1	38,8	48,6
1.6	0,0	9,8	19,5	29,3	39,1	48,9
1.7	0,0	9,8	19,6	29,4	39,3	49,1
1.8	0,0	9,8	19,7	29,5	39,4	49,3
1.9	0,0	9,9	19,8	29,6	39,5	49,4
2.0	0,0	9,9	19,8	29,7	39,6	49,6

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 50°	60°	70°	80°	90°	100°
8.0	0,4	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6
8.1	0,6	0,6	0,7	0,8	0,8	0,8
8.2	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,0
8.3	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3
8.4	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6
8.5	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0	2,0
8.6	1,7	2,0	2,2	2,4	2,5 —	2,5
8.7	2,2	2,5	2,8	3,0	3,1	3,2
8.8	2,7	3,1	3,5 —	3,7	3 9	4,0
8.9	3,4	3,9	4,3	4,7	4,9	5,0
9.0	4,2	4,9	5,4	5,9	6,2	6,3
9.1	5,2	6,0	6,7	7,3	7,7	8,0
9.2	6,4	7,4	8,3	9,1	9,6	10,0
9.3	7,8	9,1	10,3	11,3	12,0	12,5
9.4	9,5	11,2	12,6	13,9	14,9	15,7
9.5	11,5	13,5	15,4	17,0	18,4	19,5 —
9.6	13,8	16,3	18,6	20,7	22,6	24,1
9.7	16,3	19,3	22,2	24,9	27,4	29,6
9.8	19,1	22,7	26,2	29,6	32,8	35,8
9 9	22,0	26,3	30,5	34,7	38,8	42,7
0.0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0
0.1	28,0	33,7	39,5 —	45,3	51,2	57,3
0.2	30,9	37,3	43,8	50,4	57,2	64,2
0.3	33,7	40,7	47.8	55,1	62,6	70,4
0.4	36,2	43,7	51,4	59,3	67,4	75,9
0.5	38,5 —	46,5 —	54,6	63,0	71,6	81,5
0.6	40,5 —	48,8	57,4	66,1	75.1	84,3
0.7	42,2	50,9	59,7	68,7	78,0	87,5 —
0.8	43,6	52,6	61,7	70,9	80,4	90,0
0.9	44,8	54,0	63,3	72,7	82,3	92,0
1.0	45,8	55,1	64,6	74,1	83,8	93,7
1.1	46,6	56.1	65,7	75,3	85,1	95,0 —
1.2	47,3	56.9	66,5	76,3	86,1	96,0
1.3	47.8	57.5 —	67,2	77,0	86,9	96.8
1.4	48,3	58,0	67,8	77,6	87,5	97,5 —
1.5	48.6	58.4	68.2	78,1	88.0	98.0
1.6	48.9	58.7	68.6	78.5 —	88.4	98.4
1.7	49,1	59.0	68.9	78,8	88.7	98,7
1.8	49,3	59.2	69.1	79.0	89.0	99.0
1.9	49,4	59,4	69,3	79.2	89.2	99,2
2.0	49,6	59,5 —	69,4	79,4	89,4	99,4

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 100°	110°	120°	130°	140°	150°
8.0	0,6	0,6	0,6	0,6	0,5	0,5 —
8.1	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6
8.2	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,7
8.3	1,3	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9
8.4	1,6	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2
8.5	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5 —
8.6	2,5	2,5	2,4	2,3	2,1	1,8
8.7	3,2	3,2	3,1	2,9	2,7	2,3
8.8	4,0	4,0	3,9	3,7	3,4	3,0
8.9	5,0	5,0	4,9	4,7	4,3	3,8
9.0	6,3	6,4	6,2	5,9	5,5 —	4,8
9.1	8,0	8,0	7,9	7,5	7,0	6,2
9.2	10,0	10,1	10,0	9,6	8,9	8,0
9.3	12,5	12,8	12,7	12,3	11,5	10,4
9.4	15,7	16,1	16,1	15,8	14,9	13,5
9.5	19,5 —	20,2	20,5 —	20,2	19,4	17,9
9.6	24,1	25,3	25,1	26,0	25,3	23,8
9.7	29,6	31,4	32,7	33,4	33,2	31,3
9.8	35,8	38,5	40,8	42,5 —	43,4	43,2
9.9	42,7	46,5	50,0	53,2	55,9	57,8
0.0	50,0	55,0	60,0	65,0	70,0	75,0
0.1	57,3	63,5 —	70,0	76,8	84,1	92,2
0.2	64,2	71,5 —	79,9	87,5	96,6	106,8
0.3	70,4	78,6	87,3	96,6	106,8	118,7
0.4	75,9	84,7	94,9	104,0	114,7	126,2
0.5	81,5	89,8	99,5	109,8	120,6	132,1
0.6	84,3	93,9	103,9	114,2	125,1	136,5 —
0.7	87,5 —	97,2	107,3	117,7	128,5 —	139,6
0.8	90,0	99,9	110,0	120,4	131,1	142,0
0.9	92,0	102,0	112,1	122,5 —	133,0	143,8
1.0	93,7	103,6	113,8	124,1	134,5	145,2
1.1	95,0 —	105,0 —	115,1	125,3	135,7	146,2
1.2	96,0	106,0	116,1	126,3	136,6	147,0
1.3	96,8	106,8	116,9	127,1	137,3	147,7
1.4	97,5 —	107,5 —	117,6	127,7	137,9	148,2
1.5	98,0	108,0	118,1	128,2	138,3	148,5
1.6	98,4	108,4	118,5 —	128,6	138,7	148,8
1.7	98,7	108,7	118,8	128,9	139,0	149,1
1.8	99,0	109,0	119,0	129,1	139,2	149,3
1.9	99,2	109,2	119,2	129,3	139,3	149,4
2.0	99,4	109,4	119,4	129,4	139,5 —	149,5

Tafel der B (Fortsetzung).

A	A = 150°	160°	170°	180°	190°	200°
8.0	0,5 —	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
8.1	0,6	0,5 —	0,4	0,3	0,1	0,0
8.2	0,7	0,6	0,5 —	0,3	0,2	0,0
8.3	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
8.4	1,2	1,0	0,7	0,5	0,3	0,0
8.5	1,5 —	1,2	0,9	0,6	0,3	0,0
8.6	1,8	1,5	1,2	0,8	0,4	0,0
8.7	2,3	2,0	1,5	1,0	0,5	0,0
8.8	3,0	2,5 —	1,9	1,3	0,7	0,0
8.9	3,8	3,2	2,5 —	1,7	0,9	0,0
9.0	4,8	4,1	3,2	2,2	1,1	0,0
9.1	6,2	5,2	4,1	2,8	1,4	0,0
9.2	8,0	6,8	5,3	3,7	1,9	0,0
9.3	10,4	8,8	7,0	4,8	2,5 —	0,0
9.4	13,5	11,7	9,3	6,5 —	3,3	0,0
9.5	17,9	15,6	12,6	8,6	4,6	0,0
9.6	23,8	21,2	17,4	12,4	6,5	0,0
9.7	31,3	29,3	24,8	18,3	9,8	0,0
9.8	43,2	41,3	36,9	28,9	16,3	0,0
9.9	57,8	58,4	56,6	50,1	33,3	0,0
0.0	75,0	80,0	85,0	90,0	95,0	100,0
0.1	92,2	101,6	113,4	129,9	156,7	200,0
0.2	106,8	118,7	133,1	151,1	173,7	200,0
0.3	118,7	130,7	145,2	161,7	180,2	200,0
0.4	126,2	138,8	152,6	167,6	183,5 —	200,0
0.5	132,1	144,4	157,4	171,4	185,4	200,0
0.6	136,5 —	148,3	160,7	173,5	186,7	200,0
0.7	139,6	151,2	163,0	175,2	187,5	200,0
0.8	142,0	153,2	164,7	176,3	188,1	200,0
0.9	143,8	154,8	165,9	177,2	188,6	200,0
1.0	145,2	155,9	166,8	177,8	188,9	200,0
1.1	146,2	156,8	167,5	178,3	189,1	200,0
1.2	147,0	157,5	168,1	178,7	189,3	200,0
1.3	147,7	158,0	168,5 —	179,0	189,5 —	200,0
1.4	148,2	158,5 —	168,8	179,2	189,6	200,0
1.5	148,5	158,8	169,1	179,4	189,7	200,0
1.6	148,8	159,0	169,3	179,5 —	189,7	200,0
1.7	149,1	159,2	169,4	179,6	189,8	200,0
1.8	149,3	159,4	169,5	179,7	189,8	200,0
1.9	149,4	159,5	169,6	179,7	189,9	200,0
2.0	149,5	159,6	169,7	179,8	189,9	200,0

III.

Das Verhalten der Steiner'schen, Cayley'schen und anderer covarianter Curven in singulären Punkten der Grundcurve.

Von

Dr. E. Wölffing

in Stuttgart.

Während die Untersuchung des Verhaltens der Hesse'schen Curve in singulären Punkten der Grundcurve in bekannter Weise durch directe Aufstellung der Gleichung dieser Curve vermittelst Ausrechnung einer Determinante erfolgt, kann das Verhalten der Steiner'schen Curve in singulären Punkten der Grundcurve, oder präciser ausgedrückt: der Einfluss solcher Punkte auf das Verhalten der Steiner'schen Curve nicht in derselben Weise direct ermittelt werden. Denn die Aufstellung der Gleichung der Steiner'schen Curve erfordert, wenn n die Ordnung der Grundcurve ist, die Elimination der (ternären) Veränderlichen aus drei Gleichungen $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung; eine Aufgabe, deren Resultat schon im Falle der Curven vierter Ordnung kaum mehr zu übersehen ist. Dazu kommt, dass das Eliminationsresultat seiner Form nach von der Ordnung der Grundcurve abhängig ist und allgemein für Curven n^{ter} Ordnung gar nicht gebildet werden kann.

Dem gegenüber mag es von Interesse sein, dass es eine ganz elementare Methode giebt, um den Einfluss singulärer Punkte der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen Curve aufzufinden. Ehe ich zur Entwickelung derselben übergehe, möchte ich noch auf einige besondere Vorzüge derselben aufmerksam machen. Zunächst ist die Methode von der Ordnung der Grundcurve vollständig unabhängig. Ferner bedarf es nur geringer Weiterbildungen der Methode, um auch die Cayley'sche und andere covariante Curven in den Bereich der Untersuchung zu ziehen. Endlich bietet die Methode die Möglichkeit, ein genaues Bild vom Verlauf der Hesse'schen, Steiner'schen, Cayley-schen und der anderen covarianten Curven in der Umgebung des singulären Punktes zu entwerfen und die zusammengehörigen Zweige der einzelnen Curven zu übersehen. (Ja, man kann sogar die relative Geschwindig-

keit bestimmen, mit welcher die zusammengehörigen Punkte auf den verschiedenen covarianten Curven durch den singulären Punkt hindurchgehen.)

Erwähnt sei noch, dass zahlreiche Proben, die sich im Verlaufe der Rechnung ergeben, den Resultaten eine hohe Sicherheit gegen Rechnungsfehler verleihen.

1. Die Gleichung der Grundcurve habe die Form:

$$1)\quad \begin{cases} 0 = F = \quad a \\ \quad + bx + cy \\ \quad + dx^2 + exy + fy^2 \\ \quad + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3 \\ \quad + lx^4 + mx^3y + px^2y^2 + qxy^3 + ry^4 \\ \quad + sx^5 + tx^4y + ux^3y^2 + vx^2y^3 + wxy^4 + \alpha y^5 \\ + \cdots \end{cases}$$

Der singuläre Punkt liege im Nullpunkt.

Man stellt nun die Gleichung der Hesse'schen Curve auf, indem man die niedrigsten Glieder derselben in x und y, soweit man dieselben braucht, berechnet. Dann trennt man die einzelnen Zweige der Hesse'schen Curve vermittelst des Newton'schen Parallelogramms (cf. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 330 flg.) und entwickelt nun zunächst für einen dieser Zweige beide Coordinaten rational als Functionen eines (unendlich klein zu denkenden) Parameters ε. Ist z. B. der Zweig ein r-facher und $y = 0$ Tangente, so setzt man am Besten $x = \varepsilon^r$, worauf sich y als Reihe von ganzen, steigenden Potenzen von ε ergiebt. Alsdann ist (x, y) ein Punkt der Hesse'schen Curve in der Umgebung des singulären Punktes. Nun bestehen zwischen einem Punkte $(x, y, z = 1)$ der Hesse-schen Curve und dem zugehörigen $(\xi, \eta, \zeta = 1)$ der Steiner'schen Curve die Beziehungen:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\xi + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\eta + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\zeta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\xi + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\eta + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\zeta = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\xi + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\eta + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\zeta = 0. \end{cases}$$

Setzt man in zwei dieser Gleichungen für x und y ihre Werthe in ε ein, so erhält man hieraus ξ und η ebenfalls in ε ausgedrückt, also den zum Punkt (x, y) der Hesse'schen Curve gehörigen Punkt (ξ, η) der Steiner'schen Curve. Die gefundenen Werthe x, y, ξ, η müssen zusammen die dritte Gleichung 2) identisch in ε befriedigen (I. Probe).

Die für (ξ, η) gewonnene Parameterdarstellung lässt die Lage des Punktes (ξ, η) und damit das Verhalten der Steiner'schen Curve in der Nähe des singulären Punktes und in diesem selbst um so genauer erkennen,

je mehr Glieder in ε man berücksichtigt. Die nämliche Rechnung ist alsdann auch für die übrigen Zweige der Hesse'schen Curve durchzuführen und man erhält so die übrigen zugehörigen Punkte der Steiner'schen Curve.

2. Die Cayley'sche Curve wird umhüllt von den Verbindungslinien der Punkte der Hesse'schen Curve mit den zugehörigen der Steiner-schen Curve. Die homogenen Coordinaten ($\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w} = 1$) der zum Parameter ε gehörigen Tangente derselben verhalten sich daher wie die Determinanten der Matrix

$$3)\qquad \begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{Vmatrix}.$$

Als II. Probe hat man die Identitäten:

$$\left\{ \begin{matrix} \dot{u}x + \dot{v}y + \dot{w} \equiv 0 \\ \dot{u}\xi + \dot{v}\eta + \dot{w} \equiv 0 \end{matrix} \right\}.$$

Die Grössen $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ wären bereits zur Erkennung der Singularität der Cayley'schen Curve genügend; zur bequemeren Vergleichung mit der Hesse'schen und Steiner'schen Curve aber empfiehlt es sich, von den Liniencoordinaten zu Punktcoordinaten überzugehen, indem man den Berührungspunkt der Tangente ($\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$) sucht. Die Coordinaten ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z} = 1$) desselben verhalten sich wie die Determinanten der Matrix

$$4)\qquad \begin{Vmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \\ \frac{d\dot{u}}{d\varepsilon} & \frac{d\dot{v}}{d\varepsilon} & \frac{d\dot{w}}{d\varepsilon} \end{Vmatrix},$$

wobei die Identität

$$\dot{u}\dot{x} + \dot{v}\dot{y} + \dot{w} \equiv 0$$

eine III. Probe liefert.

3. Es existirt aber noch eine zweite Möglichkeit, den zum Punkt (x, y) der Hesse'schen Curve gehörigen Punkt (ξ, η) der Steiner'schen Curve zu berechnen. Bekanntlich (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 365; Salmon-Fiedler, Höhere Curven 2. Aufl. S. 461) wird die Steiner'sche Curve umhüllt von den linearen Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve. Die Coordinaten (ϱ, σ, $\tau = 1$) der zu (x, y) gehörigen Tangente der Steiner'schen Curve verhalten sich daher wie die Grössen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$; die Coordinaten des Berührungspunktes (ξ, η, $\zeta = 1$) verhalten sich wie die Determinanten der Matrix

$$5)\qquad \begin{Vmatrix} \varrho & \sigma & \tau \\ \frac{d\varrho}{d\varepsilon} & \frac{d\sigma}{d\varepsilon} & \frac{d\tau}{d\varepsilon} \end{Vmatrix}.$$

Diese Werthe müssen mit den oben für (ξ, η, $\zeta = 1$) gefundenen übereinstimmen (IV. Probe).

Das Verfahren selbst steht meistens dem oben mitgetheilten an Einfachheit nach, doch giebt es Fälle, wo es immerhin auch gute Dienste leistet.

4. Bei Salmon-Fiedler (Höhere Curven S. 195) wird darauf aufmerksam gemacht, dass bei Curven dritter Ordnung die Cayley'sche Curve auch definirt werden kann als Umhüllungslinie der Geradenpaare, in welche die conischen Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve zerfallen, dass aber bei höheren Curven die so definirte Curve von der Cayley'schen verschieden sei. Ich werde mir erlauben, die Umhüllung der in Geradenpaare zerfallenden conischen Polaren als Salmon'sche Curve zu bezeichnen. Um auch ihr Verhalten im singulären Punkte festzustellen, empfiehlt es sich, die beiden Geraden des Paares zu trennen und das geschieht am einfachsten folgendermassen:

Die Gleichung des Geradenpaares ist

$$6)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}x'z'+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}y'z'+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}z'^2=0,$$

wo x', y', $z'=1$ laufende Coordinaten sind.

Die beiden Schnittpunkte mit $z'=0$ (also die beiden unendlich fernen Punkte) sind gegeben durch

$$7)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2=0.$$

Diese beiden Punkte werden getrennt durch Auflösung der in $(x':y')$ quadratischen Gleichung 7). Man hat jeden von beiden nur mit (ξ, η) zu verbinden — der Mittelpunkt des Geradenpaares ist ja der zu (x, y) gehörige Punkt der Steiner'schen Curve —, um die zwei zum Parameter ε gehörigen Tangenten der Salmon'schen Curve zu finden; die Coordinaten derselben seien resp. $(\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1=1)$ und $(\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2=1)$. Sind $x'_1:y'_1$ und $x'_2:y'_2$ die Wurzeln der Gleichung 7), so verhalten sich $\bar{u}_i:\bar{v}_i:\bar{w}$ wie die Determinanten der Matrix

$$8)\qquad \begin{Vmatrix} x'_i & y'_i & 0 \\ \xi & \eta & 1 \end{Vmatrix},$$

wo $i=1, 2$.

Dabei ergiebt sich als V. Probe, dass

$$(\bar{u}_1x'+\bar{v}_1y'+\bar{w}_1z')(\bar{u}_2x'+\bar{v}_2y'+\bar{w}_2z')$$

proportional zur linken Seite von 6) sein muss.

Für die Berührungspunkte auf der Salmon'schen Curve hat man

$$9)\qquad \bar{x}_i:\bar{y}_i:1=\begin{Vmatrix} \bar{u}_i & \bar{v}_i & \bar{w}_i \\ \dfrac{d\bar{u}_i}{d\varepsilon} & \dfrac{d\bar{v}_i}{d\varepsilon} & \dfrac{d\bar{w}_i}{d\varepsilon} \end{Vmatrix}$$

mit der VI. Probe:

$$\bar{u}_i\bar{x}_i+\bar{v}_i\bar{y}_i+\bar{w}_i=0,$$

wo $i=1, 2$.

5. Bei Clebsch-Lindemann (Vorlesungen über Geometrie I S. 360) ist ferner eine Curve erwähnt, die umhüllt wird von den Tangentenpaaren, welche die ersten Polaren der Punkte der Steiner'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve in ihren Doppelpunkten besitzen (letztere sind Punkte der Hesse'schen Curve). Die Ordnung dieser Curve ist von Zeuthen bestimmt worden, weshalb ich die Curve als Zeuthen'sche Curve citiren werde. Auch sie ist für Curven dritter Ordnung mit der Cayley'schen identisch, für höhere Curven von ihr verschieden.

Die erste Polare eines Punktes (ξ, η) der Steiner'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve hat die Gleichung:

$$\text{10)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x'}\xi + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta + \frac{\partial F}{\partial z'}\zeta = 0,$$

wo wieder $(x', y', z' = 1)$ laufende Coordinaten sind.

Das Tangentenpaar im Doppelpunkte erhält man, wenn man von der Curve 10) die $n - 3^{\text{te}}$ (also conische) Polare in Bezug auf den Doppelpunkt (x, y) nimmt; dasselbe ist daher:

$$\text{11)} \quad \left| \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\xi + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\eta + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z}\zeta\right)x'^2 \\ &+ 2\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\xi + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\eta + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z}\zeta\right)x'y' + \cdots = 0. \end{aligned} \right.$$

Dieses Geradenpaar wird nun genau ebenso behandelt, wie das Geradenpaar 6) — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass sein Mittelpunkt der Punkt (x, y) ist — und man erhält somit zuerst die Tangenten $(\bar{\bar{u}}_i, \bar{\bar{v}}_i, \bar{\bar{w}}_i = 1)$, und alsdann die Punkte $(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{z}}_i = 1)$ der Zeuthen-schen Curve, welche zum Parameter ε gehören $(i = 1, 2)$.

6. Eine sechste covariante Curve wird beschrieben von dem Schnittpunkte je zweier zusammengehörigen Tangenten der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve. Ich will dieselbe Gegencurve der Cayley-schen Curve nennen. Für Curven dritter Ordnung fällt sie gleichfalls mit der Cayley'schen Curve zusammen und ist für höhere Curven von ihr verschieden. Man erhält den zum Parameter ε gehörigen Punkt derselben in der Form:

$$\text{12)} \qquad x^* : y^* : z^* = \left\| \begin{matrix} u & v & w \\ \varrho & \sigma & \tau \end{matrix} \right\|,$$

wo ϱ, σ, τ dieselbe Bedeutung haben, wie in der Matrix 5), während u, v, w die Determinanten der Matrix

$$\text{13)} \qquad \left\| \begin{matrix} x & y & 1 \\ \dfrac{dx}{d\varepsilon} & \dfrac{dy}{d\varepsilon} & 0 \end{matrix} \right\|$$

sind.

7. Die Anwendung der vorstehenden Formeln soll nun am Beispiel der Spitze (Rückkehrpunkt) gezeigt werden.

Ist (0, 0) eine Spitze und $y = 0$ Spitzentangente, so ist in Gleichung 1):

$$a = b = c = d = e = 0.$$

Die Hesse'sche Curve hat nun bekanntlich in (0, 0) eine Spitze mit Tangente $y = 0$ und einen durchgehenden Zweig. Lediglich zur Vereinfachung der Rechnung wähle ich den speciellen Fall, dass dieser durchgehende Zweig senkrecht zur Spitzentangente steht, also die Achse $x = 0$ berührt. Hieraus ergiebt sich noch, dass $h = 0$ ist. Dass die nachstehenden Resultate auch für den Fall gelten, wo beide Zweige einen anderen Winkel mit einander einschliessen, folgt daraus, dass alle diese Resultate projectivischer Natur sind. Für die Parameterdarstellung sollen zwei Glieder als genügend betrachtet werden.

Der erste Zweig der Hesse'schen Curve, die Spitze, ergiebt folgende Entwickelung:

$$x = -\varepsilon^2,$$
$$y = \lambda\varepsilon^3 - \left(\frac{1}{2(n-2)}\frac{i}{f} - \frac{1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5 + \cdots,$$

wo

$$\lambda = \sqrt{\frac{(n-3)g}{2(n-2)f}}.$$

(Haben f und g verschiedene Zeichen, so muss $x = \varepsilon^2$ und $\lambda = \sqrt{\frac{-(n-3)g}{2(n-2)f}}$ gesetzt werden.)

Die Coordinaten der Steiner'schen Curve verhalten sich nun wie die Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} -6g\varepsilon^2 + 12l\varepsilon^4 + \cdots & 2i\lambda\varepsilon^3 + 6m\varepsilon^4 + \cdots \\ 3(n-3)g\varepsilon^4 + ([n-3]i\lambda^2 - 4[n-4]l)\varepsilon^6 + \cdots & \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 2i\lambda\varepsilon^3 + 6m\varepsilon^4 + \cdots & 2f - 2i\varepsilon^2 + \cdots \\ 2(n-2)f\lambda\varepsilon^3 - \left((2n-5)i - \frac{2(n-2)}{n-3}\frac{fl}{g}\right)\lambda\varepsilon^5 + \cdots & \end{matrix} \right\|,$$

also:

$$\xi : \eta : 1 = -6(n-3)fg\varepsilon^4 + \left(\frac{(n-3)(7n-13)}{n-2}gi + 8(n-4)fl\right)\varepsilon^6 + \cdots$$
$$: 12(n-2)fg\lambda\varepsilon^5 - \left(6(n-2)gi + \frac{12(n-2)(2n-7)}{n-3}fl\right)\varepsilon^7 + \cdots$$
$$: -12fg\varepsilon^2\left(1 - \left[\frac{i}{f} + \frac{2l}{g}\right]\varepsilon^2 + \cdots\right).$$

Die im letzten Glied auftretende Reihe $\left(1 - \left[\frac{i}{f} + \frac{2l}{g}\right]\varepsilon^2 + \cdots\right)$ käme in den Nenner von ξ und η zu stehen und wird daher auf Grund der Formel

$$\frac{1}{1+p} = 1 - p + p^2 - p^3 + - \cdots$$

in den Zähler gebracht.

Es ist daher:

$$\xi=\left(\frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2-\left[\frac{(n-3)(7n-13)}{12(n-2)}\frac{i}{f}+\frac{2}{3}(n-4)\frac{l}{g}\right]\varepsilon^4+\cdots\right)\left(1+\left[\frac{i}{f}+\frac{2l}{g}\right]\varepsilon^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2-\left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}(n-1)\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots,$$

ebenso:

$$\eta=-(n-2)\lambda\varepsilon^3-\left(\frac{1}{2}(n-2)\frac{i}{f}+\frac{n-2}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots$$

$$\text{Probe I):}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2-\left[\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}(n-1)\frac{l}{g}\right]\varepsilon^4+\cdots\right)\\ \quad\times\left(3(n-3)g\varepsilon^4+[(n-3)i\lambda^2-4(n-4)l]\varepsilon^6+\cdots\right)\\ +\left(-(n-2)\lambda\varepsilon^3-\left[\frac{1}{2}(n-2)\frac{i}{f}+\frac{n-2}{n-3}\frac{l}{g}\right]\lambda\varepsilon^5+\cdots\right)\\ \quad\times\left(2(n-2)f\lambda\varepsilon^3-\left[(2n-5)i-\frac{2(n-2)}{n-3}\frac{fl}{g}\right]\lambda\varepsilon^5+\cdots\right)\\ +\frac{1}{2}(n-3)(n-5)g\varepsilon^6-\left((n-3)^2i\lambda^2-(n^2-8n+17)l\right)\varepsilon^8+\cdots=0.\end{array}\right.$$

Selbstverständlich können in diesem Ausdruck, soweit er dasteht, nur die Coefficienten von ε^6 und ε^8 verschwinden, weil nur zwei Glieder berücksichtigt sind.

Cayley'sche Curve.

Die Matrix

$$\left\|\begin{array}{ll}-\varepsilon^2 & \lambda\varepsilon^3-\left(\frac{1}{2(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots\ 1\\ \frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2-\left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}(n-1)\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots & \\ \quad -(n-2)\lambda\varepsilon^3-\left(\frac{1}{2}(n-2)\frac{i}{f}+\frac{n-2}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots\ 1 & \end{array}\right\|$$

liefert:

$$\dot u:\dot v:\dot w=(n-1)\lambda\varepsilon^3+\left(\frac{(n-1)(n-3)}{2(n-2)}\frac{i}{f}+\frac{n-1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots$$

$$:\frac{1}{2}(n-1)\varepsilon^2-\left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}(n-1)\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots$$

$$:\frac{1}{2}(n-1)\lambda\varepsilon^5+\left(\frac{(n-1)(7n-18)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{(n-1)(2n-9)}{6(n-3)}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^7+\cdots,$$

beide Proben II) stimmen.

Die Coordinaten des zugehörigen Punktes auf der Cayley'schen Curve verhalten sich wie die Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda\varepsilon^3+\left(\frac{n-3}{2(n-2)}\frac{i}{f}+\frac{1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots & \frac{1}{2}\varepsilon^2-\left(\frac{n-3}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots \\ \frac{1}{2}\lambda\varepsilon^5+\left(\frac{7n-18}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{2n-9}{6(n-3)}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^7+\cdots & \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 3\lambda\varepsilon^2+5\left(\frac{n-3}{2(n-2)}\frac{i}{f}+\frac{1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^4+\cdots & \varepsilon-4\left(\frac{n-3}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}\frac{l}{g}\right)\varepsilon^3+\cdots \\ \frac{5}{2}\lambda\varepsilon^4+7\left(\frac{7n-18}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{2n-9}{6(n-3)}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^6+\cdots & \end{matrix} \right\|.$$

Es ergeben sich:

$$\dot{x}=-\frac{3}{2}\varepsilon^2-\left(\frac{4n+3}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{n+3}{3(n-3)}\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots,$$

$$\dot{y}=2\lambda\varepsilon^3+\frac{2}{3}(2n-3)\left(\frac{1}{n-2}\frac{i}{f}-\frac{1}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots,$$

Probe III stimmt.

Das unter 3. auseinandergesetzte Verfahren giebt die homogenen Coordinaten der Punkte der Steiner'schen Curve als Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 3g\varepsilon^4+\left(\frac{n-3}{2(n-2)}\frac{gi}{f}-4l\right)\varepsilon^6+\cdots & 2f\lambda\varepsilon^3-\left(\frac{2n-3}{n-2}i-\frac{2}{n-3}\frac{fl}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots \\ -\frac{n-3}{2}g\varepsilon^6-\left(\frac{n-3}{2}\frac{gi}{f}-(n-3)l\right)\varepsilon^8+\cdots & \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 12g\varepsilon^3+6\left(\frac{n-3}{2(n-2)}\frac{gi}{f}-4l\right)\varepsilon^5+\cdots & 6f\lambda\varepsilon^2-5\left(\frac{2n-3}{n-2}i-\frac{2}{n-3}\frac{fl}{g}\right)\lambda\varepsilon^4+\cdots \\ -3(n-3)g\varepsilon^5-8\left(\frac{n-3}{2}\frac{gi}{f}-(n-3)l\right)\varepsilon^7+\cdots & \end{matrix} \right\|$$

dieselben stimmen mit den früher gefundenen Werthen überein (Probe IV).

Salmon'sche Curve.

Die beiden unendlich fernen Punkte des zum Parameter ε gehörigen zerfallenden Kegelschnittes sind gegeben durch:

$$(-6g\varepsilon^2+12l\varepsilon^4+\cdots)x'^2+2(2i\lambda\varepsilon^3+6m\varepsilon^4+\cdots)x'y'+(2f-2i\varepsilon^2+\cdots)y'^2=0.$$

Mit

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{6(n-2)}{n-3}}$$

folgt hieraus:

$$\left\| \begin{matrix} 2\mu f\lambda\varepsilon-\left((\mu+2)i+2\mu\frac{fl}{g}\right)\lambda\varepsilon^3+\cdots & \\ -6g\varepsilon^2+12l\varepsilon^4+\cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\bar{u}:\bar{v}:\bar{w}=\left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}(n-3)\varepsilon^2-\left(\frac{(n-1)(n-3)}{12(n-2)}\frac{i}{f}-\frac{1}{3}(n-1)\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4+\cdots & \\ -(n-2)\lambda\varepsilon^3-\left(\frac{1}{2}(n-2)\frac{i}{f}+\frac{n-2}{n-3}\frac{l}{g}\right)\lambda\varepsilon^5+\cdots & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$=-6g\varepsilon^2+12l\varepsilon^4+\cdots$$

$$:-2\mu f\lambda\varepsilon+\left((\mu+2)i+2\mu\frac{fl}{g}\right)\lambda\varepsilon^3\cdots$$

$$:-(n-3)(\mu-3)g\varepsilon^4+\left(\frac{(n-3)^2}{2(n-2)}\frac{gi}{f}+(n-4)(\mu-4)l\right)\varepsilon^6+\cdots$$

Bei der Probe V) ergiebt sich, dass man den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} x' y' + \cdots$$

mit $-6g\varepsilon^2 + 12l\varepsilon^4 + \cdots$ multipliciren muss, um das Produkt

$$(\bar{u}_1 x' + \bar{v}_1 y' + \bar{w}_1 z')(\bar{u}_2 x' + \bar{v}_2 y' + \bar{w}_2 z')$$

zu erhalten, wo sich die Indices auf das Doppelzeichen von μ beziehen, welches die beiden Zweige der Salmon'schen Curve unterscheidet.

Die Berührungspunkte der Salmon'schen Curve werden nun:

$$\begin{cases} \bar{x} = -\frac{1}{2}(n-3)(\mu-3)\varepsilon^2 \\ + \left(\frac{(n-3)(4\mu+n-7)}{12(n-2)}\frac{i}{f} + \frac{-(9n-22)\mu + (22n-46)}{6}\frac{l}{g}\right)\varepsilon^4 + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{} = \big(-(n-3)\mu + 2(n-2)\big)\lambda\varepsilon^3 \\ -\left[\left(\frac{(n-3)(n-4)}{6(n-2)}\mu + 1\right)\frac{i}{f} + \left(\frac{1}{3}(7n-13)\mu - 2\frac{(n-2)(3n-7)}{n-3}\right)\frac{l}{g}\right]\lambda\varepsilon^5 + \cdots \end{cases}$$

Bei der Berechnung der Zeuthen'schen Curve möge in den Entwickelungen je nur ein Glied berücksichtigt werden.

Die Gleichung 11) wird mit $z' = 0$:

$$[6g\xi + 6(n-3)gx + \cdots]x'^2 + 2[2i\eta + 2(n-3)iy + \cdots]x'y' + [2(n-2)f + \cdots]y'^2 = 0,$$

oder

$$[-3(n-3)g\varepsilon^2 + \cdots]x'^2 + [-4i\lambda\varepsilon^3 + \cdots]x'y' + [2(n-2)f + \cdots]y'^2.$$

Dann ist:

$$\bar{\bar{u}} : \bar{\bar{v}} : \bar{\bar{w}} = \left\| \begin{matrix} \pm 2\sqrt{3}(n-2)f\lambda\varepsilon + \cdots & -3(n-3)g\varepsilon^2 + \cdots & 0 \\ -\varepsilon^2 & \lambda\varepsilon^3 + \cdots & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$= -3(n-3)g\varepsilon^2 + \cdots : \mp 2\sqrt{3}(n-2)f\lambda\varepsilon + \cdots : -(n-3)(3 \mp \sqrt{3})g\varepsilon^4 + \cdots$$

daher:

$$\bar{\bar{x}} = -(3 \mp \sqrt{3})\varepsilon^2 + \cdots,$$

$$\bar{\bar{y}} = 2(\mp\sqrt{3} - 1)\lambda\varepsilon^3 + \cdots$$

Auch bei der Gegencurve der Cayley'schen Curve möge nur ein Glied in Betracht gezogen werden.

Dann ist: $u : v : w = -3\lambda\varepsilon^2 + \cdots : -2\varepsilon : -\lambda\varepsilon^4 + \cdots,$

also:

$$x^* : y^* : 1 = \left\| \begin{matrix} -3\lambda\varepsilon^2 + \cdots & -2\varepsilon & -\lambda\varepsilon^4 + \cdots \\ 3g\varepsilon^4 + \cdots & 2f\lambda\varepsilon^3 + \cdots & -\frac{n-3}{2}g\varepsilon^6 + \cdots \end{matrix} \right\|$$

$$x^* = \frac{n-3}{3}\varepsilon^2 + \cdots$$

$$y^* = -\frac{1}{2}(n-2)\lambda\varepsilon^3 + \cdots$$

8. Die Entwickelung des zweiten (durchgehenden) Zweiges der Hesse-schen Curve ergiebt:

$$y = \varepsilon$$
$$x = \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3 + \cdots,$$

wo

$$\alpha = \frac{1}{6}\frac{n-3}{n-2}\frac{i^2}{fg} - \frac{1}{3}\frac{p}{g},$$

$$\beta = -\frac{1}{6}\frac{(n-3)(n-4)}{(n-2)^2}\frac{i^2 k}{f^2 g} + \frac{1}{3}\frac{mp}{g^2} - \frac{1}{6}\frac{n-3}{n-2}\frac{i^2 m}{fg^2} - \frac{1}{3}\frac{v}{g} + \frac{1}{3}\frac{n-4}{n-2}\frac{iq}{fg}.$$

Mit Berührung der zweiten und dritten Gleichung 2) ergiebt sich der Punkt der Steiner'schen Curve:

$$\xi = -(n-2)\frac{f}{i} - 2\gamma\frac{f}{i}\varepsilon + \cdots,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 \cdots,$$

wo

$$\gamma = (n-3)\frac{k}{f} - (n-2)\frac{q}{i}.$$

Für die Cayley'sche Curve wird:

$$\dot{u} : \dot{v} : \dot{w} = \varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + \cdots : -(n-2)\frac{f}{i} - 2\gamma\frac{f}{i}\varepsilon + \cdots : (n-2)\frac{f}{i}\varepsilon - 2\gamma\frac{f}{i}\varepsilon^2 + \cdots,$$

daher:

$$\dot{x} = -(n-2)\frac{f}{i} - (n+2)\gamma\frac{f}{i}\varepsilon + \cdots,$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2}(n+2)\gamma\frac{f}{i}\varepsilon^2 + \cdots$$

Für die Salmon'sche Curve bekommt man:

$$\bar{u} : \bar{v} : 1 = (\nu-2)i\varepsilon + \left(-\frac{(n-3)}{(n-2)}\nu\frac{ik}{f} + (2\nu-3)q\right)\varepsilon^2 + \cdots$$
$$: -2f - 6k\varepsilon + \cdots$$
$$: (n-2)(\nu-2)f\varepsilon + (\nu-3)(n-3)k\varepsilon^2 + \cdots,$$

wo

$$\nu = \pm\sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}},$$

daher:

$$\bar{x} = -(n-2)\frac{f}{i} - 2\frac{(2\nu-3)}{\nu-2}\gamma\frac{f}{i}\varepsilon + \cdots,$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}(2\nu-3)\gamma\varepsilon^2 + \cdots$$

Die Berechnung der Zeuthen'schen Curve ergiebt:

$$\bar{\bar{u}} : \bar{\bar{v}} : \bar{\bar{w}} = -6(n-2)\frac{fg}{i} + \cdots : -2\varrho f\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots : 6(n-2)\frac{fg}{i}\varepsilon + \cdots,$$

wo

$$\varrho = \pm\sqrt{\frac{3(n-2)g\gamma}{i}},$$

also:

$$\bar{\bar{x}} = -\varepsilon + \cdots,$$

$$\bar{\bar{y}} = +6(n-2)\frac{g}{\varrho i}\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

Endlich findet man für die Gegencurve der Cayley'schen Curve:

$$x^* = -(n-1)\alpha\varepsilon^2 + \left(\frac{n}{2}\alpha\frac{k}{f} - \frac{1}{2}(3n-2)\beta\right)\varepsilon^3 + \cdots,$$

$$y^* = -\frac{n-2}{2}\varepsilon + \frac{n}{4}\frac{k}{f}\varepsilon^2 + \cdots$$

9. Das Verhalten der covarianten Curven möge in folgenden Sätzen zusammengefasst werden:

Wenn die Grundcurve im Punkte A eine Spitze mit Tangente a hat, so hat:

a) die Hesse'sche Curve in A ebenfalls eine Spitze mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b;

b) die Steiner'sche Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und berührt a in einem weiteren Punkte B;

c) die Cayley'sche Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und berührt a ebenfalls im Punkte B;

d) die Salmon'sche Curve hat in A zwei Spitzen, beide mit Tangente a und in B einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) mit Tangente a;

e) die Zeuthen'sche Curve hat in A zwei Spitzen mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b;

f) die Gegencurve der Cayley'schen Curve hat in A eine Spitze mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b.

Hierbei ist jedoch zu bemerken:

Bei der Salmon'schen Curve treten merkwürdiger Weise Ausnahmen von der unter d) gegebenen Regel ein, wenn die Grundcurve von der fünften oder zehnten Ordnung ist. Bei der Ordnung 5 verwandelt sich die eine der beiden Spitzen in einen „Rückkehrspitzpunkt“ [cf. unten 14k)]. Bei der Ordnung 10 tritt dagegen an die Stelle des Berührungsknotens eine Singularität, bestehend aus einer Spitze in B mit Tangente a und einem gewöhnlichen Zweig in B, ebenfalls mit Tangente a.

Uebrigens ist bei Curven dritter Ordnung das Verhalten der meisten covarianten Curven ein abnormes: die Cayley'sche Curve fällt mit ihrer Gegencurve, der Salmon'schen und der Zeuthen'schen, zusammen und zerfällt in den doppeltzählenden Punkt A und noch einen weiteren Punkt (Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 592).

Aus den Entwickelungen für die Zweige der covarianten Curven ergeben sich noch folgende erwähnenswerthe Thatsachen:

Wenn sich zwei Zweige der covarianten Curven (beispielsweise der Zweig der Steiner'schen und derjenige der Cayley'schen Curve in B) berühren, so hängt das Verhältniss der Krümmungsradien, welches eine Invariante ist (cf. Zeitschrift für Mathematik u. Physik 38. Jahrg. S. 237), zwar im Allgemeinen von der Ordnung der Grundcurve ab, ist aber sonst von letzterer gänzlich unabhängig. Dasselbe gilt von dem Verhältniss der Spitzenparameter der in einem Punkte zusammenfallenden und die-

selbe Tangente besitzenden Spitzen (unter Parameter einer Spitze verstehe ich den Parameter einer die Curve in der Spitze siebenpunktig berührenden Neil'schen [semicubischen] Parabel).

Während ferner im Allgemeinen jede Gerade des Paares, welches die Salmon'sche oder Zeuthen'sche Curve umhüllt, für sich einen besonderen Zweig beschreibt, tritt im obigen Beispiel bei dem gewöhnlichen Zweige der Zeuthen'schen Curve eine Ausnahme ein. Dieser Zweig kommt nämlich zu Stande, indem jede Gerade des Paares eine Seite des Zweiges beschreibt; beide fallen dann in b zusammen und werden weiterhin imaginär.

Interessant ist auch in diesem Beispiele, wie sich die Cayley'sche und die Salmon'sche Curve an die Steiner'sche Curve anschliessen, während die Zeuthen'sche und die Gegencurve der Cayley'schen dem Verlauf der Hesse'schen Curve folgen.

10. Hat die Grundcurve in A einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c, so haben die Hesse'sche, die Steiner'sche, die Cayley'sche Curve und deren Gegencurve ebenfalls je einen Doppelpunkt in A mit Tangente b und c. Die Salmon'sche Curve hat in A ebenfalls einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c und berührt ausserdem noch b und c je in den Punkten B und C. Desgleichen hat die Zeuthen'sche Curve in A einen Doppelpunkt mit Tangenten b und c und berührt b und c je in denselben Punkten B und C. Die Verhältnisse der Krümmungsradien bei den sich berührenden Curven sind wieder von der Ordnung n der Grundcurve abhängig. Bei Clebsch-Lindemann (Vorlesungen über Geometrie I S. 325 Anmerkung) ist bereits darauf hingewiesen, dass die Zweige der Grundcurve und der Hesse'schen Curve im Doppelpunkte sich gegenseitig die convexe Seite zukehren: denn das Verhältniss ihrer Krümmungsradien ist negativ, nämlich gleich $-\frac{n-2}{n}$.

Zusatz:

Bei Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt zerfällt, wie bekannt (cf. Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 588) die Cayley'sche Curve in den Doppelpunkt und einen die Tangenten des letzteren in B und C berührenden Kegelschnitt. Unsere Entwickelungen zeigen noch besonders für diesen Fall, dass die Verbindungslinie der reellen zusammengehörigen Punkte in der Hesse'schen und Steiner'schen Curve nicht den ganzen Kegelschnitt umhüllt, sondern nur einen von den Berührungspunkten B und C begrenzten Bogen desselben, diesen aber doppelt.

11. Während mehreren Punkten der Hesse'schen Curve ein und derselbe Punkt der Steiner'schen entsprechen kann — letzterer ist eben dann ein mehrfacher Punkt in der Steiner'schen Curve —, kann umgekehrt ein Punkt der Hesse'schen Curve im Allgemeinen nicht auf mehrere Punkte der Steiner'schen Curve führen. Denn der Punkt $\left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ liegt auf der Hesse'schen Curve, wenn die drei Geraden:

$$14)\quad \begin{cases} 2d\xi + e\eta + (n-1)b = 0, \\ e\xi + 2f\eta + (n-1)c = 0, \\ b\xi + c\eta + (n-2)a = 0 \end{cases}$$

sich in einem Punkte treffen und im Allgemeinen wird das, wenn es überhaupt stattfindet, nur in einem Punkte geschehen. Indes können die drei Geraden 14) durch theilweises Zusammenfallen oder Illusorischwerden doch auch mehr als einen Schnittpunkt bekommen und gerade bei höheren Singularitäten der Grundcurve kann es geschehen, dass einem Punkt der Hesse'schen Curve mehrere Punkte der Steiner'schen entsprechen. Es wurde z. B. bereits gezeigt, dass, wenn die Grundcurve eine Spitze A hat, dem Punkte A der Hesse'schen Curve in der Steiner'schen die zwei Punkte A und B entsprechen (siehe oben Ziffer 9).

12. Während sich bekanntlich die Punkte der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve eindeutig entsprechen, tritt eine Ausnahme ein, wenn die Grundcurve eine Spitze A hat. Denn dem Punkte A als Punkt der Hesse'schen Curve entsprechen in der Steiner'schen Curve sämmtliche Punkte der Spitzentangente a und zwar tritt letztere doppeltzählend in der Gleichung der Steiner'schen Curve auf. Dagegen entspricht die Curve, welche durch Weglassung dieser Doppelgeraden entsteht, und welche als reducirte Steiner'sche Curve bezeichnet werden möge, wieder eindeutig der Hesse'schen Curve und man kann nunmehr die Plücker-schen Zahlen für die (reducirte) Steiner'sche Curve aufstellen, wenn die Grundcurve d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat.

Wegen Weglassung der Doppelgeraden wird

$$n_s = 3(n-2)^2 - 2r.$$

Das Geschlecht ist gleich dem der Hesse'schen Curve, also:

$$p_s = \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8) - d - 3r.$$

Für die Klasse kann man die Formel

$$k_s = 3(n-1)(n-2) - 2d - 4r$$

(Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I S. 671 Anmerkung) benützen, weil durch Weglassung der Doppelgeraden die Klasse nicht geändert wird.

Hieraus ergeben sich leicht die übrigen Zahlen:

$$d_s = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5) + d - 6(n^2-4n+2)r + 2r^2,$$

$$r_s = 12(n-2)(n-3) - 6r,$$

$$t_s = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8) - 2d(3n^2-9n+1) - 3r(4n^2-12n+1) + 2d^2 + 8dr + 8r^2,$$

$$w_s = 3(n-2)(4n-9) - 6d - 12r.$$

13. Hat die Grundcurve in A einen dreifachen Punkt, so entsprechen dem letzteren als einem Punkte der Hesse'schen Curve sämmtliche Punkte der Ebene als Punkte der Steiner'schen Curve, weil alle ersten Polaren in A einen Doppelpunkt haben. Als „Steiner'sche Curve" hat man in diesem Falle den Ort der Punkte anzusehen, deren erste Polaren je ausser A noch einen zweiten Doppelpunkt haben.

Hat nun die Grundcurve in A drei verschiedene Zweige mit den Tangenten b, c, d, so hat die Hesse'sche Curve in A einen fünffachen Punkt; drei Zweige berühren die Tangenten b, c, d, während zwei Zweige mit den Tangenten e und f hindurchgehen. Gerade so verhält sich auch die Steiner'sche Curve.

(Man kann aber auch nach dem Ort der Punkte fragen, deren erste Polaren in A je eine Spitze [und sonst keinen Doppelpunkt] haben. Man erhält in unserem Falle als Ortscurve ein Geradenpaar, bestehend aus den Tangenten e und f der Hesse'schen Curve.)

14. Nachstehend möge noch das Verhalten der Hesse'schen und der Steiner'schen Curve in einer Anzahl weiterer Singularitäten der Grundcurve mitgetheilt werden:

a) Die Grundcurve hat einen Wendepunkt A mit Tangente a. Die Hesse'sche Curve geht durch A mit Tangente b hindurch. Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B [cf. Clebsch-Lindemann a. a. O. S. 371] (auch die Cayley'sche Curve berührt a in demselben Punkte B). Darum muss auch bei Curven dritter Ordnung die Hesse'sche Curve, da sie die Stelle der Steiner'schen vertritt, die Wendetangenten berühren (Salmon, Höhere Curven S. 197).

b) Die Grundcurve hat einen Undulationspunkt (Flachpunkt) A mit Tangente a. Die Hesse'sche Curve berührt a in A. Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B und hat daselbst einen Wendepunkt.

c) Die Grundcurve hat in A einen Wendeflachpunkt (Reuschle, Praxis der Curvendiscussion I, Stuttgart 1886, S. 32) mit Tangente a, das heisst, ihre niedersten Glieder sind $cy + \cdots + sx^5 + \cdots$ (diese Singularität ist äquivalent mit drei Doppeltangenten und drei Wendepunkten). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Wendepunkt mit Tangente a. Die Steiner'sche Curve berührt a in einem Punkte B und hat daselbst einen Undulationspunkt.

d) Die Grundcurve hat einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) A mit Tangente a. Die Hesse'sche Curve hat in A einen dreifachen Selbstberührungspunkt mit Tangente a (das heisst, drei gewöhnliche Zweige berühren a in A). Die Steiner'sche Curve verhält sich ebenso.

e) Die Grundcurve hat einen symmetrischen Berührungsknoten in A mit Tangente a, das heisst, die Krümmungsradien der Zweige sind gleich und entgegengesetzt gerichtet. Die Hesse'sche Curve hat in A einen symmetrischen Berührungsknoten mit Tangente a und zwei durchgehende Zweige mit den Tangenten b und c (cf. Mathem. Annalen 36. Bd. S. 119). Die Steiner'sche Curve hat in A ebenfalls einen symmetrischen Berührungsknoten mit Tangente a und einen weiteren Berührungsknoten im Punkte B mit Tangente a.

f) Die Grundcurve hat in A einen Rückkehrflachpunkt (Reuschle, a. a. O. S. 49) mit Tangente a, das heisst, ihre niedersten Glieder sind $fy^2 + \cdots + sx^5 + \cdots$ (der singuläre Punkt ist äquivalent mit einem Doppelpunkte, einer Spitze, zwei Doppeltangenten und zwei Wendepunkten). Die Hesse'sche Curve hat alsdann in A einen Rückkehrflachpunkt mit Tangente a, einen berührenden Zweig mit Tangente a und einen durchgehenden Zweig mit Tangente b. Die Steiner'sche Curve hat ebenfalls einen Rückkehrflachpunkt in A mit Tangente a und berührt a noch in einem Punkte B (wo sie einen Wendepunkt hat) und in einem weiteren Punkte C (hier, wie im Folgenden sind die Zweige der Steiner'schen Curve in derselben Reihenfolge aufgezählt, wie die damit zusammengehörenden der Hesse'schen Curve).

g) Die Grundcurve hat in A eine Spitze mit Tangente a und einen durchgehenden Zweig mit Tangente b. Die Hesse'sche Curve hat in A zwei Spitzen, je mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig mit Tangente b. Die Steiner'sche Curve hat ebenfalls zwei Spitzen in A, je mit Tangente a und berührt b in B, wo sie einen Wendepunkt hat.

h) Die Grundcurve hat in A einen Spitzpunkt (Reuschle, a. a. O. S. 40) mit Tangente a, das heisst, ihre niedrigsten Glieder sind $ky^3 + lx^4 + \cdots$ (diese Singularität ist mit einem Doppelpunkt und zwei Spitzen äquivalent). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Spitzpunkt mit Tangente a, einen berührenden Zweig mit Tangente a und zwei durchgehende Zweige mit den Tangenten b und c. Die Steiner'sche Curve hat einen Spitzpunkt in A mit Tangente a, einen gewöhnlichen Zweig, der weder durch A geht, noch a berührt, und sie berührt a noch in zwei Punkten B und C.

i) Die Grundcurve hat in A einen Wendespitzpunkt (Reuschle a. a. O. S. 50) mit Tangente a, das heisst, die niedersten Glieder sind $ky^3 + \cdots + sx^5 + \cdots$ (der singuläre Punkt ist äquivalent mit zwei Doppelpunkten, zwei Spitzen, einer Doppeltangente und einem Wendepunkt). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Wendespitzpunkt mit Tangente a, eine Spitze mit Tangente a und einen

berührenden Zweig mit Tangente a. Die Steiner'sche Curve hat einen Wendespitzpunkt in A mit Tangente a, einen Wendepunkt in A mit Tangente a und einen gewöhnlichen Zweig, der weder durch A geht, noch a berührt.

k) Die Grundcurve hat in A einen Rückkehrspitzpunkt (cf. Reuschle a. a. O. S. 41) mit Tangente a, das heisst, die niedersten Glieder sind $ry^4 + sx^5 + \cdots$ (die Singularität ist äquivalent mit drei Doppelpunkten und drei Rückkehrpunkten). Die Hesse'sche Curve hat in A einen Rückkehrspitzpunkt mit Tangente a, eine Spitze mit Tangente a und drei durchgehende Zweige mit den Tangenten b, c, d. Die Steiner'sche Curve hat einen Rückkehrspitzpunkt in A mit Tangente a, einen durchgehenden Zweig in A mit einer Tangente e und berührt a noch in drei Punkten B, C und D.

15. Das im Vorhergehenden auseinander gesetzte Verfahren ermöglichte es, die Lage und Beschaffenheit der Zweige der Steiner'schen Curve zu bestimmen, welche dem singulären Punkte der Hesse'schen Curve entsprechen, welch' letzterer in den singulären Punkt der Grundcurve hineinfällt und demselben seinen Ursprung verdankt. Es erhebt sich nun aber die Frage, ob damit der Einfluss der Singularität der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen Curve erschöpft ist. Es wäre ja denkbar, dass die Gleichungen 2), wenn in ihnen $\left\{\begin{matrix}\xi = 0\\ \eta = 0\end{matrix}\right\}$ gesetzt wird, noch durch einen von $\left\{\begin{matrix}x = 0\\ y = 0\end{matrix}\right\}$ verschiedenen Punkt oder gar mehrere solche befriedigt würden. Es würde also noch ein weiterer Punkt der Hesse'schen Curve (oder mehrere) existiren, der zu einem durch den singulären Punkt gehenden Zweige der Steiner'sche Curve Anlass gäbe. Ein solcher Zweig wäre als accessorisch zu bezeichnen und ebenso würden wir einen Zweig zu nennen haben, welcher durch einen der etwa zum Punkte $\left\{\begin{matrix}x = 0\\ y = 0\end{matrix}\right\}$ der Hesse'schen Curve gehörigen nicht in $\left\{\begin{matrix}\xi = 0\\ \eta = 0\end{matrix}\right\}$ fallenden Punkte der Steiner'schen Curve hindurchgeht. Dass bei speciellen Grundcurven solche accessorischen Zweige vorkommen können, ist klar;* dagegen ist die Frage, ob sie bei allgemeinen Grundcurven zu erwarten sind, zwischen deren Coefficienten also, von der Singularität abgesehen, keine weiteren Relationen existiren, im Allgemeinen wohl zu verneinen. Indess ist nicht zu leugnen, dass bei gewissen Singularitäten in allgemeinen Grundcurven von einer

* Bei speciellen Grundcurven können auch sonst Abweichungen vom gewöhnlichen Verhalten der covarianten Curven eintreten. Verschwindet z. B. die Grösse γ in Ziffer 8, so haben im Punkte B die Steiner'sche und die Cayley'sche Curve je eine Spitze an Stelle eines gewöhnlichen Zweiges.

bestimmten Ordnung in der That accessorische Zweige in der Steiner-schen Curve regelmässig auftreten; ein Beispiel ist hierfür wenigstens der Wendepunkt bei den Curven dritter Ordnung. Durch ihn geht die Steiner'sche Curve accessorisch hindurch; denn der zugehörige Punkt der Hesse'schen Curve liegt nicht im Wendepunkte, sondern auf der Wendetangente im Berührungspunkte der Steiner'schen Curve (cf. Salmon, Höhere Curven S. 200). Es wäre immerhin denkbar, dass es für manche andere Singularitäten eine gewisse Ordnung der Grundcurve giebt, bei welcher solche accessorischen Zweige der Steiner'schen Curve auftreten. Dazu kommt aber die weitere Möglichkeit, dass infolge besonderer Umstände in der Steiner'sche Curve ausserhalb der bereits gefundenen Punkte ein singulärer Punkt auftritt, welcher einer in der Grundcurve befindlichen Singularität seine Entstehung verdankt, während der zugehörige Punkt der Hesse'schen Curve nicht in die genannte Singularität hereinfällt. Allgemein wird sich über diese Fragen nicht leicht etwas aussagen lassen, aber so viel ist sicher, dass die in vorliegender Abhandlung gegebene Methode hinreicht, um den wesentlichen Einfluss singulärer Punkte der Grundcurve auf das Verhalten der Steiner'schen und der anderen covarianten Curven zu ermitteln.

IV.

Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik.

Von

FRIEDRICH SCHUR

in Aachen.

Hierzu Tafel I, Figur 1—4.

Bekanntlich giebt die graphische Statik zu einer merkwürdigen Reciprocität ebener Figuren Veranlassung, bei welcher jeder Geraden der einen Figur eine ihr parallele der anderen entspricht. Nachdem Culmann vergeblich versucht hatte, diese Reciprocität als eine projective aufzufassen, gelang dies Maxwell dadurch, dass er die beiden Figuren als orthogonale Projectionen zweier räumlicher Figuren entstehen liess, welche einander in Beziehung auf ein Rotationsparaboloid polar sind, wobei allerdings die eine der beiden Figuren noch um einen rechten Winkel gedreht werden musste. Diese Drehung vermied Cremona* dadurch, dass er die Reciprocität in Beziehung auf ein Rotationsparaboloid durch diejenige in Bezug auf ein sogenanntes Nullsystem ersetzte. Obwohl der Zusammenhang der beiden ebenen Figuren gerade hierdurch in der glücklichsten Weise zum Ausdruck gebracht war, so konnte die strenge Entwickelung der Lehre vom Fachwerk insofern aus diesen Untersuchungen keinen Vortheil ziehen, als Cremona die Frage unbeantwortet liess, ob zwei gegebene reciproke Figuren der graphischen Statik sich stets als Projectionen zweier reciproker Figuren eines Nullsystems darstellen lassen. Auch in der späteren Literatur** hat, so viel dem Verfasser bekannt ist, diese naheliegende Frage nirgends eine Antwort gefunden. Der Verfasser will daher die Cremona'sche Untersuchung in diesem Sinne zum Abschlusse bringen, wobei sich zeigen wird, dass sich

* Siehe besonders Cremona: „Les figures réciproques en statique graphique trad. par Bossut", Paris 1885, woselbst man auch genauere Literaturangaben findet.

** Erst nachdem dieser Artikel dem Drucke übergeben war, erhielt der Verfasser Kenntniss der Abhandlung von G. Hauck: „Ueber die reciproken Figuren der graphischen Statik", Journal f. r. u. a. M. Bd. 100 S. 365 flg., in welcher die Lösung des entsprechenden Problems für die sogenannte Neumann'sche Projectionsart angedeutet ist (S. 388).

zu allen Fachwerken, soweit sich deren Mannigfaltigkeit übersehen lässt, Cremona'sche Kräftepläne mit Hilfe des Nullsystems construiren lassen. Des leichteren Verständnisses wegen knüpfen wir überall an bestimmte Beispiele an.

I. Wir erinnern zunächst an einige Sätze über das Nullsystem.* Wir werden dabei unseren Zielen entsprechend am besten von der statischen Definition desselben ausgehen. Ein beliebiges System von Kräften im Raume lässt sich bekanntlich entweder auf eine Einzelkraft oder auf ein Paar paralleler und entgegengesetzt gleicher Kräfte oder auf zwei windschiefe Kräfte g und k reduciren. Uns interessirt nur der letzte sogenannte allgemeine Fall. Von den Wirkungslinien der beiden Kräfte kann die eine ganz beliebig im Raume gewählt werden, wodurch beide der Lage und Grösse nach bestimmt sind. Schneiden sich nämlich g und g' in G, und ist K der Schnittpunkt von k mit der Ebene $[g, g']$, so zerlegen wir g in zwei Componenten g' und n nach g' und GK und suchen diejenige Kraft k' durch K, welche mit der in KG wirkenden Kraft $-n$ die Resultante k liefert; dann sind die Kräfte g' und k' offenbar den beiden gegebenen Kräften g und k äquivalent. Da g' nur in einer Ebene mit g zu liegen braucht, so kann man durch ihre Vermittelung zu jeder Wirkungslinie des Raumes kommen. Unsere Reduction würde allerdings dann absurd sein, wenn g' auch die Wirkungslinie k schneiden würde. Solche Linien heissen Nulllinien des Kräftesystems, weil dasselbe für jede solche Achse das Drehungsmoment Null liefert. Nennen wir zwei Geraden, die Wirkungslinien von zwei windschiefen das Kräftesystem ersetzenden Kräften sein können, conjugirt, so sind die Nulllinien diejenigen Geraden, welche zwei conjugirte gleichzeitig schneiden. Sie erfüllen den Raum in der Weise, dass die durch einen Punkt laufenden Nulllinien in einer Ebene liegen, der Nullebene des Punktes, und die in einer Ebene liegenden Nulllinien durch einen Punkt laufen, den Nullpunkt der Ebene; dreht sich die Nullebene um eine Gerade, so bewegt sich der Nullpunkt auf der conjugirten Geraden und umgekehrt. Da im Sinne des Rechnens mit Strecken einerseits $g = g' + n$ und andererseits $k = k' - n$, so sehen wir, dass g und k nach irgend einem gemeinsamen Angriffspunkte verschoben dieselbe Resultante liefern müssen wie g' und k' nach demselben Angriffspunkte verschoben. Nennen wir diese ausgezeichnete Richtung die Achsenrichtung des Kräfte- oder Nullsystems, so geht aus ihrer Definition hervor, dass je zwei conjugirte Geraden in der Achsenrichtung durch zwei parallele Ebenen projicirt werden. Bedenken wir nun noch, dass unsere Construction conjugirter Geraden, also auch der Nulllinien dasselbe Resultat liefern muss, wenn wir g und k ihrer Lage nach ungeändert lassen, sie aber in demselben Verhältnisse vergrössern oder verkleinern, so ist klar,

* S. l. c. Introduction par M. J. Jung.

dass ein Nullsystem durch ein Paar conjugirter Geraden und die Achsenrichtung vollkommen bestimmt ist, wobei die letztere natürlich so gewählt sein muss, dass die beiden Geraden nach ihrer Richtung durch zwei parallele Ebenen projicirt werden. Denn dann ist ja das Verhältniss der in g und k wirkenden Kräfte bekannt, also auch die zu jeder Geraden g' conjugirte Gerade k'.

Wollen wir z. B. die einer zu g parallelen Geraden g' conjugirte k' finden, so muss sie ja sicher durch den Schnittpunkt K von k mit der Ebene $[g, g']$ gehen. Geben wir dann der in g wirkenden Kraft beliebige Grösse und Sinn, wodurch auch die in k wirkende bestimmt ist, so zerlegen wir g in zwei Componenten nach g' und der dazu parallelen Geraden durch K; nun ist die Richtung von k' dadurch bestimmt, dass sie mit der in K angebrachten Componente g' die Resultante $g + k$ liefere. Schneidet g' die g in G, so ist k' einfacher bestimmt als Schnittlinie der Ebene $[Gk]$ mit der Ebene durch K, welche der Achsenrichtung und der g' parallel ist.

II. Wir beginnen nun mit der Betrachtung eines ganz einfachen Fachwerks, welches die Knoten P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 1) besitzt und aus den beiden Dreiseiten $P_1P_2P_4$ und $P_2P_3P_4$ besteht; in den Knoten mögen die mit einander im Gleichgewicht befindlichen Kräfte g_1, g_2, g_3, g_4 (in der Figur mit G_0G_1, G_1G_2, G_2G_3, G_3G_0 bezeichnet) wirken. Denken wir also diese Kräfte in dem geschlossenen Kräftepolygone $K_0K_1K_2K_3K_0$ zusammengetragen und verstehen unter C irgend einen Pol, so muss auch der zugehörige Seilpolygon $S_0S_1S_2S_3S_4S_5$ ein geschlossener sein, also S_0S_1 mit S_4S_5 zusammenfallen.

Nunmehr kommt es darauf an, das ebene Vierseit $g_1g_2g_3g_4$ als eine in der Richtung der Achse eines Nullsystems erhaltene Projection eines räumlichen Vierseits $g'_1g'_2g'_3g'_4$ darzustellen, welchem in diesem Nullsystem ein Vierseit $K'_0K'_1K'_2K'_3$ conjugirt ist, dessen Projection das Kräftepolygon $K_0K_1K_2K_3$ ist. Um dies zu erreichen, betrachten wir die Zeichenebene als die Ebene des Grundrisses, die dazu senkrechte Richtung als die der Achse des Nullsystems und verzeichnen die räumlichen Figuren im umgeklappten Aufriss. Um das Nullsystem zu fixiren, nehmen wir hiernach noch die beiden conjugirten Geraden g'_1 und k'_1 sonst willkürlich aber so an, dass g_1 und $k_1 = K_0K_1$ ihre Grundrisse seien, wir nehmen also ihre Aufrisse g'_1 und k'_1 ganz beliebig an, wodurch zugleich die Punkte K'_0 und K'_1 bestimmt sind. Nun muss die nächste Seite g'_2 des ersten räumlichen Vierseits erstens g_2 zum Grundrisse haben und zweitens zu $K'_1K'_2 = k'_2$ conjugirt sein oder in der Nullebene $[K'_1g'_1]$ von K'_1 liegen, wonach g'_2 leicht zu construiren ist. Jetzt ist k'_2 umgekehrt als die g'_2 conjugirte Gerade bestimmt; man findet daher k'_2, falls g_1 und g_2 sich in G_1, g'_1 und g'_2, sich also in G'_1 schneiden, über $k_2 = K_1K_2$ als Grundriss in der Nullebene $[G'_1k'_1]$ von G'_1, oder, falls g_1 und g_2, folglich auch g'_1 und g'_2 parallel sind, nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode (vergl.

auch Fig. 2). In beiden Fällen ist die wirkliche Construction leicht zu bewerkstelligen. So können wir fortfahren und erhalten der Reihe nach K'_2 über K_2 aus k'_3, dann g'_3 über g_3, hieraus k'_3 über $k_3 = K_2K_3$ und K'_3, weiter g'_4 über g_4, endlich k'_4 über $k_4 = K_3K_0$, und es frägt sich nur, ob k'_4 wieder durch K'_0 geht.

Bezeichnen wir nun den über K_0 liegenden Punkt von k'_4 mit K''_0 und verstehen unter C' irgend einen Punkt über dem Pole C, so sind den fünf Strahlen von C' nach K'_0, K'_1, K'_2, K'_3, K''_0 fünf Strahlen einer Ebene conjugirt, welche sich der Reihe nach in vier Punkten S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 von g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 schneiden müssen; dasselbe gilt daher von deren Projectionen in Beziehung auf g_1, g_2, g_3, g_4. Diese Projectionen müssen also, da sie den Strahlen von C nach K_0, K_1, K_2, K_3, K_0 parallel sind, ein Seilpolygon $S_0S_1S_2S_3S_4S_5$ bilden. In diesem müssen aber der Voraussetzung gemäss die erste und die letzte Seite zusammenfallen. Dasselbe gilt daher auch von den Strahlen, deren Projectionen sie sind, da diese in derselben Ebene liegen, es gilt also schliesslich auch von $C'K'_0$ und $C'K''_0$, so dass auch K'_0 und K''_0 zusammenfallen, und folglich g'_4 mit g'_1 in derselben K'_0 enthaltenden Ebene liegen muss. Der erste Theil unserer Aufgabe wäre also gelöst, und man sieht zugleich, dass dasselbe Verfahren auch auf beliebig viele Kräfte g_1, g_2, ..., g_n angewendet werden kann.

Das Weitere ergiebt sich in unserem Falle sehr leicht. Auf den Seiten g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 des ersten räumlichen Vierseits liegen jetzt der Reihe nach die Punkte P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, deren Projectionen die Knoten P_1, P_2, P_3, P_4 des Fachwerks sind. Das aus den sechs Dreiecken $g'_1g'_2$, $g'_2g'_3$, $g'_3g'_4$, $g'_4g'_1$, $P'_1P'_2P'_4$ und $P'_2P'_3P'_4$ bestehende, im Allgemeinen offene Sechsflach ist nun die räumliche Figur, deren Kanten die Stäbe des Fachwerks und die wirkenden Kräfte zu Projectionen haben. Es entspricht ihr im Nullsystem das aus den Punkten K'_1, K'_2, K'_3, K'_0, H'_1 und H'_2 bestehende Sechseck, dessen Kanten einerseits die Seiten des Kräftepolygons und andererseits die Spannungen in den Stäben des Fachwerks zu Projectionen haben. Diese letzteren sind jedesmal die Verbindungslinien derjenigen beiden Punkte, welche Projectionen der Nullpunkte der beiden Flächen des Sechsflachs sind, in denen die zu dem betreffenden Stabe gehörige Kante liegt. Will man daher diese Spannungen schnell aus der Figur herausfinden, so wird man gut thun, in die Projectionen jener Flächen die Buchstaben K_1, K_2, K_3, K_0, H_1 und H_2 einzutragen. Gerade in der Praxis liefert diese Bezeichnungsweise eine viel leichtere Uebersicht, als die sonst übliche, welche die Stäbe und die zugehörigen Spannungen mit denselben Zahlen bezeichnet, weil die letzteren Strecken sich häufig theilweise decken oder durch einander gehen.

III. Handelt es sich um ein complicirteres Fachwerk, so geschieht zunächst die Bestimmung des räumlichen n-Seits $g'_1 g'_2 \ldots g'_n$, dessen Projectionen die Wirkungslinien der gegebenen Kräfte sind, auf ganz dem-

selben Wege. Hiermit sind zugleich die Raumpunkte $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ bestimmt, deren Projectionen die Angriffspunkte jener Kräfte sind. Da wir hier nicht eine Discussion aller möglichen Arten von Fachwerken beabsichtigen, so machen wir die der Praxis entsprechende Annahme, dass die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte am Rande des Fachwerks liegen, dass also die diese Knotenpunkte verbindenden Stäbe immer nur einem Felde des Fachwerks angehören. Wir werden dann weiter die Annahme machen müssen, dass von den Knotenpunkten $P_1 P_2 \ldots P_n$ im Allgemeinen höchstens drei demselben Felde des Fachwerks angehören; denn die den Knotenpunkten eines Feldes zugehörigen Raumpunkte müssen in einer Ebene liegen, was ohne besondere Bedingungen nur für je drei solcher Punkte zutreffen wird. Sollten nun am Rande noch weitere Knotenpunkte liegen, in welchen keine Kräfte wirken, so denken wir uns dieselben jedesmal zwischen den zwei der schon behandelten Knotenpunkte P_i und P_{i+1} vertheilt, zwischen welchen sie bei einmaliger Umlaufung des ganzen Randes liegen. Nun haben wir uns in diesen Knotenpunkten die Kräfte Null angebracht zu denken, welche im Kräftepolygon durch den Punkt K_i dargestellt sind, so dass die ihnen entsprechenden Raumpunkte sämmtlich in der Ebene $[g'_i, g'_{i+1}]$ zu suchen sind; ist j die Anzahl dieser zwischen P'_i und P'_{i+1} liegenden Punkte, so bilden sie eben mit diesen und dem Punkte (g'_i, g'_{i+1}) eine der ersten räumlichen Figur angehörige $j+3$-eckige Seitenfläche.

Was nun die dem inneren Knotenpunkte entsprechenden Raumpunkte betrifft, so lassen sich für deren Bestimmung allgemeine Regeln kaum angeben. Wir werden da zuerst zusehen, ob das Fachwerk derart in Felder zerfällt, dass jeder innere Stab zwei und nur zwei Feldern angehört resp. ob sich das durch Einführung idealer Knotenpunkte* erreichen lässt. Hierunter verstehen wir die Schnittpunkte der solche Stäbe darstellenden Strecken, die in Wirklichkeit nur über einander laufen. Die den vier in einem solchen idealen Knotenpunkte zusammenlaufenden Stäben in dem Kräfteplane entsprechenden Strecken werden nämlich ein Parallelogramm bilden, so dass man für jeden Stab in den verschiedenen Theilen desselben dieselbe Spannung erhalten wird. Besonderer Untersuchung aber bedarf der Fall, dass in einem solchen idealen Knotenpunkte mehr als zwei Stäbe über einander laufen; hier stellt sich gewöhnlich eine Unbestimmtheit heraus, die durch die Bedingung zu heben ist, dass die in jedem durch den idealen Knotenpunkt durchbrochen gedachten Stabe resultirenden Spannungen entgegengesetzt gleich seien.

Für die Bestimmung der Raumpunkte, welche den inneren, wirklichen sowohl wie idealen Knotenpunkten entsprechen, muss nun davon ausgegangen werden, dass die einem und demselben Felde des Fachwerks zugehörigen in derselben Ebene liegen. Man sucht dann also nach Punkten,

---

* S. l. c. Appendice par Saviotti p. 63.

welche mit drei schon bekannten Raumpunkten in einer Ebene liegen sollen, und versucht, so allmählich zu allen Raumpunkten der ersten Figur zu kommen. Hierbei wird man oft nicht direct zu Werke gehen können, sondern einen oder mehrere der unbekannten Punkte vorerst willkürlich annehmen müssen, um durch das Studium ihrer Bewegung zum Ziele zu gelangen. Wir werden dies Verfahren an einigen Beispielen erläutern und begnügen uns hier mit der allgemeinen Bemerkung, dass die Bestimmung der inneren Raumpunkte unmöglich, das Fachwerk also statisch unbestimmt sein wird, wenn es beim Vorhandensein innerer, wirklicher oder idealer Knotenpunkte nur aus dreieckigen Feldern besteht.

IV. Als erstes Beispiel wählen wir das aus den vier äusseren Knotenpunkten $P_1 \dots P_4$ (Fig. 2) und dem inneren Knotenpunkte P_5 bestehende Fachwerk; es zerfällt in die beiden dreieckigen Felder $P_1P_4P_5$ und $P_3P_4P_5$ und in das viereckige Feld $P_1P_2P_3P_5$. In P_1, P_2, P_3 mögen die drei Kräfte g_1, g_2, g_3 wirken, deren Kräftepolygon $K_0K_1K_2K_0$. Dann bestimmt man nach der in II. angegebenen Methode das Dreiseit $g'_1 g'_2 g'_3$ (der Aufriss wurde in der Figur nach der Seite umgeklappt) und damit P'_1, P'_2, P'_3; ferner ist P_4 dadurch bestimmt, dass er in der Ebene $[g'_3, g'_1]$ liegen muss, und endlich P'_5 dadurch, dass er in der Ebene $P'_1P'_2P'_3$ liegen muss. Somit ist die erste räumliche Figur vollständig bestimmt.

Ein ähnliches Beispiel liefert der sogenannte französische Dachstuhlträger (Fig. 3), an welchem zugleich der Vortheil unserer Bezeichnungsweise deutlich wird. Auf die oberen Knotenpunkte P_2, $P_3, \dots, P_8$ mögen die gleichen und parallelen Kräfte $g_2, g_3, \dots, g_8$ wirken, während in P_1 und P_9 die Auflager-Relationen $g_1 = g_6 = -\frac{1}{2}(g_2 + \dots + g_8)$ wirksam zu denken sind; $K_0K_1 \dots K_8K_0$ ist das zugehörige Kräftepolygon. Nach Annahme von g'_1 und k'_1 ergeben sich nun zuerst wieder die Geraden $g'_2, \dots, g'_9$ und mit ihnen die Punkte $P'_1 P'_2, \dots, P'_9$, die Punkte P'_{10}, P'_{11}, P'_{12}, P'_{13} sind dann dadurch bestimmt, dass sie in der Ebene $[g'_1, g'_9]$ liegen müssen, endlich P'_{14} und P'_{15} dadurch, dass sie in der Ebene $P'_5P'_{11}P'_{12}$ liegen müssen. Das Nullsystem liefert also unmittelbar als Projection des dem räumlichen Zweiundzwanzigflach entsprechenden Zweiundzwanzigecks den zum Fachwerk gehörigen Kräfteplan. Bekanntlich kommt man hier mit den gewöhnlichen Methoden der Zerlegung in Componenten nicht aus, sondern bedarf noch irgend eines Kunstgriffs. (In der Figur dachte man sich H_4 auf der Parallelen durch H_3 zu P_3P_{12} beweglich, wobei sich H_6 auf einer durch S gehenden Geraden bewegt; H_6 kann also aus irgend einer Lage des beweglichen Punktes H'_6 gefunden werden.)

Als letztes Beispiel behandeln wir das Fachwerk mit sechs Knotenpunkten $P_1, P_2, \dots, P_6$ (Fig. 4), den Seiten und Diagonalen des von ihnen gebildeten Sechsecks als Stäben; die letzteren laufen in drei Punkten A, B, C über einander, welche wir also als ideale

Knotenpunkte einführen müssen. In den sechs Knotenpunkten mögen die sechs Kräfte $g_1, g_2, \ldots, g_6$ wirken, und $K_0 K_1 \ldots K_5 K_0$ sei das zugehörige Kräftepolygon. Nach Annahme von g'_1 und k'_1 finden wir wieder $g'_2, \ldots, g'_6$ und daraus $P'_1, P'_2, \ldots, P'_6$. Die den idealen Knotenpunkten entsprechenden Punkte A', B', C' können wir hier nicht direct angeben. Nehmen wir aber einen dieser Punkte willkürlich über A an, so wären damit auch B' und C' bestimmt als in den Ebenen $P'_1 P'_1 A'$ und $P'_5 P'_6 A'$ gelegen, und es frägt sich nur, ob auch B' und C' mit P'_3 und P'_4 in einer Ebene liegen. Bei beliebiger Annahme von A' wird das natürlich im Allgemeinen nicht der Fall sein. Wenn sich aber A' auf der Vertikalen über A bewegt, so beschreiben $P'_3 P'_4 B'$ und $P'_3 P'_4 C'$ zwei projective Ebenenbüschel, welche die verticale Ebene durch $P'_3 P'_4$ entsprechend gemein haben, so dass man im Allgemeinen eine und nur eine Lage von A' erhalten wird, welche die Aufgabe löst. Die weitere Verfolgung dieser Betrachtungen würde uns auch zeigen, wenn mehr als eine oder nur eine uneigentliche Lösung existirt. Da indessen zum leichten Verständnisse denselben einige Uebung in der projectiven Geometrie des Raumes gehört, auch der Fall, dass die drei Diagonalen durch einen Punkt laufen, hierbei besonders behandelt werden müsste, so ziehen wir ein Verfahren vor, welches sich auch dem bei der wirklichen Zeichnung des Kräfteplanes zu befolgenden Gedankengange anschliesst.

Wir können uns offenbar jeden Stab des Fachwerks entfernt denken, wenn wir ihn durch zwei in seinen Endpunkten angreifende und der in ihm herrschenden Spannung entsprechende entgegengesetzt gleiche Kräfte ersetzen. Denken wir uns dann das Fachwerk durch Hinzufügung eines idealen Stabes befestigt, so können wir unserem Probleme auch die Fassung geben: Die in den Endpunkten des zu entfernenden Stabes anzubringenden Kräfte ihrer Grösse und ihrem Sinne nach so zu bestimmen, dass sie mit dem gegebenen Kräftesysteme zusammen in dem idealen Stabe die Spannung Null hervorrufen;* denn dann kann man den idealen Stab wieder vernachlässigen. Dies Problem können wir aber in zwei Theile zerlegen: Man bestimme zuerst die von dem gegebenen Kräftesysteme herrührende Spannung in dem idealen Stabe, dann die von irgend zwei in dem entfernten Stabe wirkenden und entgegengesetzt gleichen Kräften in dem idealen Stabe hervorgerufene Spannung; die Bestimmung der in dem entfernten Stabe wirkenden Kräfte entsprechend der Forderung unseres Problems bedarf dann nur noch der Aufsuchung einer vierten Proportionale. Denn die von den beiden Kräftesystemen für sich hervorgerufenen Spannungen summiren sich ja bei ihrer gleichzeitigen Wirkung, und die durch die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte hervorgerufenen Spannungen ändern sich diesen proportional. Die Aufgabe wird offenbar nur dann eine

* Siehe Henneberg: „Statik der starren Systeme", Darmstadt 1886, S. 228 flg.

unbestimmte oder liefert nur unendliche Lösungen, wenn die Spannung in dem idealen Stabe bei jeder Grösse der Kräfte in dem entfernten Stabe Null wird.

In unserem Falle entfernen wir den Stab $P_1 P_4$ und fügen den idealen Stab $P_2 P_6$ ein, so dass nur noch der ideale Knotenpunkt B übrig bleibt. Die zu dem gegebenen Kräftsysteme gehörige räumliche Figur ist ja unmittelbar bekannt; denn B' muss hier in der Ebene $P'_3 P'_4 P'_5$ liegen. Zu dem zweiten Kräftesysteme s und $-s$, das in $P_1 P_4$ wirkt, möge das Kräftepolygon $T_0 T_1 T_0$ gehören; dann können wir s' und t' beliebig über s und $T_0 T_1$ annehmen, wodurch auch T'_0 und T'_1 bestimmt sind. Nunmehr liegen P'_1, P'_2, P'_3 und P'_4 in der Nullebene $[T'_0 s']$ von T'_0, P'_4, P'_5, P'_6, P'_1 in der Nullebene $[T'_1 s']$ von T'_1 und B' wieder in der Ebene $P'_3 P'_4 P'_5$. In dem idealen Stabe $P_2 P_6$ wird offenbar dann und nur dann die Spannung Null resultiren, wenn die beiden Ebenen $P'_6 P'_1 P'_2$ und $P'_2 B' P'_6$ zusammenfallen, das heisst B' in der Schnittlinie der beiden Ebenen $P'_6 P'_1 P'_2$ und $P'_3 P'_4 P'_5$ oder in der Verbindungslinie der beiden Punkte $\alpha' = (P'_1 P'_2, P'_3 P'_4)$ und $\gamma' = (P'_4 P_5, P'_6 P'_1)$ liegt. Dann würden aber auch die drei Punkte $\alpha = (P_1 P_2, P_4 P_3)$, $B = (P_2 P_5, P_3 P_6)$ und $\gamma = (P_5 P_4, P_6 P_1)$ in einer Geraden liegen, das Sechseck $P_1 P_2 P_5 P_4 P_3 P_6$ also wäre ein Pascal'sches, die gegebenen sechs Knotenpunkte müssten auf einem Kegelschnitte liegen.* Liegen umgekehrt die sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte, α, B, γ also in einer Geraden, so liegt B' in der Geraden $\alpha'\gamma'$ oder in der Ebene $P'_6 P_1' P'_2$, es wird also in dem idealen Stabe $P_2 P_6$, welche Grösse auch s haben mag, stets die Spannung Null resultiren. Ist daher das gegebene Kräftesystem nicht so beschaffen, dass es ebenfalls in $P_2 P_6$ die Spannung Null hervorruft, so ruft es in dem ursprünglichen Fachwerke unendliche Spannungen hervor. Liegen die sechs Knotenpunkte auf einem Kegelschnitte, so ist demnach unser Fachwerk im Allgemeinen unbrauchbar.

Diese Beispiele werden genügen, zu zeigen, wie der Cremona'sche Gedanke dazu benutzt werden kann, um die statische Bestimmtheit oder Brauchbarkeit gegebener Fachwerke zu untersuchen, und die Benutzung des Nullsystems bei der Construction von Kräfteplänen erhält hierdurch den Charakter einer allgemeinen Methode.

---

* Vergl. z. B. Müller-Breslau: „Die graphische Statik der Bauconstructionen", 2. Aufl., Bd. I S. 208 flg. Leipzig 1887.

Kleinere Mittheilungen.

I. Zur Perspective des Kreises.

Bezeichnet (Fig. 1) oh den Augenpunkt, gh den Distanzpunkt, xy einen Punkt der Grundebene und $\xi\eta$ dessen Perspectivbild, so gelten bekanntlich die Gleichungen:

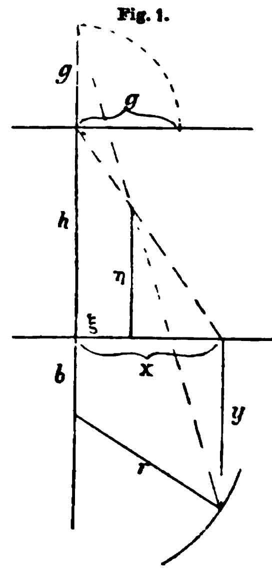


Fig. 1.

$$(h-\eta)x = h\xi,$$
$$(h-\eta)y = g\eta;$$

dem Kreise
$$x^2 + (y-b)^2 = r^2$$

entspricht hiernach der Kegelschnitt

$$h^2\xi^2 + [(b+g)^2 - r^2]\eta^2 + 2h[r^2 - b(b+g)]\eta$$
$$+ (b^2 - r^2)h^2 = 0,$$

welcher für
$$h^2 = (b+g)^2 - r^2$$
oder
$$g = \sqrt{h^2 + r^2} - b$$

zu einem Kreise wird. Die zugehörige Construction zeigt Figur 2, worin $AC = b$, $AB = CD = r$ und AG die beliebig gewählte Augenhöhe bedeutet; schneidet man nämlich auf BG die Strecke $Bd = BD$ ab und nimmt $GH = Gd$, so ist H der Distanzpunkt.

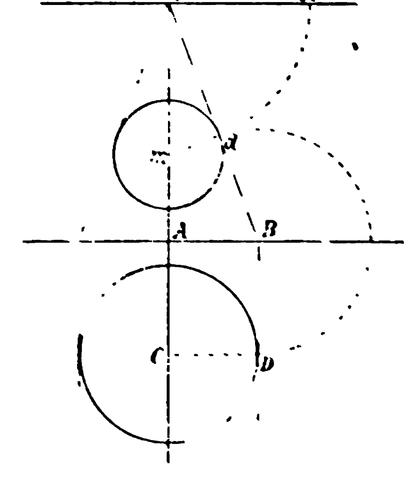


Fig. 2.

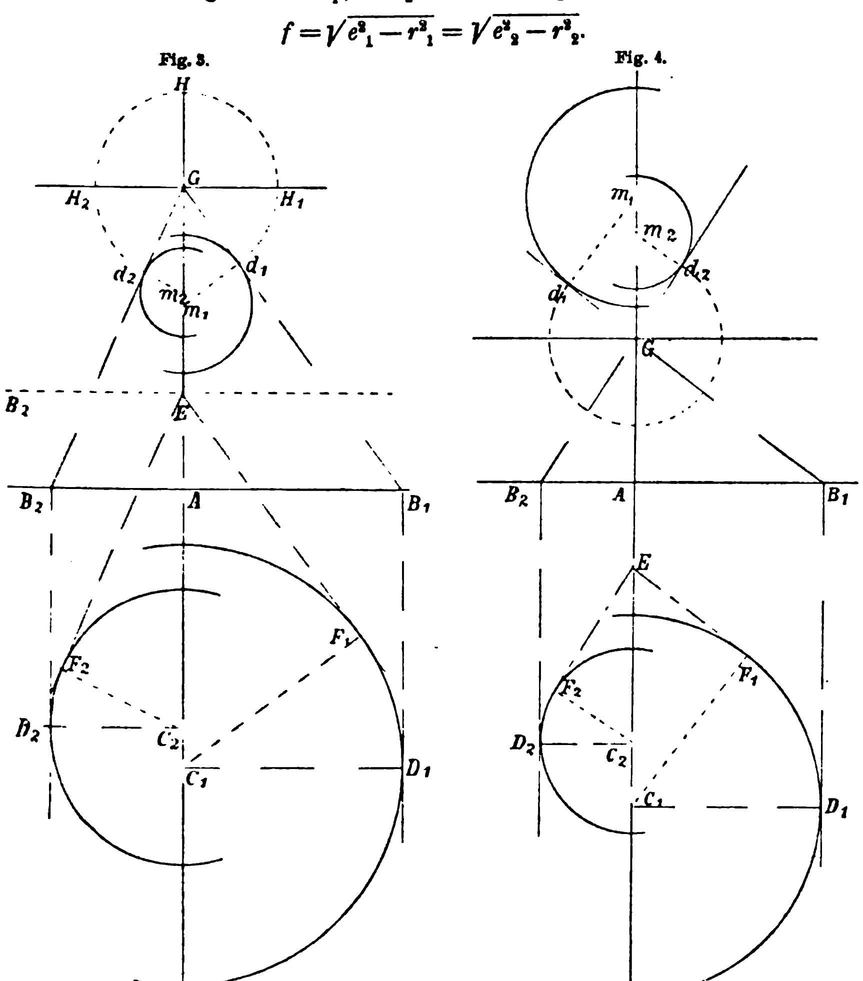
An dieses mehrfach behandelte kleine Problem knüpft sich die, wie es scheint, neue Frage, ob zwei gegebene, aus den Mittelpunkten C_1 und C_2 mit den Radien $C_1D_1 = r_1$ und $C_2D_2 = r_2$ beschriebene Kreise (Fig. 3) so projicirt werden können, dass die beiden Perspectivbilder gleichzeitig Kreise sind.

Zunächst möge an den Satz erinnert sein: Bezeichnet E den Durchschnitt der Centrale C_1C_2 mit der Potenzlinie beider Kreise und ist $C_1C_2 = c$, $C_1E = c_1$, $C_2E = c_2$, so bestehen die Formeln:

$$e_1 = \frac{r^2_1 - r^2_2 + c^2}{2c}, \quad e_2 = \frac{r^2_1 - r^2_2 - c^2}{2c},$$

und die Kreistangenten EF_1, EF_2 haben den gemeinschaftlichen Werth:

$$f = \sqrt{e^2_1 - r^2_1} = \sqrt{e^2_2 - r^2_2}.$$



Um nun die Augenhöhe $AG = h$ und die Distanz zu ermitteln, setze man, dem anfangs Gesagten analog, $AC_1 = B_1D_1 = b_1$, $AC_2 = B_2D_2 = b_2$ und beachte, dass jetzt die Bedingung

$$g = \sqrt{h^2 + r^2_1} - b_1 = \sqrt{h^2 + r^2_2} - b_2$$

zu erfüllen ist. Hieraus folgt wegen $b_1 - b_2 = c$:

$$r^2_1 - r^2_2 - c^2 = 2c\sqrt{h^2 + r^2_2}, \text{ das ist } 2ce_2 = 2c\sqrt{h^2 + r^2_2},$$

mithin:

$$h^2 = e^2_2 - r^2_2 = f^2 \text{ oder } h = f$$

und schliesslich:

$$g = e_2 - b_2 = e_1 - b_1.$$

Dies giebt die Construction (Fig. 3): man bestimme zunächst den Punkt E, lege die Grundlinie durch einen beliebigen Punkt A der Geraden C_1E senkrecht zu letzterer und nehme die Strecke $AG = EF_1 = EF_2$; dann ist G der Augenpunkt. Der zugehörige Distanzpunkt findet sich dadurch, dass man auf B_1G und B_2G die Strecken $B_1d_1 = B_1D_1$, $B_2d_2 = B_2D_2$ abschneidet; die Reste Gd_1 und Gd_2 sind dann gleich und geben die Distanz GH_1 oder GH_2, so dass der Horizont die Potenzlinie der beiden Perspectivbilder ist. Nimmt man $GH = GH_1$ senkrecht zu GH_1, so ist H das in die Bildebene aufgeklappte Projectionscentrum.

In dem speciellen Falle, wo A auf E gelegt wird, schrumpfen die beiden Kreisbilder zu Punkten zusammen; für $C_1A > C_1E$ erhalten die Kreisprojectionen die entgegengesetzte Lage (Fig. 4).

Zu der durch E gehenden Potenzlinie gehören bekanntlich nicht nur die ursprünglichen zwei, sondern unendlich viele Kreise; diesem Kreisbüschel entspricht im Bilde wieder eine Schaar von Kreisen, von denen der Horizont die gemeinschaftliche Potenzlinie ist. Daran würden sich noch manche collineare Beziehungen knüpfen lassen.

SCHLÖMILCH.

II. Constructionen der Krümmungsmittelpunkte von Kegelschnitten.

1. **Die Tangenten in den Schnittpunkten einer Geraden mit einer Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte umhüllen eine Parabel, welche die Gerade berührt.**

Besteht die Schaar aus Ellipsen, so projicire man sie als concentrische Kreise. Die Normalen in den Schnittpunkten mit der Geraden gehen sämmtlich durch den Mittelpunkt, folglich umhüllen ihre zugehörigen Tangenten eine Parabel, welche die Gerade berührt. Somit umhüllen auch die Tangenten in den Schnittpunkten der Ellipsenschaar eine Parabel, welche die schneidende Gerade berührt. Da diese Eigenschaft projectivisch ist, so wird sie auch für eine Hyperbelschaar gelten.

2. **Die Normalen in den Schnittpunkten einer Geraden mit einer Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte umhüllen eine Parabel, welche die Gerade, sowie die Hauptachsen der Schaar berührt.**

Man polarisire die Tangentenparabel in Bezug auf einen Kreis, dessen Mittelpunkt im Brennpunkt O der Parabel liegt, so ist die Polarfigur ein Kreis, auf dem die Pole P der sämmtlichen Tangenten, unter diesen insbesondere der Pol A der Schnittgeraden, sowie der Brennpunkt O liegen. Die Pole Q der Normalen liegen in den Schnittpunkten der auf den Strahlen OP in O errichteten Senkrechten mit den Strahlen AP. Da nun die Strahlbüschel $O(Q)$ und $A(P)$ projectivisch sind, nämlich beide congruent

dem Strahlbüschel $O(P)$, so liegen ihre Schnittpunkte Q auf einem Kegelschnitt, der durch O und A geht und durch Rückpolarisirung eine Parabel ergiebt, welche die Schnittgerade berührt und den Brennpunkt O hat. Endlich befinden sich unter den Normalen, welche die Parabel umhüllen, auch die Hauptachsen der Kegelschnittschaar, als Normalen von Kegelschnitten in den Schnittpunkten der gegebenen Geraden mit den Hauptachsen.

Eine nähere Betrachtung der beiden Umhüllungsparabeln der Tangenten und der Normalen ergiebt manche sehr bemerkenswerthe Eigenschaften der Kegelschnitte, auf die jedoch hier nicht weiter eingetreten wird. Es sei nur noch angemerkt, dass die Achsen der beiden Parabeln auf einander senkrecht stehen.

3. Greift man einen Kegelschnitt der Schaar heraus, so erhält man aus 2. den Satz:

In einem Kegelschnitt umhüllt eine Secante mit den Normalen des Kegelschnitts in ihren Schnittpunkten und mit den beiden Hauptachsen eine Parabel.

Lässt man endlich die Secante in eine Tangente übergehen, so geht der Schnittpunkt der beiden zusammenfallenden Normalen in den Krümmungsmittelpunkt über und wird zugleich ihr Berührungspunkt mit der Parabel. Demnach:

Die Parabel, welche die Tangente und die Normale eines Kegelschnittpunktes nebst den Hauptachsen umhüllt, berührt die Normale im Krümmungsmittelpunkt, der zum Kegelschittspunkt gehört. Der Durchmesser des Kegelschnittpunktes ist Leitlinie der Parabel.

Betrachtet man daher die Tangente und die Normale nebst den beiden Hauptachsen und der unendlich entfernten Geraden als ein der Parabel umgeschriebenes Fünfeck, so liefert der Brianchon'sche Satz sofort mehrere Constructionen des Krümmungsmittelpunktes, je nach der Anordnung dieser fünf Geraden zu einem Fünfeck. Bei jeder dieser Constructionen sind lediglich drei Gerade zu ziehen, nämlich je eine Parallele zu zwei jener Geraden und eine Verbindungsgerade.

Es sei nur die eine Construction erwähnt: Aus dem Schnittpunkt der Normalen mit einer Hauptachse ziehe man die Parallele zur Tangente und aus dem Schnittpunkt derselben mit dem Durchmesser des Kegelschnittpunktes die Parallele zur anderen Hauptachse, so wird die Normale von ihr im Krümmungsmittelpunkt getroffen.

Basel, 16. November 1894. Prof. KINKELIN.

III. Der Bunsenbrenner.

In Kirchhoff's „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", herausgegeben im Jahre 1894 von Planck, findet sich als Beispiel (XII, § 4) die Bunsenlampe erwähnt neben der Wasserstrahlpumpe, als ob bei ihr auch die Dichte des strömenden Agens

$$\mu_1 = 1$$

wäre.

Dieses Versehen wäre unbedeutend und würde von jedem aufmerksamen Leser sogleich corrigirt werden. Allein im nächstfolgenden § 5 wird als zweites (und letztes) Beispiel der Anwendung diese Lampe ausführlich, soweit dies bei Kirchhoff denkbar ist, behandelt (eine Druckseite als Schluss von XII) und unter den Resultaten

$$u_1 = \sqrt{2(p_1 - p_0)} \cdot (1 + \alpha)$$

verzeichnet für die Ausflussgeschwindigkeit des Gases aus dem Gasbehälter vom Drucke p_1, wo p_0 den Luftdruck und α eine kleine Grösse bedeutet, nämlich das Verhältniss $q_1 : q_0$ der Ausflussöffnung des Gases zur Einflussöffnung der atmosphärischen Luft.

Sieht man von α einstweilen ab und bezeichnet dafür (mit Kirchhoff) den vor der Oeffnung q_1 stattfindenden Druck, der kleiner als p_0 ist, mit p'_1, so käme

$$u_1 = \sqrt{2(p_1 - p'_1)},$$

was aber offenbar gemäss der bekannten Torricelli'schen Formel heissen sollte:

$$u_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_1 - p'_1)}{\mu}}.$$

Ist z. B. p_1 gleich einer Atmosphäre oder rund $1000 . 1000 \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim. Sec.}^2}$, so ist $\mu_1 = \frac{1}{770.2} \frac{\text{Gramm}}{\text{Centim.}^3}$, da das Leuchtgas ungefähr halbmal so schwer ist, als die Luft. In den luftleeren Raum (wenn p'_1 gleich Null wäre) strömt also das Leuchtgas stationär über mit der Geschwindigkeit ungefähr 560 Meter in der Secunde.

Soviel wird genügen, um das Bedürfniss nach Ersatz der an den genannten Stellen mitgetheilten Formeln durch richtigere zu rechtfertigen. Ich werde mich hierbei zwar an den unmittelbar voranstehenden § 3 mit seinen Bezeichnungen halten, aber dennoch die Darstellung so fassen, dass sie auch allein, ohne Benutzung jenes Buches, verständlich wird.

$$1) \qquad q_0 \mu_0 u_0 + q_1 \mu_1 u_1 = q_2 \mu_2 u_2$$

besagt, dass in dem Raume vor q_1, in welchem die Gas- und Luftmischung geschieht, soviel von beiden Stoffen ein- als in der gleichen Zeit ausströmt; μ_0 ist in unserem Falle die Dichte der atmosphärischen Luft, welcher gegenüber ich vorhin μ_1 als halb so gross angeführt habe; μ_2 ist die Dichte des Gemisches.

2) $$q_0\mu_0 u^2_0 + q_1\mu_1 u^2_1 - q_2\mu_2 u^2_2 + q_0 p'_0 + q_1 p'_1 - q_2 p'_2 = 0$$

entspricht in der elementaren Mechanik der Gleichung von Bewegungsgrösse und Zeitwirkung der Kraft beim Ein- und Austritte in den Mischungsraum. Denn die indizirten Drücke, von denen p'_1 schon oben erwähnt wurde, wirken als Ergänzung zu den Bewegungsgrössen. Um da von Bewegungsgrösse und Zeitwirkung der Kraft reden zu können, darf man nur jedes der drei u^2 zerlegen in $u \cdot \frac{s}{t}$ und mit dem gleichen t die ganze Gleichung 2) multipliciren.

3) $$p'_2 = p_2$$

gilt, wie bei der Dampfstrahlpumpe a. a. O., auch für unsere Lampe.

4) $$p_1' = p'_0$$

desgleichen. (Die im Buche unmittelbar vorangeschickte $q_0 + q_1 = q_2$ gilt hier nicht, oder wäre wenigstens eine unnöthige Beschränkung; sie ist meines Erachtens auch dort zur Begründung von 4) nicht nöthig.)

5) $$\mu_1 u^2_1 = 2(p_1 - p'_1),$$

6) $$\mu_0 u^2_0 = 2(p_0 - p'_0)$$

sind die schon berührten Gleichungen der lebendigen Kraft beziehungsweise für das Gas und die einströmende Luft (Toricellis Gesetz).

Ueberdies gilt bei der Bunsenlampe speciell

$$p_0 = p_2.$$

Demnach reduciren sich die sechs Gleichungen auf die vier folgenden: 1) bleibt; 2) wird zu

2*) $$q_0\mu_0 u^2_0 + q_1\mu_1 u^2_1 - q_2\mu_2 u^2_2 + (q_0 + q_1)p'_1 - q_2 p_0 = 0;$$

3) und 4) sind schon benutzt, wie auch $p_0 = p_2$; 5) bleibt und 6) wird zu

6*) $$\mu_0 u^2_0 = 2(p_0 - p'_1).$$

Aus diesen vier Gleichungen lassen sich $u_0 u_1 u_2$ und p'_1 bestimmen.

Wie am Schlusse von § 4 und von § 5 erwähnt wird, müssen die gefundenen Geschwindigkeiten $u_0 u_1 u_2$ der Ungleichung

$$p_0 q_0 u_0 + p_1 q_1 u_1 - p_2 q_2 u_2 > 0$$

entsprechen, weil durch Reibung etc. ein Theil der Arbeit (in der Zeiteinheit) im Mischungsraum verloren geht.

Die Gleichung 2) oder 2*) erinnert an die eine der beiden Gleichungen des Stosses unelastischer wie elastischer Körper, die von den Bewegungsgrössen handelt, die letzte Ungleichung an die zweite Gleichung des elementaren Stosses elastischer Körper, wobei man so häufig die auf Erwärmung und bleibende Formänderung verwandte lebendige Kraft ausser Acht lässt, was beim Stosse der unelastischen Körper von vornherein als

unthunlich sich zeigt. Bei letzterem Stosse bedarf man auch keiner zweiten Gleichung, da die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stosse schon aus der ersten Gleichung sich ergiebt (siehe „Physikalisches Repertorium" 1890 S. 146 und 1883 S. 338).

Ich will nun auch noch die vier Gleichungen zu einer numerischen Anwendung benutzen. Ein älterer Bunsenbrenner mit zwei Luftlöchern von je neun Millimeter Durchmesser (bei neueren sind diese kleiner) hat als Gasöffnung nicht viel mehr als einen Millimeter-Durchmesser, als Ausströmungsöffnung für das Gemisch auch eine solche mit neun Millimeter Durchmesser. Deshalb wird die erste Gleichung, mit Weglassung des gemeinsamen Factors $\frac{\pi}{400\,\mu_0}$, nahezu

1*) $$160\,u_0 + \frac{1}{2}u_1 = 80\,u_2\,\frac{\text{Gramm}}{\text{Secunde}},$$

wenn, wie oben, die relative Gasdichte zur Luft wie 1 zu 2 angenommen wird und μ_2 nahe gleich μ_0 gilt. Es entspricht dies auch der Thatsache, dass die angesaugte Luft stets im Ueberschuss vorhanden ist (siehe auch das am Anfange des gegenwärtigen Absatzes über die Querschnitte Gesagte).

In der weiter oben stehenden Gleichung 2*) können wir alsdann q_1, wo es als Summand neben q_0 steht, weglassen, und dieselbe heisst jetzt, nach Kürzung mit dem gemeinsamen Factor $\frac{\pi}{400}$:

2**) $$160\,u^2_0 + \frac{1}{2}u^2_1 = 80\,u^2_2 - 160\,\frac{p'_1}{\mu_0} + 80\,\frac{p_0}{\mu_0}.$$

Die Gleichung 5) wird jetzt

5*) $$u^2_1 = 4\cdot\frac{p_1 - p'_1}{\mu_0},$$

und

6*) $$u^2_0 = 2\cdot\frac{p_0 - p'_1}{\mu_0}.$$

Diese vier Gleichungen zur Bestimmung von $u_0\,u_1\,u_2\,p'_1$ liefern: die erste angenähert, mit Weglassung des zweiten Gliedes,

$$2\,u_0 = u_2;$$

ferner die dritte und vierte, wenn man vorerst von dem geringen Unterschiede zwischen p_0 und p_1, der in der Wirklichkeit wenige Centimeter Wasser beträgt, absieht, $2\,u^2_0 = u^2_1$.

Nun für u_2 und u_1 in der zweiten Gleichung u_0 eingeführt, wobei vorerst auch das zweite Glied wegen seiner Kleinheit wegfällt, dann wird aus ihr

$$0 = u^2_0 - \frac{p'_1}{\mu_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p_0}{\mu_0};$$

und 6*) kann man schreiben:

$$0 = u^2_0 + \frac{2p'_1}{\mu_0} - 2\,\frac{p_0}{\mu_0}.$$

Durch Subtraction findet man

$$p'_1 = \frac{5}{6} p_0 = \frac{5}{6}$$

Atmosphäre als Druck im Mischungsraum. Alsdann:

$$u^2_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{p_0}{\mu_0}, \quad u^2_1 = \frac{2}{3} \frac{p_0}{\mu_0}, \quad u^2_2 = \frac{4}{3} \frac{p_0}{\mu_0},$$

oder

$$u_0 = 16000, \quad u_1 = 23000, \quad u_2 = 32000 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunde}}$$

für die Geschwindigkeiten, nämlich der Ansaugung der Luft, des Uebertritts vom Leuchtgas in den Mischungsraum und des Austritts des Gasgemisches in die freie Atmosphäre.

In der weiter oben stehenden Ungleichung, welche auf 6*) folgte, lassen wir die p und ebenfalls das zweite Glied weg und finden

$$16.16 - 8.32 = 0;$$

aber mit Hinzufügung des zweiten Gliedes wird doch die linke Seite grösser als Null, das ist „die nothwendige Bedingung dafür, dass eine Bewegung unseren Gleichungen gemäss möglich ist".

Zweite Annäherung: Ich führe in die vier letzten Gleichungen, die zur Bestimmung von $u_0\, u_1\, u_2\, p'_1$ benutzt wurden, die Correcturglieder du_0, du_1, du_2, dp'_1 ein und erhalte:

1') $$160\, du_0 + \frac{1}{2}\, du_1 - 80\, du_2 = -\frac{1}{2} \cdot 23000,$$

2') $$320.16000\, du_0 + 23000\, du_1 - 160.32000\, du_2 = -\frac{1}{2} \cdot 23000^2 - 160 \frac{dp'_1}{\mu_0},$$

5') $$23000\, du_1 = 2 \cdot \frac{1}{250} \frac{p_0}{\mu_0} - 2 \frac{dp'_1}{\mu_0},$$

6') $$16000\, du_0 = -\frac{dp'_1}{\mu_0}.$$

Dabei ist in der vorletzten Gleichung angenommen worden, dass sich der Druck p_1 im Gasbehälter um vier Centimeter Wasser höher stellt, als der Luftdruck in der freien Atmosphäre, das ist um nahe $\frac{1}{250}$ Atmosphäre, so dass das erste Glied der rechten Seite wird:

$$2 \cdot \frac{770}{250} \cdot 10^6,$$

oder nahe 6.10^6.

Es entsteht also aus den beiden letzten Gleichungen durch Elimination von dp'_1

$$-32000\, du_0 + 23000\, du_1 = 6.10^6,$$

woraus

$$du_1 = 260 + 1{,}4\, du_0.$$

Dies in 1') eingesetzt, mit Weglassung von $0{,}7\, du_0$ gegen $160\, du_0$, so wird aus 1')

$$16\, du_0 - 8\, du_2 = -1163;$$

und, wenn man $\frac{dp'_1}{\mu_0}$ gemäss 6') und du_1 gemäss der vorletzten Gleichung in 2') eliminirt, dann wird aus 2'):

$$2592\,du_0 - 5120\,du_2 = -27050.$$

Aus diesen beiden Gleichungen fand ich zunächst

$$du_0 = -\ \ 62,$$

dann

$$du_2 = +\ \ 21,$$

und durch Einsetzen von du_0

$$du_1 = +173,$$

und aus 6')

$$dp'_1 = \ \ 1300,$$

das ist von 10^6 oder einer Atmosphäre der nahe 800. Theil.

Demnach sind die verbesserten Werthe:

$$u_0 = 15940,\quad u_1 = 23170,\quad u_2 = 32020,\quad p'_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{800}\ \text{Atmosphäre,}$$

welche von den früheren so wenig abweichen, dass man angesichts der Näherung überhaupt, die man bei solchen Problemen vor sich hat, ganz gut die früheren Werthe belassen kann. Diese erscheinen aber jetzt durch die zweite Annäherungsrechnung gewissermassen gestützt.

Zusatz 1. Auch die Verhältnisse der Querschnitte sind, wie schon gesagt, oft derart, dass $q_0 : q_2$ nicht gleich 2 ist, wie in obiger Rechnung angenommen wurde, sondern z. B. etwas über 1, etwa $1\frac{1}{4}$, was zu einem neuen Rechenbeispiele Veranlassung geben könnte. Dagegen ist q_1 an einem anderen Brenner zwar nicht der 80. Theil wie oben, so doch der 60. Theil von q_2, also ein noch kleinerer Theil von q_0.

Zusatz 2. Die sechserlei Drücke $p_0 p_1 p_2 p'_0 p'_1 p'_2$ rühren von der Anlehnung an Kirchhoff's Formeln her, die, wie im Eingange gesagt wurde, zunächst anderen Untersuchungen als der obigen dienen sollten; für den Bunsenbrenner würden von vornherein $p_0 p_1 p'_1$ genügt haben, wie aus den von mir besonders numerirten Gleichungen hervorgeht.

Anmerkung. Ich benutze diese Gelegenheit, um einige inzwischen wahrgenommenen Korrekturen meiner Abhandlungen vom vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift beizufügen:

S. 126 Z. 14 u. 15 von unten muss α stehen statt β, was weiter keinen Eintrag thut. Dagegen werde ich bei einer künftigen Gelegenheit zeigen, dass es bei Clausius und Kirchhoff IX für c bezw. h des Wassers gegenüber dem Eise 0,959 heissen soll statt 0,945, wie auch auf meiner Seite 126 steht.

S. 191 Z. 9 von unten muss statt des zweiten D stehen $\frac{1}{2}D$, was im Uebrigen schon berücksichtigt ist.

Prof. Dr. Kurz.

V.

Homocentrische Brechung des Lichtes durch das Prisma.

Von

Dr. L. Burmester,

Professor an der Technischen Hochschule in München.

Hierzu Tafel II und III Figur 1—14.

I. Vorbemerkungen.

Bei der viel behandelten Brechung des Lichtes durch das Prisma wurde der homocentrische Durchgang der Strahlen noch nicht untersucht. Es hat sich die unrichtige Ansicht erhalten, dass bei einem einfallenden unendlich dünnen Strahlenbündel, dessen Strahlen von einem beliebigen Punkt ausgehen oder nach demselben gerichtet sind, nach dem Durchgange durch ein Prisma sich in einem Punkte nicht wieder vereinigen können. Nur in dem besonderen Fall, in welchem der Durchgang der Strahlen im Minimum der Ablenkung erfolgt, und so dicht an der brechenden Kante, dass die Strahlenlänge im Prisma als unendlich klein betrachtet werden kann, ist die Vereinigung der austretenden Strahlen erkannt; aber dieser Durchgang hat nur als Grenzfall geometrische Bedeutung.

Wir werden in dieser Abhandlung beweisen, dass bei der Brechung der Strahlen durch ein Prisma jedem Punkt, von dem die Strahlen eines bestimmten unendlich dünnen Strahlenbündels ausgehen oder nach dem sie gerichtet sind, wieder ein Punkt entspricht, durch den die entsprechenden austretenden Strahlen gehen, und dass dies auch bei beliebig vielen Prismen gilt, deren brechenden Kanten parallel sind.

Jene unrichtige Ansicht ist entstanden, weil Helmholtz* zur Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen für den Durchgang der Lichtstrahlen durch ein Prisma die Strahlenlänge im Prisma vernachlässigte gegen die Strahlenlänge von dem leuchtenden Punkt bis zum Prisma.

---

* H. Helmholtz: „Physiologische Optik." 1867. S. 243; dessen „Wissenschaftliche Abhandlungen." 1883. Bd. II. S. 164.

Zuerst wollen wir die bekannten Beziehungen erwähnen, die bei der Strahlenbrechung aus einem Medium in ein anderes bestehen, um diese Beziehungen bei den nachfolgenden Betrachtungen zu verwenden.

In Figur 1 (Taf. II) ist die Trennungsebene E zweier Medien durch die Gerade E dargestellt. Tritt ein Lichtstrahl l im Punkt Ω aus dem einen Medium in das andere brechende Medium, dann ist der gebrochene Strahl λ durch das Brechungsgesetz bestimmt. Ziehen wir durch Ω auf die Trennungsebene E das Loth $N\mathrm{N}$; setzen wir den Einfallswinkel $l\Omega N = e$, den Brechungswinkel $\lambda\Omega\mathrm{N} = \varepsilon$ und den Brechungsindex gleich n, so ist

$$1)\qquad \frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = n$$

und die Strahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$ liegen mit dem Lothe in einer Ebene, die Einfallsebene genannt wird.

Hiernach erhalten wir zu einem beliebigen Strahl $l\Omega$ den gebrochenen Strahl $\Omega\lambda$, wenn wir um Ω zwei Kreise k, $\varkappa$ beschreiben, deren Radien ΩH, $\Omega\mathrm{H}$ sich wie $1:n$ verhalten und durch den Punkt H die Senkrechte $H\mathrm{H}$ auf E ziehen, dann geht der Strahl $\Omega\lambda$ durch den Punkt H. Ist umgekehrt der Strahl $\Omega\lambda$ gegeben, so ziehen wir durch den Punkt H die Senkrechte $\mathrm{H}H$ auf E, und der Strahl $l\Omega$ geht dann durch den Punkt H.

Nehmen wir an, dass in Figur 1 durch einen Punkt A des Strahles $a\Theta$, der die Trennungsebene E im Punkt Θ trifft, unendlich viele Strahlen gehen, die mit dem Strahl $a\Theta$ ringsherum unendlich kleine Winkel bilden, dann wird die Gesammtheit dieser Strahlen ein unendlich dünnes centrales Strahlenbündel und der Strahl $a\Theta$ der Hauptstrahl desselben genannt. Die entsprechenden gebrochenen Strahlen gehen, wie die geometrische Optik gelehrt hat, durch zwei Gerade, Brennlinien, von denen die eine in einem Punkt A_1 des gebrochenen Strahles $\Theta\alpha$ senkrecht auf der Einfallsebene $a\Theta\alpha$ steht, und die andere die in der Einfallsebene liegende Gerade $A\mathrm{A}_2$ ist und auf der Trennungsebene E senkrecht steht. Dieses von den gebrochenen Strahlen gebildetes, unendlich dünnes Strahlenbündel wird ein astigmatisches Strahlenbündel und der Strahl $\Theta\alpha$ der Hauptstrahl desselben genannt.

Die Schnittpunkte A_1, A_2 dieses Hauptstrahles mit der zur Einfallsebene senkrechten Brennlinie und mit der in der Einfallsebene liegenden zur Trennungsebene senkrechten Brennlinie $A\mathrm{A}_2$ heissen resp. der erste Brennpunkt und der zweite Brennpunkt. Wenn aber angenommen wird, dass sich in einem Punkt O des Hauptstrahles $\Theta\alpha$ ein Auge befindet, welches nach diesen Punkten schaut, dann werden die Punkte A_1, A_2 auch der erste Bildpunkt und der zweite Bildpunkt des Punktes A genannt. Die im Punkt A_1 auf der Einfallsebene senkrechte Brennlinie heisst die erste Brennlinie und die andere in der Einfallsebene befindliche Brennlinie heisst die zweite Brennlinie. Die beiden

senkrechten Ebenen, welche durch den Hauptstrahl $\Theta\alpha$ gehen und diese Brennlinien enthalten, werden resp. die erste und die zweite Brennebene genannt. Die zweite Brennebene ist also identisch mit der Einfallsebene und die erste Brennebene ist senkrecht auf derselben.

Wir wollen einen Punkt, von dem die einfallenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels ausgehen oder nach dem dieselben gerichtet sind, einen Lichtpunkt nennen. Befindet sich der Punkt im Medium der einfallenden Strahlen, dann ist er ein wirklicher Lichtpunkt; befindet er sich im Medium der gebrochenen Strahlen, dann ist er ein virtueller Lichtpunkt.

Geht von einem Lichtpunkt ein sehr dünnes Bündel homogener Lichtstrahlen aus, so wird ein in dem Hauptstrahl $\Theta\alpha$ befindliches Auge O vermittelst eines auf den Punkt A_1 eingestellten Mikroskopes an der Stelle A_1 eine kurze Lichtlinie erblicken, die senkrecht zur Einfallsebene ist. Wird hierauf das Mikroskop mit dem Auge O verschoben auf den Punkt A_2 eingestellt, dann verschwindet diese Lichtlinie und es erscheint in senkrechter Richtung zu ihr eine andere kurze Brennlinie an der Stelle A_2.

Der Abstand der beiden Bildpunkte A_1, A_2 heisst die homocentrische Differenz. Fallen diese beiden Bildpunkte in einem Punkt A_0 zusammen, ist also die homocentrische Differenz gleich Null, dann gehen alle gebrochenen Strahlen durch diesen Punkt A_0, und das astigmatische Strahlenbündel geht in ein unendlich dünnes centrales Strahlenbündel über. Dem Punkt A entspricht dann ein homocentrischer Bildpunkt A_0, das heisst ein eigentliches Bild.

II. Affine Beziehungen zwischen den Lichtpunkten und den Bildpunkten bei der Brechung paralleler Lichtstrahlen.

Gehen in Figur 2 von einem Punkt A die Strahlen eines einfallenden, unendlich dünnen Strahlenbündels aus, so entspricht demselben ein astigmatisches Strahlenbündel. Um den ersten Bildpunkt A_1 desselben zu bestimmen, nehmen wir einen in der Einfallsebene liegenden Strahl $A\Theta'$ an, der mit dem einfallenden Hauptstrahl $A\Theta$ einen unendlich kleinen Winkel de einschliesst. Der entsprechende gebrochene Strahl $\Theta'\alpha'$ schneidet dann im ersten Bildpunkt A_1 den gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$ und bildet mit diesem einen unendlich kleinen Winkel $d\varepsilon$. Hiernach ist

$$\frac{de}{\Theta\Theta'} = \frac{\cos e}{A\Theta}; \quad \frac{d\varepsilon}{\Theta\Theta'} = \frac{\cos\varepsilon}{A_1\Theta}$$

und

$$\frac{de}{d\varepsilon} = \frac{A_1\Theta \, . \cos e}{A\Theta \, . \cos\varepsilon}.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$\sin e = n \sin\varepsilon$$

ergiebt sich:

$$\cos e \, . \, de = n \cos \varepsilon \, . \, d\varepsilon,$$

und demnach folgt

2) $$\frac{A_1\Theta}{A\Theta} = n\left(\frac{\cos\varepsilon}{\cos e}\right)^2.$$

Hierdurch ist der erste Bildpunkt A_1 bestimmt. Da ferner der zweite Bildpunkt A_2 durch

3) $$A_2\Theta = n \, . \, A\Theta$$

bestimmt ist, so erhalten wir

4) $$\frac{A_1\Theta}{A_2\Theta} = \left(\frac{\cos\varepsilon}{\cos e}\right)^2.$$

Der Fall $A_1\Theta = A_2\Theta$, bei welchem ein gebrochenes, unendlich dünnes centrales Strahlenbündel entsteht, tritt demnach nur dann ein, wenn der einfallende Strahl $A\Theta$ senkrecht zur Trennungsebene E ist. Nehmen wir in Figur 3 auf einem Hauptstrahl $a\Theta$ eine Reihe von Lichtpunkten $A A' A'' \ldots$ an, denen die ersten Bildpunkte $A_1 A'_1 A''_1 \ldots$ und die zweiten Bildpunkte $A_2 A'_2 A''_2 \ldots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$ entsprechen, so sind nach 2) die Verbindungsgeraden AA_1, $A'A'_1$, $A''A''_1$ parallel und die Punktreihen $A A' A'' \ldots$ und $A_1 A'_1 A''_1 \ldots$ ähnlich. Ebenso sind auch die Punktreihen $A A' A'' \ldots$ und $A_2 A'_2 A''_2 \ldots$ ähnlich, weil die Verbindungsgeraden AA_2, $A'A'_2$, $A''A''_2$, senkrecht zur Trennungsebene E und demnach parallel sind. Dasselbe gilt von den Punktreihen auf allen zu $a\Theta$ parallelen einfallenden Strahlen und den entsprechenden Punktreihen auf dem zugehörigen zu $\Theta\alpha$ parallelen Strahlen. Hiernach ist das in der Einfallsebene befindliche ebene System S der Lichtpunkte A, $A' \ldots$ affin zu den System Σ_1 der ersten Bildpunkte A_1, $A'_1 \ldots$ und dem System Σ_2 der zweiten Bildpunkte A_2, $A'_2 \ldots$; folglich sind auch die Systeme Σ_1, Σ_2 affin und die Gerade E ist für diese drei affinen Systeme Affinitätsachse.

Denken wir uns die betrachtete Einfallsebene mit den in ihr befindlichen parallelen Hauptstrahlen parallel zu sich selbst verlegt, dann erhalten wir statt jener ebenen affinen Systeme die räumlichen affinen Systeme S^r, Σ^r_1, Σ^r_2, für welche die Trennungsebene E die Affinitätsebene ist.

Sind in Figur 4 um den Punkt Ω die beiden Kreise $\varkappa$, k beschrieben, so dass die Radien $\Omega\Lambda_1$, ΩH in dem Verhältniss $n : 1$ stehen, dann erhalten wir zu einem einfallenden Hauptstrahl $l\Omega$, der den Kreis k im Punkt H schneidet, durch die zur E senkrechte Gerade HZ, welche den Kreis $\varkappa$ in dem Punkt Λ_1 trifft, den durch Λ_1 gehenden gebrochenen Hauptstrahl $\Omega\lambda$. Ziehen wir HG und $\Lambda_1\Psi$ senkrecht auf das Einfallsloth ΩN, ferner GF senkrecht auf $l\Omega$ und $\Psi\Phi_1$ senkrecht auf $\Omega\lambda$, dann ist

$$\Omega F = \Omega H \cos^2 e, \quad \Omega\Phi_1 = \Omega\Lambda_1 \cos^2\varepsilon,$$

und da

$$\Omega\Lambda_1 = n \, . \, \Omega H$$

ist, so folgt

$$\frac{\Phi_1\Omega}{F\Omega} = n\left(\frac{\cos\varepsilon}{\cos e}\right)^2.$$

Demnach sind in den beiden affinen Systemen S, Σ_1 die Punkte F, Φ_1 entsprechende Punkte. Betrachten wir F als einen Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl $l\Omega$, so ist Φ_1 der entsprechende erste Bildpunkt auf dem Hauptstrahl $\Omega\lambda$. Zu einem beliebigen Lichtpunkt L' auf dem Hauptstrahl $l\Omega$ ergiebt sich hiernach der entsprechende erste Bildpunkt Λ'_1 auf dem Hauptstrahl $\Omega\lambda$ durch die Parallele $L'\Lambda'_1$ zu $F\Phi_1$. Umgekehrt erhalten wir zu dem ersten Bildpunkt Λ_1 den zugehörigen Lichtpunkt L durch die Parallele $\Lambda_1 L$ zu $\Phi_1 F$.

Eine andere Construction zweier entsprechender Punkte der affinen Systeme S, Σ_1 ergiebt sich, wenn wir auf $\Lambda_1\Omega$ die Senkrechte $\Lambda_1 U$ erreichten, welche die Gerade E im Punkt U schneidet, ferner die Gerade UH ziehen, die das Einfallsloth ΩN im Punkt V trifft, und auf $l\Omega$ die Senkrechte VL fällen. Dann entspricht dem Lichtpunkt L der erste Bildpunkt Λ_1.

Um diese Construction zu beweisen, bezeichnen wir mit W den Schnittpunkt, welchen die auf $\Lambda_1\Omega$ Senkrechte $U\Lambda_1$ mit dem Einfallsloth ΩN bildet. Es ist dann

$$\frac{\Omega\Lambda_1}{\Omega\Phi_1} = \frac{\Omega W}{\Omega\Psi} = \frac{\Omega W}{\Lambda_1 Z} = \frac{\Omega U}{ZU} = \frac{\Omega V}{\Omega G} = \frac{\Omega L}{\Omega F},$$

also

$$\frac{\Omega\Lambda_1}{\Omega L} = \frac{\Omega\Phi_1}{\Omega F}$$

und demnach ist $L\Lambda_1$ parallel $F\Phi_1$.

Die geometrische Optik lehrt, dass im Allgemeinen einem einfallenden astigmatischen Strahlenbündel wieder ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel entspricht.

Ist in Figur 5 ein einfallendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten und zweiten Bildpunkt A_1, A_2 auf dem Hauptstrahl $\alpha\Xi$ gegeben und ist die Einfallsebene die zweite Brennebene, dann entsteht ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten und zweiten Bildpunkt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ auf den Hauptstrahl Ξa und derselben zweiten Brennebene. Die vom ersten Bildpunkt A_1 ausgehenden Strahlen liegen in der Einfallsebene, sie werden also in derselben gebrochen und vereinigen sich in dem ersten Bildpunkt $\mathfrak{A}_1$. Es besteht demnach zwischen A_1 und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe Beziehung, wie in 2) zwischen A und A_1. Die von dem zweiten Bildpunkt A_2 ausgehenden Strahlen liegen in der ersten Brennebene, die zur Einfallsebene senkrecht ist, und die gebrochenen Strahlen liegen in der zur Einfallsebene senkrechten, ersten Brennebene des gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels; sie vereinigen sich demnach in dem zweiten Bildpunkt $\mathfrak{A}_2$ und es ist die Gerade $A_2\mathfrak{A}_2$ zur Trennungsebene E senkrecht.

Nehmen wir nun beliebig viele solche einfallende astigmatische Strahlenbündel an, deren Hauptstrahlen parallel sind, dann ist das System Σ_1 der ersten Bildpunkte $A_1\ldots$ dem System $\mathfrak{S}_1$ der ersten Bildpunkte $\mathfrak{A}_1\ldots$ affin,

und diese beiden Systeme haben die Gerade E als Affinitätsachse. Ebenso ist das System Σ_2 der zweiten Bildpunkte $\mathsf{A}_2 \ldots$ dem System $\mathfrak{S}_2$ der zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}_2 \ldots$ affin, und für diese beiden Systeme ist die Gerade E auch Affinitätsachse.

III. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch das Prisma in der Normalebene desselben.

Wir nehmen in Figur 6 an, dass die Längskanten des Prismas senkrecht auf der Zeichnungsebene stehen und betrachten den Gang der Hauptstrahlen in der Zeichnungsebene, die also eine Normalebene des Prismas ist. Durch den Punkt Ω ist die brechende Kante und durch die Geraden ΩE_I, ΩE_{II} sind die Seitenflächen des Prismas gegeben, an denen die Brechung erfolgt. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die einfallenden Strahlen und die austretenden Strahlen sich in verschiedenen Medien befinden; und wir bezeichnen mit n_1, n_2 die Brechungsindices an den Ebenen ΩE_I, ΩE_{II} gegen das Prisma.

Um zu einer gegebenen Richtung $l\Omega$ eines einfallenden Hauptstrahles die Richtung des im Prisma gebrochenen Hauptstrahles und die Richtung des austretenden Hauptstrahles zu construiren, verfahren wir in der bekannten Weise. Wir beschreiben um Ω die Kreise $\varkappa$, h, i, deren Radien $\Omega\Lambda_1$, ΩH, ΩJ in dem Verhältniss

$$\Omega H : \Omega\Lambda_1 = 1 : n_1, \quad \Omega J : \Omega\Lambda_1 = 1 : n_2$$

stehen, ziehen $H\Lambda_1$ senkrecht ΩE und $\Lambda_1 J$ senkrecht ΩE_{II}. Dem in der Grenzlage befindlichen Hauptstrahl $l\Omega$, der das Prisma in der brechenden Kante trifft, entspricht geometrisch der durch Λ_1 bestimmte, im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\lambda\Omega$, dessen Strecke im Prisma als unendlich klein zu betrachten ist, und ferner der austretende Hauptstrahl $\mathfrak{l}\Omega$, der durch den Punkt J bestimmt ist.

Wenn nun ein beliebiger zu $l\Omega$ parallel einfallender Hauptstrahl $a\Theta$ gegeben ist, so ziehen wir $\Theta\Xi$ parallel $\lambda\Omega$ und $\Xi\mathfrak{a}$ parallel $\mathfrak{l}\Omega$; dann ist $\Theta\Xi$ der auch mit α bezeichnete Hauptstrahl im Prisma und $\Xi\mathfrak{a}$ der austretende Hauptstrahl.

Um zu dem Punkt Λ_1 auf $\lambda\Omega$ den entsprechenden Punkt L auf $l\Omega$ und ferner den entsprechenden Punkt $\mathfrak{L}_1$ auf $\mathfrak{l}\Omega$ zu erhalten, verfahren wir nach der S. 69 angegebenen zweiten Construction. Wir errichten in Λ_1 auf $\Lambda_1\Omega$ die Senkrechte, welche ΩE_I, ΩE_{II} resp. in den Punkten U_I, U_{II} schneidet, ziehen die Gerade $U_I H$, welche die auf ΩE_I senkrechte Gerade ΩV_I in V_1 trifft, und analog die Gerade $U_{II} J$, welche die auf ΩE_{II} senkrechte Gerade ΩV_{II} in V_{II} trifft; dann ergeben sich durch $V_I L$ senkrecht $H\Omega$ und $V_{II}\mathfrak{L}_1$ senkrecht $J\Omega$ die Punkte L, $\mathfrak{L}_1$. Befinden sich die einfallenden Strahlen und die austretenden Strahlen in demselben Medium, dann fallen die beiden Kreise h, i zusammen, und die Construction der Punkte L, $\mathfrak{L}_1$ bleibt dieselbe wie in dem allgemeinen Fall.

Nehmen wir auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen beliebigen Lichtpunkt A an, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, dann entspricht demselben ein im Prisma gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel mit dem Hauptstrahl α. Ziehen wir $A\mathsf{A}_1$ parallel $L\Lambda_1$ und $A\mathsf{A}_2$ senkrecht ΩE_I, so erhalten wir auf dem Hauptstrahl α den entsprechenden ersten Bildpunkt A_1 und den entsprechenden zweiten Bildpunkt A_2. Diesem astigmatischen Strahlenbündel entspricht ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$. Auf diesem erhalten wir vermittelst der Parallelen $\mathsf{A}_1\mathfrak{A}_1$ zu $\Lambda_1\mathfrak{L}_1$ und der Senkrechten $\mathsf{A}_2\mathfrak{A}_2$ auf ΩE_{II} den ersten Bildpunkt $\mathfrak{A}_1$ und den zweiten Bildpunkt $\mathfrak{A}_2$, welche dem Lichtpunkt A entsprechen. Eine Reihe von Lichtpunkten $A\ldots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entspricht demnach eine ähnliche Reihe von ersten Bildpunkten $\mathfrak{A}_1\ldots$ und eine ähnliche Reihe von zweiten Bildpunkten $\mathfrak{A}_2\ldots$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$. Betrachten wir den Punkt Θ als einen Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ und ziehen wir $\Theta\mathfrak{T}_1$ parallel $\Lambda_1\mathfrak{L}_1$, ferner $\Theta\mathfrak{T}_2$ senkrecht ΩE_{II}, dann ist $\mathfrak{T}_1$ der erste Bildpunkt und $\mathfrak{T}_2$ der zweite Bildpunkt auf den Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$, die dem Lichtpunkt Θ entsprechen. Ziehen wir durch den Schnittpunkt W der Geraden $\mathsf{A}_1\mathfrak{A}_1$, $\mathsf{A}_2\mathfrak{A}_2$ die Gerade $W\Theta$, welche den Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ in dem Punkt $\mathfrak{A}_0$ schneidet, dann ist $\mathfrak{A}_0$ der selbstentsprechende Punkt der ähnlichen Punktreihen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{T}_1\ldots$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{T}_2\ldots$ Zur Construction dieses selbstentsprechenden Punktes $\mathfrak{A}_0$, in dem also der erste Bildpunkt und der zweite Bildpunkt zusammenfallen, sind demnach die Geraden $\Theta\mathfrak{T}_1$, $\Theta\mathfrak{T}_2$ nicht erforderlich. Vermittelst der Geraden $\mathfrak{A}_0\mathsf{A}_{02}$ senkrecht ΩE_{II} und der Geraden $\mathsf{A}_{02}A_0$ senkrecht ΩE_I erhalten wir den entsprechenden Lichtpunkt A_0 auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$. Ferner ergiebt sich auch dieser Punkt A_0, indem wir die Gerade $\mathfrak{A}_0\mathsf{A}_{01}$ parallel $\mathfrak{L}_1\Lambda_1$ und die Gerade $\mathsf{A}_{01}A_0$ parallel $\Lambda_1 L$ ziehen. Der Punkt A_0 ist demnach auf den einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der einzige Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht. Hiernach erhalten wir den Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma giebt es auf jedem in einer Normalebene einfallenden Hauptstrahl einen einzigen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht.

Betrachten wir den Punkt $\mathfrak{A}_0$ als Lichtpunkt, so entspricht demselben der Punkt A_0 als homocentrischer Bildpunkt. Die Beziehung, dass einem Lichtpunkt ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, nennen wir Homocentricität. Es kommen hier nur solche einfallende Hauptstrahlen in Betracht, denen austretende Hauptstrahlen entsprechen; denn auf die totale Reflexion an ΩE_{II} erstreckt sich diese Beziehung nicht.

Nehmen wir in einer Normalebene beliebig viele parallele einfallende Hauptstrahlen an, dann liegen der ausgeführten Construction gemäss die zugehörigen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in

einer durch den Punkt Ω gehenden Geraden Ωg_0, und diese homocentrischen Bildpunkte befinden sich in einer entsprechenden durch den Punkt Ω gehenden Geraden $\Omega \mathfrak{g}_0$. Hieraus folgt der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma in einer Normalebene liegen die auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer Geraden Ωg_0; und diese homocentrischen Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen in einer entsprechenden Geraden $\Omega \mathfrak{g}_0$.

Um die Homocentricität aus affinen Beziehungen abzuleiten, nehmen wir in einer Normalebene ein System S von Lichtpunkten auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen an, dann entspricht dem System S dieser Lichtpunkte ein affines System Σ_1 der zugehörigen ersten Bildpunkte und ein affines System Σ_2 der zugehörigen zweiten Bildpunkte auf dem im Prisma gebrochenen parallelen Hauptstrahlen. Ferner entspricht dem System Σ_1 ein affines System $\mathfrak{S}_1$ der zugehörigen ersten Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen, und ebenso entspricht dem System Σ_2 ein affines System $\mathfrak{S}_2$ der zugehörigen zweiten Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen. Da das System S zu den Systemen Σ_1, Σ_2 und zu den Systemen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ affin ist, so sind auch die Systeme Σ_1, Σ_2 und $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ einander affin. Für die drei Systeme S, Σ_1, Σ_2 ist die Gerade ΩE_I gemeinsame Affinitätsachse. Für die beiden Systeme Σ_1, $\mathfrak{S}_1$, sowie für die beiden Systeme Σ_2, $\mathfrak{S}_2$ ist die Gerade ΩE_{II} gemeinsame Affinitätsachse. Der Punkt Ω gehört allen fünf affinen Systemen S, Σ_1, Σ_2, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ als selbstentsprechender Punkt an.

Die drei affinen Systeme S, Σ_1, $\mathfrak{S}_1$ sind in Figur 6 durch die drei entsprechenden Punkte L, Λ_1, $\mathfrak{L}_1$ auf den drei entsprechenden Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $\mathfrak{l}\Omega$ bestimmt. Die drei affinen Systeme S, Σ_2, $\mathfrak{S}_2$ sind durch die drei entsprechenden Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $\mathfrak{l}\Omega$ bestimmt; denn die entsprechenden Punkte von S, Σ_2 liegen in Senkrechten zu ΩE_I und die entsprechenden Punkte von Σ_2, $\mathfrak{S}_2$ liegen in Senkrechten zu ΩE_{II}.

Da die entsprechenden Punkte der beiden affinen Systeme $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen, so haben diese Systeme eine Affinitätsachse, die durch Ω geht; und dieselbe enthält die selbstentsprechenden Punkte, das sind die homocentrischen Bildpunkte auf den parallelen austretenden Hauptstrahlen. Diese Affinitätsachse ist die vorhin construirte Gerade $\Omega \mathfrak{g}_0$ und dieser entspricht im System S die Gerade Ωg_0, welche die zugehörigen Lichtpunkte enthält. Die Affinitätsachse $\Omega \mathfrak{g}_0$ ist durch den Schnittpunkt zweier entsprechender Geraden der Systeme $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ bestimmt und kann in folgender Weise construirt werden. Die vorher bestimmten Punkte $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ sind auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ entsprechende Punkte in dem Systemen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$. Ziehen wir

noch $L\Lambda_2$ senkrecht ΩE_I und $\Lambda_2\mathfrak{L}_2$ senkrecht ΩE_{II}, dann entspricht dem Punkt $\mathfrak{L}_1$ im System $\mathfrak{S}_1$ der Punkt $\mathfrak{L}_2$ im System $\mathfrak{S}_2$. Die entsprechenden Geraden $\mathfrak{L}_1\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{L}_2\mathfrak{T}_2$ schneiden sich in einem Punkt $\mathfrak{Y}_0$ der Affinitätsachse $\Omega\mathfrak{g}_0$; und ebenso schneiden sich die entsprechenden Geraden $\mathfrak{L}_1\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{L}_2\mathfrak{A}_2$ in einem Punkt $\mathfrak{X}_0$ der Affinitätsachse $\Omega\mathfrak{g}_0$.

Legen wir in Figur 7 in dem System S der Lichtpunkte zu der Geraden Ωg_0 eine Parallele f, welche die parallelen einfallenden Hauptstrahlen a, b, l,... in den Lichtpunkten A, B, L,... schneidet, dann entsprechen dieser Parallelen in den Systemen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ die beiden zu $\Omega\mathfrak{g}_0$ Parallelen $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, auf denen resp. die entsprechenden ersten Bildpunkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{L}_1$,... und die entsprechenden zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{L}_2$,... liegen. Demnach sind die homocentrischen Differenzen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2$,... der zugehörigen austretenden astigmatischen Strahlenbündel gleich, und es folgt der Satz:

Allen auf parallelen einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkten, die in einer zur Geraden Ωg_0 Parallelen liegen, entsprechen in den austretenden astigmatischen Strahlenbündeln gleiche homocentrische Differenzen.

Die Grösse dieser gleichen homocentrischen Differenzen ist dem Abstande der Parallelen f von der Geraden Ωg_0 proportional und wird gleich Null, wenn diese Parallele mit der Geraden Ωg_0 zusammenfällt.

Um auf rechnerischem Wege die homocentrische Differenz eines austretenden astigmatischen Strahlenbündels zu erhalten, welches einem einfallenden, unendlich dünnen centralen Strahlenbündel entspricht, nehmen wir in Figur 6 an, dass die Winkel, welche der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$, und der Hauptstrahl $\Theta\alpha$ mit dem Lothe der Ebene ΩE_I bilden resp. e_1, ε_1 sind, dass ferner die Winkel, welche der austretende Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ und der Hauptstrahl $\Xi\alpha$ mit dem Lothe der Ebene ΩE_{II} einschliessen resp. e_2, ε_2 sind.

Es ist dann

$$5)\qquad \frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2$$

und nach den Gleichungen 2), 3):

$$6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathsf{A}_1\Theta}{A\Theta} = n_1\left(\dfrac{\cos\varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2, & \dfrac{\mathsf{A}_2\Theta}{A\Theta} = n_1, \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{A}_1\Xi}{\mathsf{A}_1\Xi} = \dfrac{1}{n_2}\left(\dfrac{\cos e_2}{\cos\varepsilon_2}\right)^2, & \dfrac{\mathfrak{A}_2\Xi}{\mathsf{A}_2\Xi} = \dfrac{1}{n_2}. \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir:

$$\mathsf{A}_1\Xi = \mathsf{A}_1\Theta + \Theta\Xi = n_1 \,.\, A\Theta\left(\frac{\cos\varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2 + \Theta\Xi,$$

$$\mathsf{A}_2\Xi = \mathsf{A}_2\Theta + \Theta\Xi = n_1 \,.\, A\Theta + \Theta\Xi$$

und ferner:

7) $$\mathfrak{A}_1\Xi = \frac{1}{n_2}\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2\left[n_1 \, . \, A\Theta\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2 + \Theta\Xi\right],$$

8) $$\mathfrak{A}_2\Xi = \frac{1}{n_2}[n_1 \, . \, A\Theta + \Theta\Xi];$$

folglich ist die homocentrische Differenz:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1\Xi - \mathfrak{A}_2\Xi,$$

9) $$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{n_2}\left\{\Theta\Xi\left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1\right] + A\Theta \, . \, n_1\left[\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1\right]\right\}.$$

Für $A\Theta = 0$, also für den Punkt Θ als Lichtpunkt auf dem Hauptstrahl $a\Theta$, ist die entsprechende homocentrische Differenz

10) $$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \frac{\Theta\Xi}{n_2}\left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1\right].$$

Für $\Theta\Xi = 0$, also für einen Lichtpunkt L auf dem Hauptstrahl $l\Omega$, ist die entsprechende homocentrische Differenz

11) $$\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 = L\Omega\frac{n_1}{n_2}\left[\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1\right].$$

Setzen wir die homocentrische Differenz $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = 0$, dann ist jener Lichtpunkt A identisch mit dem Lichtpunkt A_0, dem der homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht, und es ergiebt sich:

12) $$\frac{n_1 \, . \, A_0\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1},$$

und da $n_1 . A_0\Theta = A_{02}\Theta$ ist,

13) $$\frac{A_{02}\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1}.$$

Durch die Ausdrücke in 10), 11) folgt aus 12) die Proportion:

14) $$\frac{A_0\Theta}{L\Omega} = -\frac{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2},$$

welche auch als Controle für die Construction des Lichtpunktes A_0 dienen kann. Zur Feststellung der Vorzeichen nehmen wir die Strecken in der Richtung des Lichtganges als positiv.

Nehmen wir eine andere Richtung der einfallenden Hauptstrahlen an, so erhalten wir zwei andere dieser Richtung entsprechende Gerade $\Omega\mathfrak{g}_0$, Ωg_v. Besonders ausgezeichnet sind die parallelen einfallenden Hauptstrahlen bei deren Richtung:

15) $$\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}$$

ist; denn in diesem Falle coincidiren die beiden Bildpunkte $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ auf dem Hauptstrahl $\mathfrak{l}\Omega$. Jedem Lichtpunkt auf dem einfallenden Hauptstrahl $\mathfrak{l}\Omega$

entspricht dann ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl $I\Omega$. Diese Beziehung hat aber nur geometrische Bedeutung, weil in dieser Grenzlage die Strahlenlänge im Prisma verschwindet. Auf allen anderen in dieser Richtung einfallenden Hauptstrahlen befinden sich die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, im Unendlichen und die homocentrischen Bildpunkte liegen ebenfalls im Unendlichen.

In diesem besonderen Falle ist die Gerade $I\Omega$ die Affinitätsachse der Systeme $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und da dieselbe parallel ist zu den Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte dieser Systeme, so ist die homocentrische Differenz auf einem austretenden Hauptstrahl constant gleich der Strecke $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2$; und diese Strecke ist auf den verschiedenen parallelen austretenden Hauptstrahlen proportional dem Abstande des entsprechenden einfallenden Hauptstrahles von dem Punkt Ω. Dies ergiebt sich auch aus dem Ausdruck für die homocentrische Differenz in 9). Hiernach folgt:

Auf den parallelen Hauptstrahlen, welche bei der Brechung durch ein Prisma in einer Normalebene unter der Bedingung

$$\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}$$

einfallen, giebt es im Endlichen keinen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht; einem jeden Lichtpunkt auf einem solchen Hauptstrahl entspricht eine homocentrische Differenz des austretenden astigmatischen Strahlenbündels, die unabhängig von der Lage des Lichtpunktes und proportional dem Abstande des Hauptstrahles von der brechenden Kante ist; und nur auf dem Hauptstrahl, der die brechende Kante trifft, entspricht jedem Lichtpunkt geometrisch ein homocentrischer Bildpunkt. Bei einem Prisma, welches von einem Medium umgeben ist, tritt unter jener Bedingung das Minimum der Ablenkung auf.

Jene Bedingung 15) führt bei der Berechnung des Einfallswinkels e_1 auf eine Gleichung achten Grades; wenn aber das Prisma von einem Medium umgeben ist, wird jene Bedingung im Minimum der Ablenkung erfüllt. Für diesen speciellen Fall wurde die erhaltene Beziehung von Herrn A. Gleichen abgeleitet.*

Jedem einfallenden Hauptstrahl, sofern ihm ein austretender Hauptstrahl entspricht, ist ein Lichtpunkt zugeordnet, zu dem ein homocentrischer Bildpunkt gehört. Wenn wir in Figur 6 auf verschiedene in dem Punkt Θ eintretende Hauptstrahlen die zugeordneten Lichtpunkte construiren, dann bilden dieselben eine Curve t, welche wir die Homocentroide nennen wollen; vermittelst der Homocentroide können wir zu einem beliebig ge-

* Siehe diese Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1889. Bd. 34 S. 176.

gebenen Lichtpunkt P_0 den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$ bestimmen. Wir ziehen durch P_0 die Gerade ΩP_0, welche die Homocentroide t in einem Punkt A_0 schneiden möge, dann ist die zu $A_0 \Theta$ parallele Gerade $P_0 \Theta_p$ der zugehörige einfallende Hauptstrahl p zu dem in bekannter Weise der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta_p \Xi_p$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi_p \mathfrak{p}$ bestimmt wird. Hierauf ziehen wir $P_0 \Pi_{02}$ senkrecht ΩE_I und $\Pi_{02} \mathfrak{P}_0$ senkrecht ΩE_{II}.

Zu einem System S_0 von Lichtpunkten erhalten wir ein System $\mathfrak{S}_0$ von entsprechenden homocentrischen Bildpunkten. Die Beziehung dieser beiden Systeme wollen wir die **homocentrische Verwandtschaft** und die Systeme S_0, $\mathfrak{S}_0$ die **homocentrischen Systeme** nennen. So viele Schnittpunkte, als die Gerade ΩP_0 mit der Homocentroide t bildet, so viele zugehörige einfallende Hauptstrahlen gehen im System S_0 durch den Lichtpunkt P_0; und es entsprechen demselben ebenso viele homocentrische Bildpunkte im System $\mathfrak{S}_0$. Die homocentrische Verwandtschaft, welche analytisch sehr complicirt ist, kann physikalisch eindeutig und mehrdeutig sein. Jedem unendlich fernen Lichtpunkt im System S_0 entspricht, weil zu einem unendlich dünnen Bündel paralleler einfallender Strahlen ein unendlich dünnes Bündel paralleler austretender Strahlen gehört, ein unendlich ferner homocentrischer Bildpunkt; demnach entsprechen den unendlich fernen Punkten in einem der homocentrischen Systemen S_0, $\mathfrak{S}_0$ unendlich ferne Punkte in dem anderen; und der Punkt Ω ist ein selbstentsprechender Punkt dieser Systeme.

Einer Reihe von Lichtpunkten auf einer durch Ω gehenden Geraden Ωg_0 im System S_0 entspricht eine ähnliche Reihe von homocentrischen Bildpunkten auf einer Geraden $\Omega \mathfrak{g}_0$ im System $\mathfrak{S}_0$. Die homocentrischen Systeme stehen in gleichartiger Wechselbeziehung. Wenn die Homocentroide t in Bezug auf das System S_0 construirt ist, kann man zum System S_0 das entsprechende System $\mathfrak{S}_0$ bestimmen, und umgekehrt, wenn die Homocentroide $\mathfrak{t}$ in Bezug auf das System $\mathfrak{S}_0$ construirt ist, erhält man zum System $\mathfrak{S}_0$ das entsprechende System S_0.

Wir wollen noch auf den Weg hinweisen, der zur Gleichung der Homocentroide t führt. Setzen wir die Strecke $\Omega \Theta = q$ und den brechenden Winkel $E_I \Omega E_{II} = w$, so ist

$$\frac{\Theta \Xi}{q} = \frac{\sin w}{\cos \varepsilon_2},$$

und durch Einsetzung in 12) erhalten wir:

$$16) \qquad A_0 \Theta = \frac{\frac{q}{n_1}\left[1 - \left(\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_2}\right)^2\right] \frac{\sin w}{\cos \varepsilon_2}}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1}.$$

Da ferner

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = w$$

ist, so kann man durch Elimination von e_2, ε_1, ε_2, die sehr umständlich ist, die Polargleichung der Homocentroide t erhalten. Nach Einführung rechtwinkeliger Coordinaten ergiebt sich dann die Homocentroide vom 20. Grade, und wenn $n_1 = n_2$ ist, vom 16. Grade.

Aus der Gleichung 16) folgt, dass $A_0\Theta = 0$ wird für $\cos e_1 = 0$, wenn der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$ in ΩE_I liegt. Demnach geht die Homocentroide durch den Punkt Θ und wird in demselben von der Geraden ΩE_I berührt. Dieser Punkt Θ der Homocentroide bildet eine Ausnahme; denn ihm entspricht als Lichtpunkt nur dann ein homocentrischer Bildpunkt, wenn der von ihm ausgehende Hauptstrahl im Prisma auf der Ebene ΩE_{II} senkrecht steht. Ferner wird $A_0\Theta = 0$ für $\cos \varepsilon_2 = 1$, wenn der im Prisma gebrochene Hauptstrahl senkrecht auf ΩE_{II} ist.

Es wird $A_0\Theta = \infty$ für $\cos \varepsilon_2 = 0$, wenn der im Prisma gebrochene Hauptstrahl zu ΩE_{II} parallel ist. Ferner wird $A_0\Theta = \infty$ in dem vorhin betrachteten Fall, wenn $\cos e_1 \cos \varepsilon_2 = \cos \varepsilon_1 \cos e_2$ ist.

Da dieselben homocentrischen Beziehungen in jeder Normalebene auftreten, so giebt es auf jedem einfallenden Hauptstrahl, der parallel zu einer Normalebene ist und dem ein austretender Hauptstrahl entspricht, einen Lichtpunkt, zu dem ein homocentrischer Bildpunkt gehört. Bei einem Bündel paralleler einfallender Hauptstrahlen, die einer Normalebene parallel sind, liegen auf diesen einfallenden Hauptstrahlen die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer durch die brechende Kante Ω gehende Ebene Ωg_0 und diese homocentrischen Bildpunkte liegen auch in einer durch Ω gehenden Ebene $\Omega \mathfrak{g}_0$. Dem System G_0 der Lichtpunkte in der Ebene Ωg_0 entspricht ein affines System $\mathfrak{G}_0$ der homocentrischen Bildpunkte, weil das Bündel der einfallenden parallelen Hauptstrahlen dem Bündel der austretenden parallelen Hauptstrahlen affin ist.

Wir wollen, wenn das Prisma sich in einem Medium befindet, für die Homocentroide eine besondere Construction angeben. In diesem wichtigen speciellen Fall ist, wenn wir mit n den Brechungsindex des Prismas bezeichnen $n = n_1 = n_2$; und demnach

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n = \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2}.$$

Durch Umformung erhalten wir dann aus 13):

$$17) \quad \frac{\mathsf{A}_{02}\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{\cos^2 e_1 \sin^2 e_2}{\sin^2 e_1 - \sin^2 e_2},$$

und ferner

$$18) \quad \frac{\mathsf{A}_{02}\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{\tan^2 e_2}{\tan^2 e_1 - \tan^2 e_2} = \frac{\cot^2 e_1}{\cot^2 e_2 - \cot^2 e_1}.$$

Um hiernach die Homocentroide in Figur 8 zu construiren, beschreiben wir, damit wir einen Strahlengang erhalten, um den Punkt Θ die Kreise k, $\varkappa$ mit den Radien im Verhältniss $1:n$; dann ergiebt sich zu einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$, der den Kreis k im Punkt H schneidet, vermittelst $H\Lambda_1$ senkrecht ΩE_I und $\Lambda_1 J$ senkrecht ΩE_{II} der im Prisma gebrochene, mit α bezeichnete Hauptstrahl $\Lambda_1\Theta$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ ist parallel $J\Theta$.

Um nun auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ den Lichtpunkt A_0 nach 18) zu erhalten, dem ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht, ziehen wir HH_I senkrecht $H\Theta$ und $H_I G$ senkrecht ΩE_I, dann ist $HG = \Theta H \cot^2 e_1$; ferner ziehen wir zu ΩE_{II} die Parallele $\Theta E'_{II}$, hiernach JJ_{II} senkrecht $J\Theta$ und $J_{II}K$ senkrecht $\Theta E'_{II}$, dann ist $JK = \Theta J \cot^2 e_2$. Demzufolge erhalten wir durch die Proportion

$$\frac{\mathsf{A}_{02}\Theta}{\Theta\Xi} = \frac{HG}{JK - HG}$$

die Strecke $\mathsf{A}_{02}\Theta$. Durch die Senkrechte $\mathsf{A}_{02}A_0$ auf ΩE_I ergiebt sich der Lichtpunkt A_0 und durch die Senkrechte $\mathsf{A}_{02}\mathfrak{A}_0$ auf ΩE_{II} der entsprechende homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$. Wenn wir in dieser Weise auf mehreren nach Θ gerichteten einfallenden Hauptstrahlen die zugehörigen Lichtpunkte construiren, dann bilden diese Lichtpunkte die Homocentroide $t_w t_v$, die aus zwei Theilen besteht; denn dieselbe ist nur für alle einfallende Hauptstrahlen, den austretende Hauptstrahlen entsprechen, construirt. In analytischer Auffassung hat die Homocentroide eine Fortsetzung, der aber keine physikalische Deutung entspricht.

Auf dem einfallenden Hauptstrahl, der in $E_I\Theta$ liegt, befindet sich der zugeordnete Punkt in Θ. Auf dem im Minimum der Ablenkung einfallenden Hauptstrahl $m\Theta$, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Xi_m$ und der austretende Hauptstrahl $\Xi_m\mathfrak{m}$ entspricht, befindet sich der Lichtpunkt M_0^∞ im Unendlichen. Für die einfallenden Hauptstrahlen, bei welchen der Winkel $e_1 < e_2$ ist, werden die Abstände der Lichtpunkte von Θ negativ, und diesen Hauptstrahlen entsprechen virtuelle Lichtpunkte. Dem einfallenden Hauptstrahl $z\Theta$ entspricht im Prisma der Hauptstrahl $\Theta\Xi_z$ und der in ΩE_{II} liegende austretende Hauptstrahl $\Xi_z\mathfrak{z}$, demnach ist der Winkel $e_2 = 90^0$ und $\cot e_2 = 0$; also $-\mathsf{A}_{02}\Theta = \Theta\Xi_z$. Durch die Senkrechte $\Xi_z Z_0$ auf ΩE_I ergiebt sich der Lichtpunkt Z_0 auf dem Hauptstrahl $z\Theta$, der die Grenze der in Θ eintretenden Hauptstrahlen bildet.

Der Theil t_w der Homocentroide enthält die wirklichen Lichtpunkte und geht die Gerade ΩE_I berührend von Θ aus nach dem unendlich fernen Punkt M_0^∞ des im Minimum der Ablenkung einfallenden Hauptstrahles $m\Theta$. Der andere Theil t_v der Homocentroide enthält die virtuellen Lichtpunkte und geht von Z_0 nach dem unendlich fernen Punkt M_0^∞.

Ist ein beliebiger Lichtpunkt P_0 gegeben, so erhalten wir in der angegebenen Weise vermittelst der Homocentroide den zugeordneten ein-

fallenden Hauptstrahl, indem wir die Gerade ΩP_0 ziehen, welche die Homocentroide in einem Punkt A_0 schneidet; dann ist $P_0\Theta_p$ parallel $A_0\Theta$ der einfallende Hauptstrahl p, zu dem die entsprechenden Hauptstrahlen $\Theta_p\Xi_p$, $\Xi_p\mathfrak{p}$ construirt werden. Durch $P_0\Pi_{02}$ senkrecht ΩE_I und $\Pi_{02}\mathfrak{P}_0$ senkrecht ΩE_{II} ergiebt sich der entsprechende homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$. So kann man zu jedem anderen Punkt P_0 im System S_0 den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$ im System $\mathfrak{S}_0$ bestimmen.

Es ist die Gerade $m'\Omega m''$ parallel $m\Theta$ und die Gerade $s'\Omega$ parallel $s\Theta$ gezogen, um die Gebiete zu begrenzen, in denen einfallende Hauptstrahlen mit wirklichen Lichtpunkten oder mit virtuellen Lichtpunkten liegen. Denken wir uns das Prisma über E_I, E_{II} unbegrenzt, dann kann jeder Punkt innerhalb des Winkels $E_I\Omega m'$ ein wirklicher Lichtpunkt und jeder Punkt innerhalb des Winkels $Z_0\Omega m''$ als ein virtueller Lichtpunkt betrachtet werden. Denn zu allen einfallenden Hauptstrahlen, die einer innerhalb des Winkels $E_I\Omega m'$ durch Ω gehenden Geraden parallel sind, gehören wirkliche Lichtpunkte, und zu allen einfallenden Hauptstrahlen, die einer innerhalb des Winkels $m'\Omega s'$ durch Ω gehenden Geraden parallel sind, gehören virtuelle Lichtpunkte. Allen anderen einfallenden Hauptstrahlen entsprechen physikalisch keine austretende Hauptstrahlen und somit auch keine Lichtpunkte. Hierdurch ist das Gebiet der Lichtpunkte des Systems S_0, den homocentrische Bildpunkte des Systems $\mathfrak{S}_0$ entsprechen, begrenzt.

Im betrachteten Falle haben wir als typisches Beispiel ein in Luft befindliches Glasprisma mit dem brechenden Winkel von 60^0 und dem Brechungsindex $n = \frac{3}{2}$ angenommen. Die construirte Homocentroide $t_w t_v$ wird von jeder innerhalb der Winkel $E_I\Omega m'$ und $Z_0\Omega m''$ durch Ω gehenden Geraden nur in einem Punkt geschnitten; demnach entspricht physikalisch jedem Lichtpunkte im System S_0 eindeutig ein homocentrischer Bildpunkt im System $\mathfrak{S}_0$ und umgekehrt.

Die experimentelle Bestätigung der Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma wurde in folgender Weise (Figur 9 Taf. III) ausgeführt. Auf einem Block steht ein Glasprisma $E_I\Omega E_{II}$, dessen brechende Winkel 60^0 und dessen Brechungsindex für die Spectrumlinie D gleich 1,7 ist. Auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ ist der Lichtpunkt A_0 und auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ ist der entsprechende homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ construirt; ferner ist zu einem Lichtpunkt A auf diesem einfallenden Hauptstrahl der erste Bildpunkt $\mathfrak{A}_1$ und der zweite Bildpunkt $\mathfrak{A}_2$ construirt. Ein Glaswürfel $pqrs$ mit einer berussten Seite pq, in deren Russschicht mit einer Nadel eine sehr kleine Oeffnung gemacht ist, steht so auf dem Block, dass diese Oeffnung den Lichtpunkt A_0 vertritt. Vermittelst der Natronflamme F einer auf dem Block befindlichen Lampe wird durch die kleine Oeffnung ein sehr dünnes Strahlenbündel erzeugt.

Der Block mit Prisma, Würfel und Lampe ist in Parallelführung nach Richtung der Geraden $\Xi\mathfrak{a}$ verschiebbar. Durch ein festgestelltes Mikroskop M, ein Abbe'sches Focometer, bei dem die Entfernung eines deutlich sichtbaren Objectes von dem Objectiv O gleich 110 mm ist, wurde nach Einstellung des verschiebbaren Blockes gegen das feststehende Mikroskop für die Strecke $\mathfrak{A}_0 O = 110$ mm der homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ als kleine helle Oeffnung so deutlich gesehen, dass auch die Rauhigkeit des Oeffnungsrandes in der Russschicht scharf erkennbar war. Nachdem durch Verschieben des Blockes die Strecke $\mathfrak{A}_0 O$ grösser oder kleiner als 110 mm gemacht wurde, vergrösserte sich das beobachtete, matter werdende Lichtfeld und dadurch wurde das dünne centrale Strahlenbündel sichtbar.

Im Gegensatz hierzu wurde der Würfel $pqrs$ in gleicher Weise nach dem Lichtpunkt A gestellt und der Block so verschoben, dass die Strecke $\mathfrak{A}_2 O = 110$ mm war, dann zeigte sich deutlich eine kurze horizontale Lichtlinie. Ferner wurde der Block so verschoben, dass die Strecke $\mathfrak{A}_1 O = 110$ mm war und es erschien deutlich eine kurze vertikale Lichtlinie. In anderen Stellungen des Blockes konnte die Gestalt des austretenden astigmatischen Strahlenbündels beobachtet werden.

Wir wollen in Figur 10 (Taf. III) als Beispiel noch die homocentrische Brechung der Lichtstrahlen durch eine Platte betrachten, an deren beiden Seiten sich verschiedene Medien befinden. Weil die Ebenen E_I, E_{II} parallel sind, vereinfachen sich die Constructionen und wir gelangen zu anderen Constructionen, die diesem speciellen Fall eigenthümlich sind. Die Brechungsindices an den Ebenen E_I, E_{II} gegen die Platte seien n_1, n_2. Einen Strahlengang erhalten wir in der bekannten Weise. Wir beschreiben um den Punkt Θ die Kreise h, i, $\varkappa$, deren Radien ΘH, ΘJ, $\Theta \mathsf{A}_1$ in dem Verhältniss

$$\Theta H : \Theta \mathsf{A}_1 = 1 : n_1, \quad \Theta J : \Theta \mathsf{A}_1 = 1 : n_2$$

stehen, so ergeben sich zu einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entsprechende Hauptstrahlen $\Theta\Xi$ resp. α, und $\Xi\mathfrak{a}$, indem wir durch H auf E_I die Senkrechte $J\mathsf{A}_1$ ziehen. Nach der S. 71 angegebenen allgemeinen Construction des auf $a\Theta$ liegenden Lichtpunktes A_0, dem ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht, ziehen wir $\mathsf{A}_1 U_I$ senkrecht auf $\mathsf{A}_1\Theta$ und die Geraden $U_I H$, $U_I J$, welche die Normale ΘN der Ebene E_I resp. in V_I, V_{II} schneiden. Alsdann fällen wir auf $H\Theta$ die Senkrechte $V_I A$ und auf $J\Theta$ die Senkrechte $V_{II}\mathfrak{A}_1$. Ferner ziehen wir die Gerade AW senkrecht E_I und die Gerade $\mathsf{A}_1\mathfrak{A}_1$, die sich im Punkt W treffen; dann liefert die Gerade $W\Theta$ den homocentrischen Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ und vermittelst der Geraden $\mathfrak{A}_0 A_0$, die zu E_I senkrecht ist, ergiebt sich auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der zugehörige Lichtpunkt A_0.

Einfachere Constructionen erhalten wir durch Specialisirung der Gleichung 12):

$$\frac{n_1 A_0 \Theta_1}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2}{\left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1} \cdot \frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - 1};$$

denn im betrachteten speciellen Fall ist $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, und demnach

$$\frac{n_1 A_0 \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2}{\left(\frac{\cos e_2}{\cos e_1}\right)^2 - 1}.$$

Da ferner

$$\frac{\sin e_1}{\sin \varepsilon_1} = n_1, \quad \frac{\sin e_2}{\sin \varepsilon_2} = n_2$$

ist, so folgt:

$$\frac{A_0 \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{n_2^2 - 1}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} \cdot \left(\frac{\cos e_1}{\cos \varepsilon_1}\right)^2.$$

Hiernach kann man die Strecke $A_0 \Theta$ construiren, wenn man die constante Grösse

$$\frac{n_2^2 - 1}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} = k$$

vorher berechnet.

Zweckmässiger aber ist es, wenn wir in die Gleichung die Dicke d der Platte, also den Abstand der beiden Ebenen E_I, E_{II} einführen. Es ist dann

$$\Theta \Xi = \frac{d}{\cos \varepsilon_1}$$

und

$$A_0 \Theta = \frac{d (n_2^2 - 1)}{n_1 (n_1^2 - n_2^2)} \cdot \frac{\cos^2 e_1}{\cos^3 \varepsilon_1},$$

oder

$$A_0 \Theta = d . k \frac{\cos^2 e_1}{\cos^3 \varepsilon_1}.$$

Hiernach erhalten wir, nachdem in Figur 11 auf $N\Theta$ die Strecke $\Theta N = d . k$ gemacht ist, die folgende Construction. Wir ziehen von dem Schnittpunkt H_1 des Hauptstrahles $a\Theta$ und des Kreises $\varkappa$ die Gerade $H_1 H' \perp N\Theta$, $H' H'' \perp \Theta H$, dann ist $\Theta H'' = \Theta H_1 \cos^2 e_1$; ferner $\mathsf{A}_1 Y \perp N\Theta$, $Y Y' \perp \mathsf{A}_1 \Theta$, $Y' Y'' \perp N\Theta$, dann ist $\Theta Y'' = \Theta \mathsf{A}_1 \cos^3 \varepsilon_1$. Hiernach ergiebt sich, indem wir zu $Y'' H''$ die Parallele $N A_0$ ziehen, der Lichtpunkt A_0 auf den einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$. Auf den zu $J\Theta$ parallelen, austretenden Hauptstrahl $\Xi \mathfrak{a}$ erhalten wir durch $A_0 \mathfrak{A}_0$ senkrecht auf E_I den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$.

Bezeichnet X den Schnittpunkt, welchen der Kreis h mit $\mathsf{A}_1 \Theta$ bildet, dann ist $n_1 . X\Theta = \mathsf{A}_1 \Theta$, und da ferner nach 6)

$$\frac{\mathsf{A}_1 \Theta}{A \Theta} = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2$$

ist, so folgt:

$$\frac{X\Theta}{A\Theta} = \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2;$$

und demnach erhalten wir

$$A_0\Theta = d.k \frac{A\Theta}{X\Theta . \cos \varepsilon_1}.$$

Hieraus ergiebt sich die folgende Construction des Punktes A_0 in Figur 11. Wir ziehen auf $A_1\Theta$ die Senkrechte $A_1 U_I$, dann die Gerade $U_I H$ bis V_I und $V_I A$ senkrecht $H\Theta$; ferner ziehen wir die Senkrechte XX' auf $N\Theta$ und NA_0 parallel $X'A$.

In Figur 10 sind für mehrere im Punkt Θ eintretende Hauptstrahlen die Lichtpunkte A_0... construirt, welche die gezeichnete Homocentroide t bilden. Die Polargleichung derselben ist, wenn wir $A_0\Theta = r$ setzen:

$$r = \frac{d . k . \cos^2 e_1}{\left[1 - \left(\frac{\sin e_1}{n_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Umwandlung in rechtwinkelige Coordinaten ergiebt sich, dass diese Homocentroide vom 6. Grade ist. In der Zeichnung ist $n_1 = \frac{3}{2}$, $n_2 = \frac{4}{3}$ genommen und es besteht diese Homocentroide, so weit sie physikalisch zur Geltung kommt, aus einem Oval, welches von dem senkrecht zur Platte einfallenden Hauptstrahl $N\Theta$ symmetrisch getheilt wird. In geometrischer Auffassung gehört zu der Homocentroide noch ein zweites nicht gezeichnetes Oval, welches bezüglich der Geraden E_I zu dem Oval t symmetrisch ist. Wenn $n_1 < 1$ ist, dann wird für $\sin e_1 = n_1$ der Radius vector $r = \infty$ und die Homocentroide hat in diesem Falle zwei unendlich ferne reelle Punkte.

Ziehen wir durch einen angenommenen Lichtpunkt P_0 im System S_0 zu E_I eine Parallele g_0, welche die Homocentroide t schneidet, z. B. in den beiden Punkten A_0, A'_0, so sind dem Lichtpunkt P_0 die beiden einfallenden Hauptstrahlen $p\Theta_p$, $p'\Theta'_p$ zugeordnet, die resp. zu $A_0\Theta$, $A'_0\Theta$ parallel sind; und diesen Hauptstrahlen entsprechen die austretenden Hauptstrahlen $\Xi_p \mathfrak{p}$, $\Xi'_p \mathfrak{p}'$, auf denen wir durch $P_0 \mathfrak{P}_0$ senkrecht zu E_I den zugehörigen gemeinsamen, homocentrischen Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$ erhalten. Es entspricht demnach einem im System S_0 befindlichen Lichtpunkt P_0, obwohl demselben zwei einfallende Hauptstrahlen zugeordnet sind, ein einziger homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$ im System $\mathfrak{S}_0$. Einer Reihe von Lichtpunkten $A_0 P_0$... auf einer zu E_I Parallelen g_0 im System S_0 entspricht eine congruente Reihe von homocentrischen Bildpunkten $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{P}_0$... auf einer zu E_I Parallelen $\mathfrak{g}_0$ im System $\mathfrak{S}_0$. Das System S_0 der Lichtpunkte, denen zwei einfallende Hauptstrahlen zugeordnet sind und homocentrische Bildpunkte entsprechen, ist von der Geraden E_I und von der zu ihr parallelen Geraden u_0, die durch N geht, begrenzt.

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch eine Platte besitzt jeder Hauptstrahl, der senkrecht zur Platte einfällt, also ohne Brechung durchgeht, die Eigenthümlichkeit, dass jedem Lichtpunkt auf demselben ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Demzufolge entspricht einem System S von Lichtpunkten auf senkrecht einfallenden Hauptstrahlen ein System $\mathfrak{S}_2$ von homocentrischen Bildpunkten.

Nehmen wir auf den senkrecht einfallenden Hauptstrahl $N\Theta$ einen beliebigen Lichtpunkt F an, dem der homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{F}_2$ entspricht, so ist analog der Gleichung 8)

$$\mathfrak{F}_2\Xi = \frac{1}{n_2}[n_1 F\Theta + \Theta\Xi],$$

und, wenn wir $\Theta\Xi = d$ einsetzen, ergiebt sich

$$\mathfrak{F}_2\Theta = \frac{1}{n_2}[n_1 F\Theta + d] - d.$$

Die Systeme S, $\mathfrak{S}_2$ sind affin und ihre Affinitätsachse v, welche durch den selbstentsprechenden Punkt D des Hauptstrahles $N\Theta$ geht, ist parallel zu E_I. Setzen wir $\mathfrak{F}_2\Theta = F\Theta = D\Theta$, so wird der selbstentsprechende Punkt D durch

$$D\Theta = \frac{(1-n_2)d}{n_2 - n_1}$$

bestimmt. Hieraus folgt:

Jedem Lichtpunkt in der Geraden v auf einem senkrecht einfallenden Hauptstrahl entspricht ein mit diesem Lichtpunkt coincidirender homocentrischer Bildpunkt.

Betrachten wir z. B. jenen Lichtpunkt P_0 auch zum System S gehörend, so ist $\mathfrak{P}_2$ der entsprechende homocentrische Bildpunkt im System $\mathfrak{S}_2$. Hiernach entsprechen jedem Lichtpunkt P_0, der zwischen den beiden Parallelen E_I, u_0 liegt, zwei homocentrische Bildpunkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_2$. Im Raum bilden die von einem Lichtpunkt P_0 ausgehenden Hauptstrahlen $pp'\ldots$ eine Rotationskegelfläche, deren Basiskreis in der Ebene E_I den Durchmesser $\Theta_p\Theta'_p$ besitzt; und die zugehörigen austretenden Hauptstrahlen vereinigen sich in dem entsprechenden Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$.

IV. Homocentricität bei der Brechung schräg einfallender Lichtstrahlen durch das Prisma.

Nachdem wir die homocentrischen Beziehungen bei der Brechung der Lichtstrahlen durch das Prisma in der Normalebene erkannt haben, wollen wir auch die homocentrischen Beziehungen aufsuchen, welche bei schräg einfallenden Hauptstrahlen auftreten, die gegen eine Normalebene des Prisma geneigt sind, also nicht in einer Normalebene liegen.

Ist in Figur 12 ein schräg einfallender Hauptstrahl $a\Theta$ angenommen, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Xi$ resp. α, und der austretende Hauptstrahl Ξa entspricht, dann sind die Einfallsebene $a\Theta\alpha$ und die Aus-

fallsebene $\mathfrak{a}\Xi\alpha$ gegen einander geneigt. Diese beiden Ebenen fallen nur dann zusammen, wenn der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$ in einer Normalebene des Prismas liegt. Denken wir uns auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen Lichtpunkt A_0 angenommen, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, so entspricht diesem Strahlenbündel ein im Prisma gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl α ist, und welches α' heissen möge. Die zweite Brennebene dieses astigmatischen Strahlenbündels α' ist die Ebene $a\Theta\alpha$ und die erste Brennebene desselben steht im Hauptstrahl α senkrecht auf der Ebene $a\Theta\alpha$. Denken wir uns ebenso auf dem Hauptstrahl $\mathfrak{a}\Xi$ einen Punkt $\mathfrak{A}_0$ angenommen, in dem sich die austretenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen, so entstammt dasselbe einem im Prisma gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl α ist, und welches α'' heissen möge. Die zweite Brennebene dieses astigmatischen Strahlenbündels α'' ist die Ebene $\mathfrak{a}\Xi\alpha$ und die erste Brennebene desselben steht im Hauptstrahl α senkrecht auf der Ebene $\mathfrak{a}\Xi\alpha$. Wären nun die beiden astigmatischen Strahlenbündel α', α'' identisch, dann wäre A_0 ein Lichtpunkt, dem der homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht. Damit aber diese beiden astigmatischen Strahlenbündel identisch werden, ist zunächst erforderlich, dass die Brennebenen des astigmatischen Strahlenbündels α' mit den Brennebenen des astigmatischen Strahlenbündels α'' zusammenfallen. Dies ist nur möglich, erstens, wenn die beiden ersten Brennebenen und die beiden zweiten Brennebenen der astigmatischen Strahlenbündel α', α'' identisch sind, und wir erhalten dann den schon betrachteten Fall, der bei dem Strahlengang in einer Normalebene eintritt; zweitens, wenn bei den astigmatischen Strahlenbündeln α', α'' die erste Brennebene von α' mit der zweiten Brennebene von α'' und die zweite Brennebene von α' mit der ersten Brennebene von α'' zusammenfällt. Ist ferner in diesem Fall der erste Bildpunkt von α' mit dem zweiten Bildpunkt von α'' und der zweite Bildpunkt von α' mit dem ersten Bildpunkt von α'' vereint, dann sind die beiden astigmatischen Strahlenbündel α', α'' identisch. Die Neigung der Brennlinien gegen den Hauptstrahl eines astigmatischen Strahlenbündels bedingt dasselbe nur in unendlich kleiner Grösse höherer Ordnung, und deshalb kommt diese Neigung hier nicht in Betracht. Damit also bei einem schräg einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ einem Lichtpunkt A_0 auf demselben ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ entspricht, muss die Strecke $\Theta\Xi$ im Prisma so liegen, dass die durch sie gehenden Ebenen $a\Theta\Xi$, $\mathfrak{a}\Xi\Theta$ senkrecht zu einander sind.

Behufs der Construction einer solchen Strecke $\Theta\Xi$ ist in Figur 12 das Prisma mit der vertikalen brechenden Kante Ω in schiefer Parallelprojection so dargestellt, dass die Prismaseite ΩE_{II} in der Bildebene liegt und die Parallelprojection ΘO der von einem Punkt Θ der Prismaseite ΩE_I auf die Bildebene gefällten Senkrechten gleich der Hälfte ihrer wahren Grösse

ist. Im Punkt Θ ist auf der Prismaseite ΩE_I die Senkrechte ΘN errichtet, welche die Prismaseite ΩE_{II} im Punkt N trifft. Beschreiben wir nun über ON als Durchmesser in der Ebene ΩE_{II} einen Kreis ξ und nehmen wir auf demselben einen Punkt Ξ an, dann ist die Ebene $\Theta\Xi O$ senkrecht auf der Ebene $\Theta\Xi N$. Jede Strecke, die von dem Punkt Θ nach einem Punkt Ξ des Kreises ξ geht, hat also eine solche Lage, dass die durch sie gelegten beiden Ebenen $\Theta\Xi N$ und $\Theta\Xi O$, von denen die erste senkrecht auf der Ebene ΩE_I, die zweite senkrecht auf der Ebene ΩE_{II} ist, zu einander senkrecht stehen. Es ist dann die Ebene $\Theta\Xi N$ die Einfallsebene für einen einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$, dem der im Prisma gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Xi$ entspricht; und die Ebene $\Theta\Xi O$ ist die Ausfallsebene für den zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$. Die Gesammtheit der von Θ ausgehenden Hauptstrahlen $\Theta\Xi$ bilden eine Kegelfläche $\Theta\xi$, dessen Spitze Θ und dessen Basis der Kreis ξ ist.

Um nun zu einem angenommenen, im Prisma gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\Xi$ den zugehörigen einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ und den zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ darzustellen, nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass an den Prismaseiten ΩE_I, ΩE_{II} sich verschiedene Medien befinden und n_1, n_2 die Brechungsindices an diesen Seiten gegen das Prisma sind. Legen wir die Einfallsebene $\Theta\Xi N$ gedreht um ΞN in die Bildebene, dann gelangt der Punkt Θ nach Θ' in die Gerade $O\Xi$, und $N\Theta'$ ist gleich der wahren Grösse von $N\Theta$. Ziehen wir nun zu $N\Theta'$ die Parallele $\Xi\Phi$, welche den um Θ mit dem Radius $\frac{1}{n_1}\Theta'\Xi$ beschriebenen Kreis im Punkt Φ trifft, und ferner die Gerade $\Theta'\Phi$, die $N\Xi$ im Punkt Ξ_a schneidet, so ist die Gerade $\Theta\Xi_a$ der einfallende Hauptstrahl $a\Theta$. Dieser Hauptstrahl $a\Theta$ bildet mit der Normalen ΘN der Ebene ΩE_I den Winkel $e_1 = \Xi_a\Theta'\Xi$ und der Hauptstrahl $\alpha\Theta$ bildet mit dieser Normalen den Winkel $\varepsilon_1 = \Xi\Theta' N$.

Legen wir die Ausfallsebene $\Theta\Xi O$ gedreht um $O\Xi$ in die Bildebene, dann gelangt Θ nach Θ'' in die auf $O\Xi$ Senkrechte $O\Theta''$, welche gleich der wahren Grösse von $O\Theta$ ist, und es ist $\Xi\Theta'' = \Xi\Theta'$. Wir beschreiben hierauf um Ξ mit dem Radius $\frac{1}{n_2}\Xi\Theta''$ einen Kreis, der $O\Theta''$ im Punkt Ψ'' schneidet. Diesem Punkt Ψ'' in der Umlegung entspricht der Punkt Ψ auf der Geraden $O\Theta$ und es ist dann $\Psi\Xi$ der austretende Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$. Dieser Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ bildet mit der Normalen ΘO der Ebene ΩE_{II} den Winkel $e_2 = O\Psi''\Xi$ und der Hauptstrahl $\alpha\Xi$ bildet mit dieser Normalen den Winkel $\varepsilon_2 = O\Theta''\Xi$. Damit ist ein Gang der Hauptstrahlen $a\Theta$, $\Theta\Xi$, resp. α, und $\Xi\mathfrak{a}$ dargestellt, bei dem die Ebenen $a\Theta\Xi$, $\Theta\Xi\mathfrak{a}$ zu einander senkrecht sind.

Nehmen wir auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ einen Punkt A an, von dem ein unendlich dünnes Strahlenbündel ausgeht, und bestimmen auf dem Hauptstrahl $\alpha\Theta$ im Raum den Punkt A_1, so dass:

$$\frac{A_1\Theta}{A\Theta} = n_1\left(\frac{\cos\varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2$$

ist, und ziehen wir die Gerade $A\,A_2$ bis an den Hauptstrahl $\alpha\Theta$ senkrecht zur Ebene ΩE_I, also parallel zu ΘN, dann entsprechen dem Lichtpunkt A auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der erste und zweite Bildpunkt A_1, A_2 auf dem Hauptstrahl $\alpha\Theta$ des im Prisma gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels. Bestimmen wir ferner auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\mathfrak{a}$ im Raum den Punkt $\mathfrak{A}_1$, so dass

$$\frac{\mathfrak{A}_1\Xi}{A_2\Xi} = \frac{1}{n_2}\left(\frac{\cos e_2}{\cos\varepsilon_2}\right)^2$$

ist, und ziehen wir die Gerade $A_1\,\mathfrak{A}_2$ senkrecht zur Ebene ΩE_{II}, also parallel zu ΘO bis an den Hauptstrahl $\Xi\alpha$, dann entsprechen dem Lichtpunkt A der erste und zweite Bildpunkt $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ auf dem Hauptstrahl $\Xi\alpha$ des austretenden astigmatischen Strahlenbündels. In dem astigmatischen Strahlenbündel, welches in dem Prisma gebrochen wird, geht von dem Punkt A_2 ein in der Ebene $\Theta\Xi O$ liegender Strahlenfächer aus, welcher an der in der Ebene ΩE_{II} liegenden Geraden ΞO gebrochen wird und dessen gebrochene Strahlen sich im Punkt $\mathfrak{A}_1$ vereinigen; und ferner geht von dem Punkt A_1 ein in der Ebene $\Theta\Xi N$ liegender Strahlenfächer aus, welcher an der in der Ebene ΩE_{II} liegenden Geraden ΞN gebrochen wird und dessen gebrochene Strahlen sich in dem Punkt $\mathfrak{A}_2$ vereinen.

Einer Reihe von Lichtpunkten A... auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entsprechen demnach ähnliche Reihen der Punkte $\mathfrak{A}_1$... und $\mathfrak{A}_2$... auf dem austretenden Hauptstrahl $\Xi\alpha$. Den selbstentsprechenden Punkt $\mathfrak{A}_0$ dieser beiden ähnlichen Punktreihen erhalten wir, wie oben gezeigt wurde, indem wir durch den Schnittpunkt W der Geraden $A_1\mathfrak{A}_2$, $A_2\mathfrak{A}_1$ und den Punkt Θ die Gerade $W\Theta$ ziehen, welche den Hauptstrahl $\Xi\alpha$ im Punkt $\mathfrak{A}_0$ trifft. Ziehen wir $\mathfrak{A}_0 A_{01}$ parallel ΘO und $A_{01}A_0$ parallel $A_1 A$, so erhalten wir auf $a\Theta$ den Lichtpunkt A_0, dem der homocentrische Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch ein Prisma giebt es auf jedem schräg einfallenden Hauptstrahl, dessen im Prisma gebrochener Hauptstrahl einer Mantellinie der Kegelfläche $\Theta\xi$ parallel ist, einen einzigen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht.

Hierbei ist aber zu beachten, dass die Kegelfläche $\Theta\xi$ nur soweit physikalisch zur Geltung kommt, als einem Hauptstrahl $\Theta\Xi$ ein einfallender und ein austretender Hauptstrahl entspricht.

Nehmen wir in Figur 13 beispielsweise ein Glasprisma mit dem brechenden Winkel von 45^0 an, umgeben von Luft, dann ist $n_1 = n_2 = \frac{3}{2}$. Für diesen

Fall sind zu den Punkten $\Xi\ldots$ des Kreises ξ die ensprechenden Punkte Ξ_a .., wie vorhin angegeben wurde, construirt. Durch die Punkte $\Xi_a\ldots$ erhalten wir eine Curve ξ_a, die dem Kreise ξ entspricht. Von diesem Kreise kommen aber nur die beiden zu ON symmetrisch liegenden Bogenstücke $\Xi^x\Xi^{\mathfrak{x}}$, $\Xi^{\mathfrak{y}}\Xi^{\mathfrak{y}}$ physikalisch zur Geltung; denn den Hauptstrah en $\Theta\Xi^x$, $\Theta\Xi^y$ entsprechen die einfallenden Hauptstrahlen $\Xi_a^x\Theta$, $\Xi_a^y\Theta$, ie in der Ebene ΩE_I liegen, und den Hauptstrahlen $\Theta\Xi^{\mathfrak{x}}$, $\Theta\Xi^{\mathfrak{y}}$ entspreche austretende Hauptstrahlen, die in der Ebene ΩE_{II} liegen. Demnach ko men in diesem Falle von der Curve ξ_a nur die beiden Stücke $\Xi_a^x\Xi_a^{\mathfrak{x}}$, $\Xi_a^y\Xi_a$, welche jenen Bogenstücken entsprechen, in Betracht. Mit Beachtung dieser eventuellen Begrenzung entspricht der Kegelfläche $\Theta\xi$ eine Kegelfläche $\Theta\xi_a$. Auf jedem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$, der einer Mantellinie der so begrenzten Kegelfläche $\Theta\xi_a$ parallel ist, giebt es einen Lichtpunkt A_0, dem ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{A}_0$ entspricht.

Nehmen wir ein Bündel von einfallenden Hauptstrahlen an, die zu einer Mantellinie der eventuell so begrenzten Kegelfläche $\Theta\xi_a$ parallel sind, dann liegen die auf diesen Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer durch die brechende Kante Ω gehenden Ebene Ωg_0, und ebenso liegen auch diese homocentrischen Bildpunkte in einer durch die brechende Kante Ω gehenden Ebene $\Omega\mathfrak{g}_0$. Da einem Bündel paralleler einfallender Hauptstrahlen ein affines Bündel paralleler austretender Hauptstrahlen entspricht, so ist das System G_0 der Lichtpunkte in der Ebene Ωg_0 affin dem System $\mathfrak{G}_0$ der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte in der Ebene $\Omega\mathfrak{g}_0$.

Die Gesammtheit der Lichtpunkte $A_0\ldots$ auf der Kegelfläche $\Theta\xi_a$ bilden auf derselben eine Curve t^r, die wir die räumliche Homocentroide nennen wollen. Nehmen wir nun einen beliebigen Lichtpunkt P_0 an, und legen wir durch die brechende Kante Ω und diesen Lichtpunkt P_0 eine Ebene ΩP_0, welche die räumliche Homocentroide t^r in einem Punkt A_0 schneiden möge, so erhalten wir den einfallenden Hauptstrahl p, der dem Lichtpunkt P_0 zugeordnet ist als Parallele zu $A_0\Theta$, und dem Lichtpunkt P_0 entspricht ein homocentrischer Bildpunkt $\mathfrak{P}_0$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\mathfrak{p}$. Wir bekommen so zu einem räumlichen System S_0^r von Lichtpunkten ein entsprechendes räumliches System $\mathfrak{S}_0^r$ von homocentrischen Bildpunkten. Wenn aber jene Ebene ΩP_0 die räumliche Homocentroide in mehreren Punkten schneidet, so ist das Entsprechen der Systeme S_0^r, $\mathfrak{S}_0^r$ mehrdeutig.

Für einen Lichtpunkt A auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ ist in Figur 12 die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ die homocentrische Differenz, welche wir noch rechnerisch bestimmen wollen.

Es ist

$$\frac{\mathrm{A}_1\Theta}{A\Theta} = n_1\left(\frac{\cos\mathfrak{e}_1}{\cos e_1}\right)^2, \quad \frac{\mathrm{A}_2\Theta}{A\Theta} = n_1,$$

ferner

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \Xi}{\mathrm{A}_2 \Xi} = \frac{1}{n_2}\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right); \quad \frac{\mathfrak{A}_2 \Xi}{\mathrm{A}_1 \Xi} = \frac{1}{n_2};$$

$$\mathrm{A}_1 \Xi = \mathrm{A}_1 \Theta + \Theta \Xi = n_1 \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2 A \Theta + \Theta \Xi,$$

$$\mathrm{A}_2 \Xi = \mathrm{A}_2 \Theta + \Theta \Xi = n_1 A \Theta + \Theta \Xi,$$

und

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \Xi - \mathfrak{A}_2 \Xi = \frac{1}{n_2}\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 \mathrm{A}_2 \Xi - \frac{1}{n_2} \mathrm{A}_1 \Xi.$$

Hiernach ergiebt sich für die homocentrische Differenz

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \frac{1}{n_2}\left\{\Theta \Xi \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2} - 1\right) + n_1 . A \Theta \left[\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2\right]\right\}$$

und für $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = 0$ folgt:

$$\frac{n_1 . A \Theta}{\Theta \Xi} = \frac{1 - \left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2}{\left(\frac{\cos e_2}{\cos \varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos e_1}\right)^2}.$$

Hieraus kann man die Gleichung für die räumliche Homocentroide ableiten; aber die Rechnung ist sehr umständlich.

V. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen.

Die homocentrische Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen tritt ein, wenn die brechenden Kanten derselben parallel sind und der Durchgang der Lichtstrahlen in einer Normalebene erfolgt. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Medien an den beiden Seiten eines jeden Prisma verschieden sind; demnach können die zwischen den Prismen befindlichen Medien auch als Prismen betrachtet werden. Es bilden dann die Prismen und die zwischen liegenden Medien eine Reihe von Prismen, die mit berührenden Seiten an einander stehen.

Wir betrachten in Figur 14 zunächst nur zwei Prismen $E_I \Omega E_{II}$, $E_{III} \Omega' E_{IV}$, deren brechenden Kanten Ω, Ω' parallel sind, und bezeichnen die Brechungsindices an den Ebenen ΩE_I, ΩE_{II}, ΩE_{III}, ΩE_{IV} gegen die Prismen resp. mit n_1, n_2, n_3, n_4. Bei dem ersten Prisma sind für eine angenommene Richtung der parallelen einfallenden Hauptstrahlen durch die Brechungsindices n_1, n_2 die Hauptstrahlen $l\Omega$, $\lambda\Omega$, $\mathfrak{l}\Omega$ mit den entsprechenden Punkten L, Λ_1, $\mathfrak{L}_1$ in bekannter Weise construirt. Bei dem zweiten Prisma ist die Richtung $l'\Omega'$ der einfallenden Hauptstrahlen zu $\mathfrak{l}\Omega$ parallel und es sind in gleicher Weise die Hauptstrahlen $l'\Omega'$, $\lambda'\Omega'$, $\mathfrak{l}'\Omega'$ mit den entsprechenden Punkten L', Λ'_1, $\mathfrak{L}'_1$ bestimmt.

Ein Gang der Hauptstrahlen a, α, $\mathfrak{a}$, α', $\mathfrak{a}'$ ergiebt sich, indem wir dieselben resp. parallel zu l, λ, $\mathfrak{l}$, λ', $\mathfrak{l}'$ ziehen. Nehmen wir nun auf dem Hauptstrahl a einen beliebigen Lichtpunkt A an und ziehen wir die Geraden $A\,\mathrm{A}_1$,

$A_1\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1 A_1^\nu$, $A_1^\nu \mathfrak{A}_1^\nu$ bis an die betreffenden Hauptstrahlen resp. parallel zu $L\Lambda_1$, $\Lambda_1 \mathfrak{L}_1$, $L'\Lambda'_1$, $\Lambda'_1 \mathfrak{L}'_1$, so erhalten wir dadurch zu dem Lichtpunkt A den entsprechenden ersten Bildpunkt $\mathfrak{A}_1^\nu$ auf dem zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\mathfrak{a}^\nu$. Ziehen wir ferner AA_2, $A_2\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2 A_2^\nu$, $A_2^\nu\mathfrak{A}_2^\nu$ bis an die betreffenden Hauptstrahlen resp. senkrecht auf ΩE_I, ΩE_{II}, $\Omega' E_{III}$, $\Omega' E_{IV}$, so ergiebt sich zu dem Lichtpunkt A der entsprechende zweite Bildpunkt $\mathfrak{A}_2^\nu$ auf dem austretenden Hauptstrahl $\mathfrak{a}^\nu$. In gleicher Weise erhalten wir zu den Lichtpunkten B, C auf den parallel zu a einfallenden Hauptstrahlen b, c die entsprechenden ersten und zweiten Bildpunkte $\mathfrak{B}_1^\nu$, $\mathfrak{B}_2^\nu$, sowie $\mathfrak{C}_1^\nu$, $\mathfrak{C}_2^\nu$ auf den austretenden Hauptstrahlen $\mathfrak{b}^\nu$, $\mathfrak{c}^\nu$.

Den Lichtpunkten ABC im System S entsprechen demnach die ersten Bildpunkte $\mathfrak{A}_1^\nu\mathfrak{B}_1^\nu\mathfrak{C}_1^\nu$ im System $\mathfrak{S}_1^\nu$ und die zweiten Bildpunkte $\mathfrak{A}_2^\nu\mathfrak{B}_2^\nu\mathfrak{C}_2^\nu$ im System $\mathfrak{S}_2^\nu$. Diese Systeme S, $\mathfrak{S}_1^\nu$, $\mathfrak{S}_2^\nu$ sind affin. Die Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^\nu$ der Systeme $\mathfrak{S}_1^\nu$, $\mathfrak{S}_2^\nu$, die durch die drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{A}_1^\nu\mathfrak{B}_1^\nu\mathfrak{C}_1^\nu$ und $\mathfrak{A}_2^\nu\mathfrak{B}_2^\nu\mathfrak{C}_2^\nu$ bestimmt sind, ergiebt sich durch die Schnittpunkte entsprechender Geraden. Dieser Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^\nu$, welche die austretenden Hauptstrahlen in den Punkten $\mathfrak{A}_0^\nu\mathfrak{B}_0^\nu\mathfrak{C}_0^\nu\ldots$ schneidet, entspricht im System S die Gerade g_0, welche die einfallenden Hauptstrahlen in den Lichtpunkten $A_0B_0C_0\ldots$ schneidet, zu denen die homocentrische Bildpunkte $\mathfrak{A}_0^\nu\mathfrak{B}_0^\nu\mathfrak{C}_0^\nu\ldots$ gehören; und diese beiden Punktreihen sind ähnlich.

Anstatt zu jenen Lichtpunkten B, C die entsprechenden ersten und zweiten Bildpunkte zu construiren, erhalten wir einfacher zu den Punkten Ω und Θ, wenn wir dieselben als Lichtpunkte im System S betrachten, die entsprechenden Lichtpunktpaare $\mathfrak{O}_1^\nu\mathfrak{O}_2^\nu$, $\mathfrak{T}_1^\nu\mathfrak{T}_2^\nu$. Wir ziehen, weil Ω auf dem in das zweite Prisma einfallenden Hauptstrahl $\mathfrak{l}$ liegt, die Gerade $\Omega\Omega_1^\nu$ parallel $L'\Lambda'_1$ bis an $\mathfrak{l}^\nu$ und $\Omega_1^\nu\mathfrak{O}_1^\nu$ parallel $\Lambda'_1\mathfrak{L}'_1$ bis an $\mathfrak{l}^\nu$; ferner $\Omega\Omega_2^\nu$, $\Omega_2^\nu\mathfrak{O}_2^\nu$ resp. senkrecht $\Omega' E_{III}$, $\Omega' E_{IV}$. Zu dem Punkt Θ, in welchem der Hauptstrahl a das erste Prisma trifft, erhalten wir die entsprechenden Bildpunkte, weil in Θ drei entsprechende Punkte T, T_1, T_2 zusammenfallen, indem wir $\Theta\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_1 T_1^\nu$, $T_1^\nu\mathfrak{T}_1^\nu$ resp. parallel $\Lambda_1\mathfrak{L}_1$, $L'\Lambda'_1$, $\Lambda'_1\mathfrak{L}'_1$ und $\Theta\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_2 T_2^\nu$, $T_2^\nu\mathfrak{T}_2^\nu$ resp. senkrecht ΩE_{II}, $\Omega' E_{III}$, $\Omega' E_{IV}$ ziehen. Die affinen Systeme S, $\mathfrak{S}_1^\nu$, $\mathfrak{S}_2^\nu$ sind dann auch durch die entsprechenden Punkte $A\Omega\Theta$, $\mathfrak{A}_1^\nu\mathfrak{O}_1^\nu\mathfrak{T}_1^\nu$, $\mathfrak{A}_2^\nu\mathfrak{O}_2^\nu\mathfrak{T}_2^\nu$ bestimmt, und die Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^\nu$ der Systeme $\mathfrak{S}_1^\nu$, $\mathfrak{S}_2^\nu$ ergiebt sich durch die Schnittpunkte zweier Paare entsprechender Geraden. Es schneiden sich die entsprechenden Geraden $\mathfrak{T}_1^\nu\mathfrak{O}_1^\nu$, $\mathfrak{T}_2^\nu\mathfrak{O}_2^\nu$ im Punkt $\mathfrak{U}_0^\nu$ und die entsprechenden Geraden $\mathfrak{A}_1^\nu\mathfrak{O}_1^\nu$, $\mathfrak{A}_2^\nu\mathfrak{O}_2^\nu$ im Punkt $\mathfrak{Y}_0^\nu$ auf der Affinitätsachse. Nehmen wir für die parallelen einfallenden Hauptstrahlen a, b, c eine andere Richtung, dann entspricht derselben eine andere Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^\nu$ und eine andere Gerade g_0.

Sind nun statt der zwei betrachteten Prismen mehrere Prismen gegeben, deren brechenden Kanten parallel sind, so erhalten wir bei einer Anzahl von ν Prismen durch die weitere Fortsetzung der für jene zwei Prismen ausgeführten Construction in analoger Weise die Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^\nu$ der beiden

letzten entsprechenden affinen Systeme $\mathfrak{S}_1^v$, $\mathfrak{S}_2^v$ und die entsprechende Gerade g_0 in dem affinen System S der Lichtpunkte. Die Gerade g_0 enthält die auf den parallelen einfallenden Hauptstrahlen liegende Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, die sich in der Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^v$ befinden. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch beliebig viele Prismen, deren brechende Kanten parallel sind, liegen die auf parallelen, in einer Normalebene einfallenden Hauptstrahlen befindlichen Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, in einer Geraden g_0; und diese homocentrischen Bildpunkte auf den letzten parallelen austretenden Hauptstrahlen liegen in einer entsprechenden Geraden $\mathfrak{g}_0^v$.

Einer zu g_0 Parallelen im System S entsprechen in den Systemen $\mathfrak{S}_1^v$, $\mathfrak{S}_2^v$ Parallele zu $\mathfrak{g}_0^v$; demnach entsprechen den Lichtpunkten auf einer zu g_0 Parallelen gleiche homocentrische Differenzen.

Wenn insbesondere die Affinitätsachse $\mathfrak{g}_0^v$ zu den letzten austretenden Hauptstrahlen parallel ist, dann entspricht derselben im System S eine Gerade g_0, die parallel zu den einfallenden Hauptstrahlen ist. Liegt die Gerade g_0 so, dass sie, als einen einfallenden Hauptstrahl betrachtet, einen durch alle Prismen gehenden Strahlengang liefert, dann entspricht in diesem Falle jedem Lichtpunkt auf dem einfallenden Hauptstrahl g_0 ein homocentrischer Bildpunkt auf dem zugehörigen austretenden Hauptstrahl $\mathfrak{g}_0^v$. Auf allen anderen zu g_0 parallelen einfallenden Hauptstrahlen giebt es keinen im Endlichen befindlichen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. In den affinen Systemen $\mathfrak{S}_1^v$, $\mathfrak{S}_2^v$ ist dann auf jedem austretenden Hauptstrahl der Abstand zweier entsprechender Punkte constant; die homocentrische Differenz ist demnach in diesem Falle unabhängig von der Lage des Lichtpunktes auf dem einfallenden Hauptstrahl und proportional dem Abstande dieses Hauptstrahles von dem Hauptstrahl g_0. Wenn die Prismen sich in demselben Medium befinden, tritt dieser Fall beim Minimum der Ablenkung ein, wie Herr A. Gleichen a. a. O. bewiesen hat.

Die im obigen Satze enthaltenen Beziehungen sind in jeder Normalebene vorhanden und demnach liegen die Lichtpunkte auf allen parallelen einfallenden Hauptstrahlen, die zu einer Normalebene parallel sind, in einer Ebene g_0 und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte in einer Ebene $\mathfrak{g}_0^v$. Das System G_0 der Lichtpunkte in der Ebene g_0 und System $\mathfrak{G}_0^v$ der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte in der Ebene $\mathfrak{g}_0^v$ sind affin, weil dem Bündel der parallelen einfallenden Hauptstrahlen das Bündel der parallelen austretenden Hauptstrahlen affin entspricht.

Die Untersuchung der homocentrischen Brechung durch die Linse, bei der zweien Lichtpunkten eines einfallenden, die Linsenachse schneidenden Hauptstrahles homocentrische Bildpunkte entsprechen, wollen wir in einer anderen Abhandlung mittheilen.

VI.

Ueber die Wendepole einer kinematischen Kette.

Von

Prof. F. Wittenbauer

in Graz.

Hierzu Taf. IV Fig. 1—12.

Für das Studium der gegenseitigen Bewegungen der Glieder einer ebenen kinematischen Kette erscheint es von Bedeutung, Constructionen für die Wendepole dieser Bewegungen zu kennen. Denn neben den Drehpolen der momentanen Bewegung spielen die genannten Punkte eine wichtige Rolle. Zunächst in rein geometrischer Hinsicht, denn die Kenntniss des Wendepoles führt bekanntlich mit Hilfe einer sehr einfachen Construction zu den Krümmungsmittelpunkten den Bahnen, welche die Punkte des einen Gliedes in Bezug auf ein anderes beschreiben.

In zweiter Linie aber dient der Wendepol mit zur Bestimmung des Beschleunigungszustandes, in welchem sich zwei Glieder gegen einander befinden; denn der Kreis, der über der Verbindungslinie des Drehpoles mit dem Wendepol als Durchmesser gezogen wird, enthält bereits den Beschleunigungspol jener relativen Bewegung.

Während es Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, die Construction der Wendepole einer kinematischen Kette zu lehren, soll die Anwendung auf die Ermittelung der Beschleunigungspole einer Kette in einer späteren Abhandlung gezeigt werden.

1. In meiner Untersuchung über: „Die Wendepole der absoluten und der relativen Bewegung“* habe ich die Construction des Wendepoles für die resultirende aus zwei Bewegungen eines ebenen Systems, der führenden und der geführten Bewegung, gelehrt. Hierbei wurde zunächst die Annahme gemacht, dass die Winkelgeschwindigkeiten beider Bewegungen in den beiden auf einander folgenden Zeitelementen unveränderlich bleiben. Des besseren Verständnisses halber möge die dort mit Hilfe des barycentrischen Calculs begründete Construction nochmals kurz erwähnt werden.

* Zeitschrift für Mathematik und Physik, 36. Bd.



Bezeichnen $O_{12}\,O_{23}$, $J_{12}\,J_{23}$ die Drehpole und die Wendepole der führenden Bewegung des Systemes 2 in dem (als fest zu denkenden) System 1, beziehungsweise der geführten Bewegung des Systemes 3 im Systeme 2, so ergiebt sich unter Zugrundelegung obiger Voraussetzung der resultirende Wendepol J^0_{13} aus dem resultirenden Drehpole O_{13} durch folgende einfache Construction (Taf. IV, Fig. 1):

Man ziehe die Linien $O_{12}J_{23}$, $O_{23}J_{12}$, $O_{13}J_{23}$, ferner $O_{13}K \parallel O_{12}J_{12}$, $O_{13}L \parallel O_{23}J_{23}$, $LM \parallel O_{12}O_{23}$, $NJ^0_{13} \parallel LK$, so giebt der Schnitt der Linien MK und NJ^0_{13} den gesuchten Wendepol J^0_{13}.

Kehrt man die beiden gegebenen Bewegungen um, so ändern zwar die Drehpole ihre Lage nicht, die Wendepole $J_{12}\,J_{23}$ hingegen gehen über in $J_{21}\,J_{32}$, wobei $O_{12} = O_{21}$ die Strecke $J_{12}J_{21}$ und $O_{23} = O_{32}$ die Strecke $J_{23}J_{32}$ halbirt. Führt man für diese umgekehrten Bewegungen die Construction des Wendepoles wieder durch (Fig. 2), wobei jetzt J_{32} den Wendepol der führenden, J_{21} jenen der geführten Bewegung bedeutet, so ergiebt sich der Wendepol J^0_{31} des Systemes 1 in Bezug auf das als fest gedachte System 3. Da diese Bewegung die Umkehrung der vorhin resultirenden ist, so muss der Punkt $O_{13} = O_{31}$ die Strecke $J^0_{13}J^0_{31}$ halbiren.

Man beachte also folgende Regel: Aus dem Wendepol J_{mn} der führenden und jenem J_{np} der geführten Bewegung liefert die angegebene Construction den Wendepol J^0_{mp}.

Geht die Bewegung des führenden Systemes in eine durch zwei Zeitelemente dauernde Rotation um denselben Drehpol über, so fallen für diese Bewegung Drehpol und Wendepol zusammen und die Construction vereinfacht sich wesentlich (Fig. 3). Man ziehe dann $O_{23}J_{12}$, mache

$$O_{13}K \parallel O_{12}J_{12}, \quad O_{12}K \parallel O_{13}J^0_{13},$$

so ergiebt der Schnitt von $O_{23}J_{12}$ mit $O_{13}J^0_{13}$ den gesuchten Wendepol J^0_{13}.

Sind die Bewegungen beider Systeme dauernde Rotationen, so fallen $J_{12}\,J_{23}$ beziehungsweise mit $O_{12}\,O_{23}$ zusammen; man verbinde dann (Fig. 4) $O_{12}\,O_{23}\,O_{13}$ mit einem beliebigen Punkt K, ziehe

$$O_{13}L \parallel O_{12}K, \quad LJ^0_{13} \parallel KO_{13},$$

so giebt der Schnitt der Linien LJ_{13} und $O_{12}O_{23}$ den gesuchten Wendepol J^0_{13}.

Für die Umkehrung der Bewegungen vertauschen die führende und die geführte Bewegung ihre Rollen; die Construction von J^0_{31} erfordert dann die Linien

$$O_{13}L' \parallel O_{23}K, \quad L'J^0_{31} \parallel KO_{13}.$$

2. Allerdings sind alle diese Constructionen, wenige Ausnahmen abgerechnet, nur für den Fall richtig, dass die Winkelgeschwindigkeiten beider Systeme während beider Zeitelemente keine Aenderung erleiden. Allein ich habe in der früher erwähnten Abhandlung bereits angegeben,

wie man bei beliebiger Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeiten den Wendepol J_{13} findet, wenn derjenige J^0_{13} für unveränderliche Winkelgeschwindigkeiten bereits construirt ist. Die beiden Wendepole J_{13} und J^0_{13} liegen nämlich in einer Senkrechten auf die Polgerade $O_{13} O_{23}$ und zwar sind sie von einander um die Strecke

$$\beta = b \cdot \frac{\lambda_{13}}{\omega^2_{13}}$$

entfernt. Hierin bedeutet ω_{13} die resultirende Winkelgeschwindigkeit, λ_{13} die resultirende Winkelbeschleunigung und b die Entfernung der Punkte O_{13} und B_{13}, wobei B_{13} durch den barycentrischen Ausdruck

$$\lambda_{13} . B_{13} = \lambda_{12} . O_{12} + \lambda_{23} . O_{23}$$

gegeben ist.

Von grösster Wichtigkeit für vorliegenden Zweck ist nun der aus obiger Bemerkung fliessende Satz:

Alle Wendepole J_{13}, die zu fünf Punkten $O_{12} O_{23} O_{13}$, $J_{12} J_{23}$ gehören, liegen in einer zur Polgeraden senkrechten Geraden.

Denn, ohne die Strecke β zu construiren, wird es nach obigem Satze in den meisten Fällen, wo es sich um die Bewegungen der Glieder einer kinematischen Kette handelt, möglich sein, zwei Gerade anzugeben, in denen der resultirende Wendepol liegen muss. Hierbei ist nach folgendem Schema zu verfahren:

Sind von vier bewegten Systemen $mnpq$ ausser den Drehpolen

$$\begin{matrix} O_{mn} O_{np} \\ O_{mq} O_{qp} \end{matrix} > O_{mp}$$

noch die vier Wendepole $J_{mn} J_{np} J_{mq} J_{pq}$ gegeben, so findet man den fünften Wendepol J_{mp} nach demselben Schema, das heisst, es ist

$$\begin{matrix} J_{mn} J_{np} \\ J_{mq} J_{qp} \end{matrix} > J_{mp}.$$

Man sucht nämlich aus $J_{mn} J_{np}$ nach Construction Figur 1 den Punkt J^0_{mp} und fällt von diesem Punkte eine Senkrechte auf die Polgerade $O_{mn} O_{np}$; sodann führt man dasselbe mit den Wendepolen $J_{mq} J_{qp}$ in Bezug auf die Polgerade $O_{mq} O_{qp}$ durch; wo die beiden Senkrechten sich schneiden, befindet sich der resultirende Wendepol J_{mp}.

3. Eine Anwendung dieses Vorganges auf die Wendepole des Kurbelviereckes wird ihn völlig klar machen.

Behufs Construction des Wendepoles J_{13} des Gliedes 3 in Bezug auf das als ruhend gedachte Glied 1 (Fig. 5) construire man auf den Polgeraden $O_{12} O_{23}$ und $O_{14} O_{43}$ nach Figur 4 die Punkte J^0_{13}, wobei der Punkt K im Schnitte der Glieder 1 und 3 gewählt wurde. Man ziehe also die Linien

$$O_{13} L \parallel O_{12} O_{14}, \quad L J^0_{13} \parallel K O_{13}$$

und errichte in den beiden Punkten J^0_{13} die Senkrechten auf die Pol-

geraden $O_{12}O_{23}$ und $O_{14}O_{43}$. Der Schnitt beider Senkrechten ist der gesuchte Wendepol J_{13}.*

Figur 6 zeigt die Construction des Wendepoles J_{31} für die umgekehrte Bewegung, das heisst bei festgehaltenem Gliede 3. Es muss wieder O_{13} in der Mitte zwischen J_{13} und J_{31} liegen.

In ebenso einfacher Weise sind die Wendepole der meisten kinematischen Ketten zu bestimmen und zwar lässt sich im Allgemeinen sagen, dass oben erwähntes Verfahren stets in allen jenen Fällen zur Kenntniss der Wendepole führen wird, in welchen sich die Configuration der Drehpole durch einfaches Ziehen von Polgeraden ergiebt. Es kann für diese Constructionen sogar dasselbe Zifferschema dienen, welches zur Ermittelung der Drehpole benützt wird, nur muss hier auf die Reihenfolge der Ziffern sorgfältig geachtet werden, da die Vertauschung derselben eine Umkehrung der Bewegung bedeutet.

Um z. B. in der von Burmester als Watt'scher Mechanismus bezeichneten Kette (Fig. 7) den Wendepol J_{51} zu construiren, ermittle man zunächst durch Ziehen von Polgeraden den Drehpol O_{51}, sodann nach Figur 5 die Wendepole J_{31} und J_{54} und hieraus nach dem Schema

$$\begin{matrix} J_{53}\,J_{31} \\ J_{54}\,J_{41} \end{matrix} > J_{51}$$

mit Benützung der Constructionen Figur 1 und 3 den Wendepol J_{51}. Hierbei sind die Wendepole J_{53} und J_{41} identisch mit den Drehpolen O_{53} und O_{41}.

Behufs Ermittelung des Wendepoles J_{13} in der durch Figur 8 dargestellten Kette suche man zunächst nach Figur 5 die Wendepole J_{12} und J_{23}; dann liefert das Schema

$$\begin{matrix} J_{12}\,J_{23} \\ J_{14}\,J_{43} \end{matrix} > J_{13}$$

den gesuchten Wendepol J_{13} im Schnitt der durch die Punkte J^0_{13} auf die zugehörigen Polgeraden $O_{12}O_{23}$, $O_{14}O_{43}$ errichteten Senkrechten. Hierbei sind wieder die Constructionen Figur 1 und 3 zu verwenden.

4. In jenen Fällen, in welchen sich die Polconfiguration nicht durch einfaches Ziehen von Polgeraden erreichen lässt, versagt auch die so einfache Construction der Wendepole zum Theile, das heisst, sie liefert gewöhnlich nur eine Gerade, in der der gesuchte Wendepol liegt.

Hier muss nun wenigstens ein Wendepol mit Hilfe anderer Mittel gefunden werden, die jetzt besprochen werden sollen. Die Mittheilung derselben giebt Gelegenheit, einige interessante Eigenschaften der Wendepole zu erwähnen.

---

* Vergl. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik", I. Bd. S. 123.

Wir betrachten wieder drei ebene Systeme: das als ruhend gedachte System 1, das führende 2 und das von diesem geführte 3. $O_{12} O_{23} O_{13}$ seien die Drehpole, $J_{12} J_{23} J^0_{13}$ die zugehörigen Wendepole, letzterer nach Figur 1 construirt, also ohne Berücksichtigung der Winkelbeschleunigungen. Dieser Wendepol J^0_{13} hat, wie ich in der oben erwähnten Abhandlung gezeigt habe, den barycentrischen Ausdruck

$$\omega^2_{13} J^0_{13} = \omega^2_{12} J_{12} + \omega^2_{23} J_{23} + 2\,\omega_{12}\,\omega_{23} \,.\, O_{23},$$

worin $\omega_{12}\,\omega_{23}\,\omega_{13}$ die Winkelgeschwindigkeiten der drei Systeme um die betreffenden Drehpole bedeuten. Es ist also J^0_{13} der Schwerpunkt der drei Punkte $J_{12} J_{23} O_{23}$, wenn in ihnen die Gewichte ω^2_{12}, ω^2_{23} und $2\,\omega_{12}\,\omega_{23}$ angebracht werden.

Kennt man nun eine Gerade i_{13} (Fig. 9), auf welcher der Wendepol J_{13} liegt, so gewinnt man diesen durch Ziehen der Geraden $J_{13} J^0_{13}$ senkrecht zu $O_{12} O_{23}$.

Verändern wir jetzt die Lage des Wendepoles J_{12}, während J_{23} und O_{23} dieselben bleiben, so verändert auch J^0_{13} seine Lage und zwar nach den Gesetzen des Schwerpunktes in ähnlicher Weise wie J_{12}. Beschreibt insbesondere J_{12} eine Gerade i_{12}, so durchschreitet J^0_{13} eine parallele Gerade i^0_{13} in ähnlicher Punktreihe. Zwei entsprechende Punkte J_{12} und J^0_{13} liegen auf demselben Strahl eines Büschels, dessen Scheitel S auf der Linie $O_{23} J_{23}$ liegt und den barycentrischen Ausdruck hat:

$$S \equiv \omega_{23} . J_{23} + 2\,\omega_{12} . O_{23};$$

denn der oben angeführte Ausdruck für J^0_{13} kann auch geschrieben werden:

$$J^0_{13} \equiv \omega^2_{12} J_{12} + (\omega^2_{23} + 2\,\omega_{12}\,\omega_{23}) . S.$$

Da die entsprechenden Punkte J_{12} und J^0_{13} in Strahlen σ_{13} senkrecht zu $O_{12} O_{23}$ liegen, so durchschreitet auch J_{13} gleichzeitig eine Punktreihe auf i_{13}, welche den von J^0_{13} und J_{12} beschriebenen ähnlich ist.

Sucht man nun umgekehrt aus J_{13} und J_{32} den Wendepol J_{12} der resultirenden Bewegung, so findet man durch Construction nach Figur 1 zunächst den Punkt J^0_{12}, der mit J_{12} in einer Senkrechten σ_{12} auf der Polgeraden liegen muss.

J^0_{12} hat den barycentrischen Ausdruck:

$$\omega^2_{12} J^0_{12} = \omega^2_{13} J_{13} + \omega^2_{32} J_{32} + 2\,\omega_{13}\,\omega_{32} . O_{32}.$$

Beschreibt somit J_{13} eine Gerade i_{13}, so durchschreitet J^0_{12} die parallele Gerade i^0_{12} in ähnlicher Punktreihe. Da

$$J_{32} = 2\,O_{23} - J_{23}$$

ist, so kann obiger Ausdruck auch geschrieben werden:

$$J^0_{12} \equiv \omega^2_{13} J_{13} - (\omega^2_{23} + 2\,\omega_{12}\,\omega_{23}) . S,$$

worin S denselben Ausdruck hat wie oben.

Zwei entsprechende Punkte J^0_{12} und J_{13} liegen somit auf demselben Strahl eines Büschels, das seinen Scheitel wieder in S hat.

Hieraus folgt nun eine einfache Construction des Wendepoles, wenn der Punkt S und von den vier Geraden $i_{13}\, i^0_{13}\, i_{12}\, i^0_{12}$ drei bekannt sind. Um z. B. zu J_{12} den zugehörigen Punkt J_{13} zu bestimmen, ziehe man den Strahl SJ_{12}, der die Gerade i^0_{13} in J^0_{13} schneidet, und durch diesen Punkt den Strahl σ_{13} bis zum Schnitte J_{13} mit i_{13}. Oder man zieht durch J_{12} den Strahl σ_{12} bis zum Schnitte J^0_{12} mit i^0_{12}; sodann schneidet der Strahl SJ^0_{12} die Gerade i_{13} in J_{13}.

Von Wichtigkeit ist ferner die Bemerkung, dass die von den Strahlen σ_{12} und σ_{13} gebildeten Parallelbüschel ähnlich sind. Ihr im Endlichen liegender Doppelstrahl geht durch S, er schneidet die Geraden i_{12} und i_{13} in zwei entsprechenden Wendepolen J_{12} und J_{13}.

Lässt man statt J_{12} den Wendepol J_{23} der geführten Bewegung seinen Ort auf einer Geraden i_{23} verändern, so gelangt man auf demselben Wege zu ganz analogen Resultaten. Nur liegt jetzt der Scheitel S_1 der beiden Strahlenbüschel nicht mehr auf einem Durchmesser des Wendekreises, wie früher, sondern auf der Geraden $O_{23}J_{12}$ und hat den Ausdruck:

$$S_1 \equiv \omega_{12}J_{12} + 2\,\omega_{23}\,.\,O_{23}.$$

5. Die Resultate des vorigen Artikels führen nun zur Lösung einer Aufgabe, welche für die Construction der Wendepole von principieller Wichtigkeit ist.

Es seien (Fig. 10) von vier Systemen 1, 2, 3, 4 sämmtliche Drehpole und die Wendepole der ersten drei Systeme $J_{13}J_{32}J_{21}$ gegeben; von den Wendepolen des vierten Systemes $J_{41}J_{42}\ J_{43}$ sei nur bekannt, dass sie beziehungsweise auf den Geraden $i_{41}\,i_{42}\,i_{43}$ liegen. Man suche diese Wendepole.

Um einen derselben, z. B. J_{42} zu ermitteln, nehme man auf i_{42} zunächst einen beliebigen Punkt W_{42} an, betrachte ihn als Wendepol und bestimme mit Hilfe der Punkte $O_{42}\,O_{21}\,O_{41}$, $W_{42}\,J_{21}$ und der Geraden i_{41} den auf derselben liegenden Wendepol W_{41}; sodann suche man auf dieselbe Weise mit Hilfe der Punkte $O_{41}\,O_{13}\,O_{43}$, $W_{41}\,J_{13}$ und der Geraden i_{43} den auf dieser liegenden Wendepol W_{43}; endlich aus $O_{43}\,O_{32}\,O_{42}$, $W_{43}\,J_{32}$ und der Geraden i_{42} den auf ihr liegenden Wendepol (W_{42}).

Nun nehme man auf i_{42} einen zweiten beliebigen Punkt W'_{42} an und ermittle in analoger Weise auf den Geraden $i_{41}\,i_{43}\,i_{42}$ die entsprechenden Punkte $W'_{41}\,W'_{43}(W'_{42})$.

Nach Artikel 4 sind die auf den Geraden i liegenden Punktreihen $W_{42}W'_{42}$, $W_{41}W'_{41}$, $W_{43}W'_{43}$, $(W_{42})(W'_{42})$ ähnlich. Die erste und letzte dieser Punktreihen liegen auf derselben Geraden i_{42}; ihr im Endlichen gelegener Doppelpunkt wird der gesuchte Wendepol J_{42} sein.

Die Parallelstrahlenbüschel σ, welche die beiden ähnlichen Punktreihen auf i_{42} projiciren, schneiden sich in einer Geraden π, welche durch den

Doppelpunkt geht und somit in ihrem Schnitte mit i_{42} den Wendepol J_{42} bestimmt.

Da die Punktreihen $J_{42} W_{42} W'_{42}$, $J_{41} W_{41} W'_{41}$, $J_{43} W_{43} W'_{43}$ ähnlich sind, so ergeben sich jetzt die beiden anderen Wendepole $J_{41} J_{43}$ in einfachster Weise.

Die hier auszuführenden Constructionen sind einfach und übersichtlich; sie können durch die Benützung der im vorigen Artikel gewonnenen Resultate, insbesondere der Eigenschaften des Punktes S, in vortheilhafter Weise abgekürzt werden.

6. Die soeben behandelte Aufgabe gestaltet sich viel einfacher, wenn von den drei Systemen 1, 2, 3 zwei Paare derselben dauernde Rotationen gegen einander ausführen. Es würde z. B. (Fig. 11) unter Beibehaltung der sonstigen Verhältnisse J_{12} mit O_{12}, J_{23} mit O_{23} zusammenfallen.

Errichtet man jetzt in O_{12} eine Senkrechte auf $O_{41} O_{42}$, so schneidet dieselbe die Geraden $i_{41} i_{42}$ bereits in entsprechenden Punkten, da der Punkt S (Artikel 4) hier mit O_{12} zusammenfällt.

Bei der Construction von W_{43} aus W_{41} ergiebt sich zunächst nach Figur 1 W^0_{43}, sodann durch Ziehen der Linie $W^0_{43} W_{43} \perp O_{41} O_{43}$ bis zum Schnitte mit i_{43} der Punkt W_{43}. Mit Hilfe dieses Punktes wird hierauf der auf i_{42} gelegene Punkt (W_{42}) construirt.

Eine zweite Gruppe entsprechender Punkte W' kann zweckmässig in folgender Weise ermittelt werden:

Verbindet man W_{41} mit W^0_{43}, so schneidet diese Gerade den Wendedurchmesser $O_{13} J_{13}$ in S (Artikel 4). Die Senkrechte durch S auf $O_{41} O_{43}$ schneidet die Geraden $i_{41} i_{43}$ in entsprechenden Punkten $W'_{41} W'_{43}$; aus diesen wurden dann mit Benützung der Figur 3 die Punkte W'_{42} und (W'_{42}) bestimmt.

Der Schnitt der auf diese Weise gefundenen vier Strahlen σ, die Gerade π, schneidet i_{42} im Wendepol J_{42}.

Die beiden anderen Wendepole $J_{41} J_{43}$ können in zweifacher Weise gefunden werden: entweder durch Uebertragen des Aehnlichkeitsverhältnisses auf die Geraden $i_{41} i_{43}$ oder durch Benützung der Construction Figur 3.

7. Der soeben beschriebene Vorgang kann für die Bestimmung der Wendepole mancher kinematischen Kette verwendet werden, für welche die Anfangs erwähnten einfachen Constructionen nicht oder nur zum Theile anwendbar sind.

Hierher gehört z. B. die von Burmester als Dreispannmechanismus bezeichnete kinematische Kette (Figur 12). Um hier die Wendepole des Systemes 4 in Bezug auf die Systeme 1, 2, 3 zu ermitteln, bestimme man zunächst nach dem von Burmester angegebenen Verfahren* die Drehpole $O_{41} O_{42} O_{43}$, sodann nach Figur 5 den Wendepol J_{13}; die Wende-

* Vergl. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik", I. Bd. S. 465.

pole J_{12} und J_{32} fallen mit den Drehpolen O_{12} und O_{32} zusammen. Die Geraden $i_{41} i_{42} i_{43}$ erhält man mit Construction (Fig. 4) aus:

$$O_{45}\, O_{51}\, O_{41} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{41},$$
$$O_{46}\, O_{62}\, O_{42} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{42},$$
$$O_{47}\, O_{73}\, O_{43} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{43}.$$

Sodann kann die im vorigen Artikel beschriebene Constrnction der Wendepole $J_{41} J_{42} J_{43}$ durchgeführt werden.

Ausser den zehn gegebenen Drehpolen, die zugleich Wendepole sind, den Wendepolen $J_{13} J_{23}$, deren Construction Figur 5 lehrt, und endlich den soeben gefundenen Wendepolen $J_{41} J_{42} J_{43}$ giebt es in dieser Kette noch 13 unbekannte Wendepole (von den Wendepolen der umgekehrten Bewegung abgesehen). Die Bestimmung derselben kann entweder direct mit Hilfe des oben geschilderten Vorganges oder aus den bereits bekannten Wendepolen geschehen. Um z. B. den Wendepol J_{52} zu finden, suche man die Drehpole $O_{52} O_{53} O_{58}$, die Wendepole J_{13} und J_{23}, sodann die Geraden $i_{52} i_{53} i_{58}$ nach dem Schema:

$$O_{51}\, O_{12}\, O_{52} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{52},$$
$$O_{51}\, O_{13}\, O_{53},\ J_{13} \quad . \quad . \quad . \quad i_{53},$$
$$O_{51}\, O_{18}\, O_{58} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{58}$$

und führe nun wieder die Construction des vorigen Artikels durch.

Oder auf indirectem Wege: man ermittle die Linien i_{52} und i'_{52} nach dem Schema:

$$O_{51}\, O_{12}\, O_{52} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad i_{52},$$
$$O_{54}\, O_{42}\, O_{52},\ J_{42} \quad . \quad . \quad . \quad i'_{52}.$$

Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Wendepol J_{52}.

8. C. Rodenberg hat in einer ausgezeichneten Arbeit: „Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungs-Mittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette"* gelehrt. Obwohl unsere Arbeiten von völlig verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen und auch die Methode der Untersuchung eine andere ist, so dürften die Resultate beider doch geeignet sein, sich zu ergänzen. Man kann mit Hilfe der bekannten quadratischen Verwandtschaft der Krümmungs-Mittelpunkte ebenso leicht die Wendepole bestimmen, als man umgekehrt aus den Wendepolen die quadratische Verwandtschaft ermitteln kann. Welche Methode rascher zum Ziele führt, lässt sich nicht allgemein entscheiden. So ist z. B. für die in Figur 8 gezeichnete Kette der Wendepol einfacher zu finden wie die quadratische Verwandtschaft nach Rodenberg's Methode; beim Dreispannmechanismus (Figur 12) dürfte das Gegentheil eintreten.

* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1890.

VII.

Constructionen der Curven dritter Ordnung aus neun gegebenen Punkten und Construction des neunten Punktes zu acht Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung.

Von

Dr. Chr. Beyel

in Zürich.

Hierzu Tafel V Figur 1—8.

Wir haben gezeigt*, wie zwei bestimmte Reciprocitäten (Nullsysteme) der Ebene zu einer Curve dritter Ordnung führen. Die Curve erscheint gleichsam als Leitlinie dieser Reciprocitäten. Damit tritt ihre Darstellung in Analogie mit derjenigen der Kegelschnitte aus dem Polarsysteme.

Wir wollen nun beweisen, dass jede beliebige Curve dritter Ordnung durch zwei Nullsysteme dargestellt werden kann. Der Beweis ist erbracht, wenn wir neun in allgemeiner Lage befindliche Punkte einer Curve dritter Ordnung geben und aus ihnen zwei Reciprocitäten ableiten, durch welche sich diese Curve hervorbringen lässt.

1. XYZ, AB, A_1B_1, M, N seien die neun in allgemeiner Lage gegebenen Punkte der Curve dritter Ordnung C^3. Wir wählen zwei von ihnen — AB — als Grundpunkte der einen Reciprocität und zwei weitere — A_1B_1 — als Grundpunkte der anderen. XYZ sei ein Punktetripel der zwei Reciprocitäten. Legen wir dann durch $ABXYZ$ einen Kegelschnitt K^2 und durch A_1B_1XYZ einen Kegelschnitt $K^2{}_1$, so treffen sich diese Kegelschnitte in einem vierten Punkte P, zu dem das Tripel XYZ zugeordnet ist.** Der Kegelschnitt K^2 schneidet C^3 in einem sechsten Punkte C. $K^2{}_1$ trifft C^3 in einem sechsten Punkte C_1. Diese zwei Punkte CC_1 bilden resp. mit AB, A_1B_1 die Grundpunktdreiecke der zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)(A_1B_1C_1\Delta_1)$. Wir suchen CC_1.

---

* In der Abhandlung: „Darstellung der Curven dritter Ordnung und Klasse aus zwei Reciprocitäten.“ Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 38, 1893, S. 65 flg. An jene Abhandlung schliesst sich die folgende als C an.

** Loco citato pag. 68.

Zu diesem Zwecke gehen wir von einem beliebigen Punkte H auf K^2 aus. Dieser bestimmt im Allgemeinen mit den acht Punkten XYZ, AB, A_1B_1, M eine Curve dritter Ordnung C^3_m. Sie lässt sich durch zwei Reciprocitäten R_m, R_{m1} darstellen, in denen das Tripel XYZ dem Punkte P zugeordnet ist. ABH sind die drei Grundpunkte der einen Reciprocität. A_1B_1 sind zwei Grundpunkte der anderen. Der dritte H_{1m} liegt auf K^2_1 und wird durch folgenden Gedankengang gefunden:

Wir suchen in der ersten Reciprocität zu M die entsprechende Linie m. Wir benutzen dazu den Kegelschnitt durch $ABHM$ und X. Er schneidet aus der Geraden $\overline{XP}$ — sie sei mit p bezeichnet — einen Punkt S_m von m.* Construiren wir jetzt auf allen Geraden durch S_m die entsprechenden Punkte in der Reciprocität R_{m1}, so liegen diese Punkte auf einem Kegelschnitt durch $A_1B_1H_{1m}$ und S_m. Nun entsprechen die Geraden m, p den resp. Punkten M, X in beiden Reciprocitäten $R_m R_{m1}$, weil die Punkte M, X auf C^3_m liegen. Daraus folgt, dass der zuletzt erwähnte Kegelschnitt auch durch M und X geht. Folglich ist er durch $A_1B_1S_mM$ und X bestimmt und schneidet aus K^2_1 den Punkt H_{1m}.

Lassen wir an Stelle von M den Punkt N treten, so wird durch XYZ, ABH, A_1B_1N eine Curve C^3_n festgelegt. Auch diese lässt sich durch zwei Reciprocitäten R_nR_{n1} darstellen. Die eine hat ABH zu Grundpunkten; die andere A_1B_1 und einen auf K^2_1 liegenden Punkt H_{1n}. Zu seiner Construction legen wir durch $ABHX$ und N einen Kegelschnitt. Er schneide p zum zweiten Male in S_n. Dann geht durch $S_nXA_1B_1N$ ein Kegelschnitt, der K^2_1 in H_{1n} trifft.

Durchläuft nun der Punkt H den Kegelschnitt K^2, so gehört zu jeder Lage von H ein Punkt H_{1m} und ein Punkt H_{1n}. Diese Punkte bilden zwei projectivische Reihen auf K^2_1. P ist ein Doppelpunkt der Reihen. Der andere ist der gesuchte Grundpunkt C_1 der Reciprocität $(A_1B_1C_1\Delta_1)$. In ihm schneiden sich nämlich zwei Curven dritter Ordnung C^3_m, C^3_n, von denen wir nachweisen können, dass sie zusammenfallen. Beide Curven haben neun Punkte gemeinsam. Diese sind XYZ, $A_1B_1C_1$, AB und ein Punkt C auf K^2. Es wäre nun denkbar, dass C der neunte Punkt sei, durch den alle Curven dritter Ordnung gehen müssen, welche die acht Punkte XYZ, AB, $A_1B_1C_1$ gemeinsam haben. Von diesen acht Punkten liegen aber sechs — $XYZA_1B_1C_1$ — auf einem Kegelschnitt. Also muss nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Curven dritter Ordnung der neunte Punkt auf der Verbindungslinie $\overline{AB}$ der zwei übrigen Punkte liegen. Er kann also nicht C sein. In analoger Weise schliessen wir, dass alle Curven, welche durch die acht Punkte $XYZABCA_1B_1$ gehen, einen neunten Punkt auf der Geraden $\overline{A_1B_1}$ gemeinsam haben. Folglich kann C_1 dieser neunte Punkt nicht sein.

* L. c. pag. 66.

Damit ist bewiesen, dass durch die Punkte XYZ, $A_1B_1C_1$, ABC nur eine Curve dritter Ordnung geht und diese muss mit der gegebenen Curve C^3 identisch sein. Haben wir C_1 als Doppelpunkt der erwähnten Projectivität gefunden, so legen wir durch $A_1B_1C_1X$ und M (oder N) einen Kegelschnitt und suchen seinen zweiten Schnittpunkt $S_m (S_n)$ mit p. Durch ihn, ABX und M (resp. N) geht ein Kegelschnitt, welcher aus K^2 den Punkt C schneidet.

2. Die Durchführung der Construction giebt uns den exacten Nachweis für die Projectivität der Reihen $H_{1m} H_{1n}$.

Wir beginnen damit, dass wir in bekannter Weise* den vierten gemeinsamen Punkt P der Kegelschnitte $K^2(XYZAB)$ und $K^2_1(XYZA_1B_1)$ suchen (Fig. 1).** Sodann wählen wir auf K^2 zwei beliebige Punkte HH^*. Wir legen durch $ABXMH$ und $ABXMH^*$ zwei Kegelschnitte und zeichnen ihre Schnittpunkte $S_m S^*_m$ mit p. Zu dieser Construction benutzen wir den Satz von Pascal. Wir bringen also p mit AB zum Schnitte. Der Schnittpunkt T liegt auf den zwei Pascallinien. Die Gerade BM schneidet aus XH, XH^* je einen weiteren Punkt $F_m F^*_m$. Folglich sind TF_m, TF^*_m die Pascallinien. Sie treffen resp. $\overline{AH}$, $\overline{AH^*}$ in zwei Punkten $G_m G^*_m$. Indem wir diese aus M auf p projiciren, erhalten wir $S_m S^*_m$.

Jetzt legen wir durch $A_1B_1XMS_m$ und durch $A_1B_1XMS^*_m$ zwei Kegelschnitte und zeichnen ihre vierten Schnittpunkte $H_{1m} H^*_{1m}$ mit K^2_1.

Der erste dieser Kegelschnitte und K^2_1 werden von der Linie MS_m in zwei Paaren einer Involution geschnitten. Suchen wir in dieser zum Schnittpunkte J_m von $\overline{MS_m}$ mit $\overline{A_1B_1}$ den entsprechenden Punkt, so geht durch ihn und X eine Gerade, welche H_{1m} enthält. Wir projiciren am besten diese Involution aus X auf K^2_1. Die Projection von M sei M_x. Die Projection von S_m ist P. Folglich liegt der Pol L_m der Involution auf der Linie $\overline{M_xP}$. Er ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit $\overline{MS_m}$. Projiciren wir schliesslich J_m aus X auf K^2_1 und sei O_m die Projection, so schneidet $\overline{O_mL_m}$ den Kegelschnitt K^2_1 ein zweites Mal in H_{1m}.

---

* Wir führen hier die Form der Construction von P an, welche für unsere weitere Darstellung zweckmässig erscheint. Wir gehen dabei von dem Satze aus, dass eine beliebige Gerade die Kegelschnitte $K^2K^2_1$ und die gegenüber liegenden Seiten des Vierecks $YYZP$ in Paaren einer Involution trifft. Als solche beliebige Gerade sei die Verbindungslinie von zwei Punkten — etwa AB — des einen Kegelschnittes gewählt. Dann projiciren wir die Involution aus einem der gemeinsamen Punkte — etwa aus X — auf den anderen Kegelschnitt. Wir zeichnen ihren Pol und suchen zu dem Strahle, welcher X mit dem Schnittpunkte J der Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{YZ}$ verbindet, den entsprechenden Strahl. Auf ihm liegt P. Wir ziehen also folgende Linien: XA, XB, XJ. Ihre zweiten Schnittpunkte mit K^2_1 seien $A^*B^*J^*$. $\overline{A^*B^*}$ trifft $\overline{AB}$ im Pole L der Involution. LJ^* schneidet K^2_1 in P.

** Die Figuren sind sämmtlich für circulare Curven dritter Ordnung gezeichnet. YZ sind als imaginäre Kreispunkte gewählt, so dass die Kegelschnitte $K^2K^2_1$ Kreise werden.

In analoger Weise wird H_{1m}^* gefunden. Die Linie $\overline{MS_m^*}$ trifft $\overline{A_1B_1}$ und PM_x in zwei Punkten J_m^* und L_m^*. Den ersten Punkt projiciren wir aus X auf $K^2{}_1$. Die Projection O_m^* verbinden wir mit L_m^*. Diese Verbindungslinie schneidet $K^2{}_1$ ein zweites Mal in H_{1m}^*.

Lassen wir in der erklärten Construction an Stelle von M den Punkt N treten, so erhalten wir zu HH^* die zugehörigen Punkte H_{1n}, H_{1n}^*. Dann sind $H_{1m}H_{1n}$, $H_{1m}^*H_{1n}^*$ zwei Paare einer Projectivität, welche P, C_1 zu Doppelpunkten hat. Folglich geht durch P und den Schnittpunkt der Geraden $\overline{H_{1m}H_{1n}^*}$, $\overline{H_{1m}^*H_{1n}}$ eine Linie, welche $K^2{}_1$ in C_1 trifft.

3. Ein Ueberblick über die projectivischen Reihen, welche bei der oben dargelegten Construction auftreten, führt uns zu einer einfacheren Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Punkten H und H_1.

Bewegt sich H auf K^2 (Fig. 1), so durchläuft F_m auf MB eine Reihe, welche zu dem Büschel der Strahlen XH perspectivisch liegt. Zu dieser Reihe F_m ist das Büschel der Pascallinien aus T perspectivisch. Das Büschel der Linien AH liegt zum Büschel der Geraden XH projectivisch. Also ist das erstere Büschel auch zum Büschel der Pascallinien projectivisch. In beiden Büscheln entspricht sich der Strahl AT selbst. Die Büschel sind daher perspectivisch. Ihre entsprechenden Strahlen schneiden sich in der Reihe der Punkte G_m. Mithin liegen diese Punkte auf einer Geraden g_n. Sie geht durch P und den Punkt M_b, in welchem die Linie $\overline{MB}$ den Kegelschnitt K^2 zum zweiten Male schneidet.

Das Analoge gilt für die Punkte G_n. Sie liegen ebenfalls auf einer Geraden g_n. Diese geht durch P und den Punkt N_b, in dem die Linie $\overline{NB}$ den Kegelschnitt K^2 zum zweiten Male trifft.

Zwei Punkte G_mG_n, welche zu demselben Punkte H auf K^2 gehören, liegen auf einer Geraden durch A und H. Damit sind die Punkte G_mG_n einander perspectivisch zugeordnet. A ist Perspectivcentrum. Benutzen wir diese Punkte an Stelle der Punkte H, so gestaltet sich die Construction eines entsprechenden Paares $H_{1m}H_{1n}$ in folgender Weise (Fig. 2): Wir suchen die zweiten Schnittpunkte M_bN_b der Linien BM, BN mit K^2. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P sind die Geraden g_m, g_n. Dann zeichnen wir die zweiten Schnittpunkte M_xN_x der Linien XM, XN mit $K^2{}_1$. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P seien l_m, l_n. Eine beliebige Linie m durch M schneide g_m, l_m, A_1B_1 in den resp. Punkten G_m, L_m, J_m (Fig. 1). Wir projiciren J_m aus X auf $K^2{}_1$. Die Projection O_m verbinden wir mit L_m. Diese Verbindungslinie trifft $K^2{}_1$ in H_{1m}. Sodann projiciren wir (Fig. 2) den Punkt G_m aus A auf g_n und verbinden die erhaltene Projection G_n mit N. Diese Verbindungslinie n treffe $\overline{A_1B_1}$, l_n resp. in J_nL_n. Wir ziehen $\overline{J_nX}$, schneiden mit dieser Linie $K^2{}_1$ und verbinden den Schnittpunkt O_n mit L_n. $\overline{O_nL_n}$ trifft $K^2{}_1$ in H_{1n}.

Eine zweite beliebige Gerade durch M führt zu einem Punktepaar H^*_{1m}, H^*_{1n} der Projectivität auf K^2_1 und damit ist die Projectivität bestimmt.

Diese Darstellung zeigt uns, wie durch eine Reihe von Schnitt- und Scheinbildungen aus der Reihe der Punkte H die zu ihnen projectivischen Reihen der Punkte H_{1m}, H_{1n} hervorgehen.

Wir bemerken noch, dass eine weitere Vereinfachung der Construction erreicht wird, wenn wir die Geraden durch M resp. N nicht beliebig wählen. Wir ziehen vielmehr durch M eine Gerade m, welche den Schnittpunkt L_{mt} der Linien l_m und $\overline{A_1 B_1}$ enthält (Fig. 2). Zu dieser Linie m gehört ein Punkt H_{1m}, der mit X zusammenfällt. Eine zweite Gerade n^* wählen wir so, dass sie N mit dem Schnittpunkte L_{nt} der Linien l_n und $\overline{A_1 B_1}$ verbindet. Auch dieser Geraden entspricht ein Punkt H^*_{1n}, der in X liegt. Wir suchen nun H_{1n} und H^*_{1m}. Diese Punkte correspondiren den in X zusammenfallenden Punkten H_{1m}, H^*_{1n}. Ziehen wir folglich in X die Tangente an K^2_1, so schneidet sie die Gerade $\overline{H^*_{1m} H_{1n}}$ in einem Punkte der Perspectivachse. Verbinden wir diesen mit dem Doppelpunkt P der Projectivität, so ist damit die Perspectivachse gefunden. Sie trifft K^2_1 zum zweiten Male im anderen Doppelpunkte der Projectivität, das heisst in C_1.

4. Wir ziehen einige Schlüsse, welche uns zu neuen Formen der Construction aus neun Punkten führen. Wir knüpfen dabei an die Projectivität an, welche zwischen den Punkten H des Kegelschnittes K^2 und den Punkten H_{1m} von K^2_1 besteht. Diese Projectivität wird durch die Linie g_m und die Geraden m aus M vermittelt. Wir haben gesehen, wie zu einer beliebigen Linie m der Punkt H_{1m} gefunden werden kann. Jetzt suchen wir zu einem beliebigen Punkte H_{1m} die entsprechende Linie m.

Eine Gerade durch H_{1m} schneide K^2_1 zum zweiten Male in O_m (Fig. 1). Sie treffe l_m in L_m. Projiciren wir O_m aus X auf $\overline{A_1 B_1}$, so erhalten wir einen Punkt J_m. Drehen wir nun die Gerade um H_{1m} und zeichnen wir zu jeder ihrer Lagen die zugehörigen Punkte L_m, J_m, so erkennen wir, dass diese Punkte zwei projectivische Reihen auf l_m und $\overline{A_1 B_1}$ beschreiben. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Reihen umhüllen also einen Kegelschnitt. l_m und $\overline{A_1 B_1}$ sind zwei Tangenten dieses Kegelschnittes. Die Specialisirung der Construction zeigt uns, dass auch die Linien $\overline{XP}$, $\overline{MX}$, $\overline{H_{1m} A_1}$, $\overline{H_{1m} B_1}$ den Kegelschnitt berühren. Duch M geht an denselben eine zweite Tangente. Diese entspricht dem Punkte H_{1m}. Nehmen wir umgekehrt eine beliebige Gerade durch M an, so bestimmt sie mit l_m, $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{XP}$ und $\overline{MX}$ einen Kegelschnitt. Construiren wir an ihn die zweite Tangente durch A_1 oder B_1, so schneidet diese K^2_1 zum zweiten Male in dem entsprechenden Punkte H_{1m}.

Führen wir diese Tangentenconstructionen mit Hilfe des Satzes von Brianchon durch, so können wir den Schnittpunkt B_m der Linien $\overline{A_1 X}$ und $\overline{M L_{mt}}$ (Fig. 1) als gemeinsamen Brianchonpunkt aller Kegelschnitte auffassen,

welche l_m, $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{XP}$ und $\overline{MX}$ zu Tangenten haben. Dann schneiden sich auf der Linie $\overline{PR_m}$ — sie sei mit r_m bezeichnet — diejenigen Tangenten je eines Kegelschnittes, welche durch A_1 und M gehen. Daraus folgt:

Das Büschel der Linien durch M ist perspectivisch zu dem Strahlenbüschel aus A_1 nach den entsprechenden Punkten H_{1m}. r_m ist die Perspectivachse beider Büschel.

Zur Construction von r_m erwähnen wir noch, dass die Tangenten aus A_1 und B_1 an einen Kegelschnitt der erwähnten Schaar sich in einem Punkte H_{1m} von K^2_1 treffen. Zu den Kegelschnitten der Schaar gehört auch derjenige, welcher MB_1 berührt. Durch den zweiten Schnittpunkt R_{b1} dieser Tangente mit K^2_1 geht also eine Tangente aus A_1. Folglich muss R_{b1} auf r_m liegen. Mit anderen Worten heisst dies: Projiciren wir den Punkt B_1 aus M auf K^2_1, so liegt diese Projection auf r_m.

Die analogen Schlüsse gelten für N. Jeder Geraden durch N entspricht ein Punkt H_{1n}. Das Büschel aus A_1 nach diesen Punkten ist perspectivisch zum Büschel der Geraden durch N. Die Perspectivachse r_n geht durch P. Ein zweiter Punkt derselben wird erhalten, wenn wir B_1 aus N auf K^2_1 projiciren.

5. Wir zeigen jetzt, wie die Linien r_m, r_n zur Construction der C^3 aus neun Punkten benutzt werden können.

Zu jedem Punkte H von K^2 gehört — wie wir oben sahen — eine Gerade m durch M und eine Gerade n durch N. m schneidet aus r_m, n aus r_n einen Punkt. Verbinden wir dieses Punktepaar mit A_1, so treffen diese Gerade den Kegelschnitt K^2_1 zum zweiten Male in den Punkten H_{1m}, H_{1n}, welche dem Punkte H correspondiren. Es entstehen folglich um A_1 zwei Strahlenbüschel, welche zu den Reihen der H_1 perspectivisch liegen. Also sind diese Büschel zu einander projectivisch. Einer der Doppelstrahlen geht durch P. Auf dem anderen liegt der gesuchte Punkt C_1. Um ihn zu construiren, zeigen wir zuerst, dass die Reihen auf $r_m r_n$, welche durch die entsprechenden Linien mn einander zugeordnet werden, perspectivisch sind. Dreht sich nämlich m um M, so beschreibt diese Gerade auf g_m und r_m perspectivische Reihen G_m, R_m. Wir projiciren die erste dieser Reihen aus A auf g_n. Die hierdurch entstehende Reihe wird mit N verbunden. Dann schneidet r_n aus diesem Strahlenbüschel eine zu ihm perspectivische Reihe R_n. Sie ist also zur Reihe der Punkte R_m projectivisch. Weil in beiden Reihen der Schnittpunkt der Träger sich selbst entspricht, geht die Projectivität in perspectivische Lage über. Die Reihen haben ein Perspectivcentrum S. Durch dieses geht der gesuchte Doppelstrahl der projectivischen Büschel aus A_1, welcher C_1 enthält.

Damit sind wir zu einer zweiten Construction der C^3 aus neun Punkten gelangt. Sie erfordert nach dem Gesagten folgende Linien (Fig. 3):

Wir suchen P und projiciren aus M und N den Punkt B auf K^2 und B_1 auf K^2_1. Durch diese Projectionen und P ziehen

wir die resp. Linien $g_m g_n$, $r_m r_n$. Dann wählen wir durch A zwei beliebige Gerade aa^*, welche $g_m g_n$ resp. in $G_m G^*_m$; $G_n G^*_n$ schneiden. Die zwei ersten Punkte projiciren wir aus M auf r_m, die zwei anderen aus N auf r_n. Sind $R_m R^*_m$, $R_n R^*_n$ die resp. Projectionen, so schneidet die Gerade $R_m R_n$ aus $R^*_m R^*_n$ einen Punkt S, den wir mit A_1 verbinden. $A_1 S$ trifft K^2_1 zum zweiten Male in C_1. Wir finden aus C_1 den Punkt C, indem wir den Schnittpunkt von $A_1 S$ mit $r_m (r_n)$ suchen. Diesen projiciren wir aus $M(N)$ auf $g_m (g_n)$. Dann liegt auf der Geraden, welche durch diese Projection und A geht, der Punkt C.

Die Construction wird dadurch noch etwas vereinfacht, dass wir an Stelle der beliebigen Linien aa^* die Geraden $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$ wählen. Sie schneiden sofort $r_m r_n$ in den Punkten $R_m R^*_n$ und wir müssen nur noch $R^*_m R_n$ construiren.

6. Eine dritte Construction der C^3 geht von den Linien m und n aus, welche durch die resp. Punkte M und N gehen. Zu jedem Punkte H von K^2 gehört ein solches Linienpaar. Es stellt die Geraden vor, welche den Punkten M und N in der Reciprocität $(ABH\Delta)$ entsprechen. Die Zuordnung dieser Linien wird durch A, g_m, g_n vermittelt. Jede Gerade durch A schneidet aus g_m und g_n zwei Punkte, durch welche zwei Linien m, n gehen. Folglich bilden diese Linien projectivische Büschel. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen also auf einem Kegelschnitt R^2.

Vertauschen wir nun den Kegelschnitt K^2 mit K^2_1, das heisst, lassen wir einen Punkt H_1 den Kegelschnitt K^2_1 durchlaufen, so wird durch jede Lage von H_1 eine Reciprocität $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$ festgelegt. Wir finden in dieser Reciprocität die entsprechenden Linien $m_1 n_1$ zu M, N, indem wir zwei Linien $g_{m1} g_{n1}$ benutzen. Sie gehen durch P und die zweiten Schnittpunkte der Geraden MB_1, NB_1 mit K^2_1. Die Gerade $A_1 H_1$ trifft $g_{m1} g_{n1}$ in zwei Punkten, durch welche resp. $m_1 n_1$ gehen. Folglich werden auch diese Linien durch A_1, g_{m1}, g_{n1} einander projectivisch zugeordnet und erzeugen einen Kegelschnitt R^2_1.

Jeder der zwei Kegelschnitte $R^2 R^2_1$ geht durch die drei Punkte M, N und P. Folglich schneiden sich diese Kegelschnitte in einem vierten Punkte U. Die Geraden, welche durch U und M resp. N gehen, entsprechen den Punkten MN in zwei Reciprocitäten $(ABC\Delta)$ und $(A_1 B_1 C_1 \Delta_1)$. Wir können daher MU und NU benutzen, um von diesen Reciprocitäten die Grundpunkte CC_1 zu finden. Sie liegen auf der gegebenen Curve dritter Ordnung.

Die bequeme Ausführung der Construction hängt von der Bestimmung der Kegelschnitte R^2, R^2_1 ab. Wir bemerken daher zu dieser Bestimmung Folgendes: Nach dem oben Gesagten wird ein Punkt von R^2 gefunden, indem wir $g_m g_n$ mit einer beliebigen Geraden durch A schneiden. Verbinden wir diese Schnittpunkte resp. mit M und N, so treffen sich diese

Verbindungslinien in einem Punkte von R^2. Specialisiren wir diese Construction für die Geraden $\overline{AM}$ und $\overline{AN}$, so folgt, dass $\overline{AM}$ aus g_n und $\overline{AN}$ aus g_m je einen Punkt von R^2 schneidet. Diese zwei Punkte und MNP bestimmen R^2. In analoger Weise wird R^2_1 bestimmt.

Fassen wir schliesslich die Constructionslinien zusammen, so ergiebt sich (Fig. 4):

Wir suchen P und projiciren M und N aus B auf K^2 und aus B_1 auf K^2_1 (wie bei 5). Durch P und diese Projectionen gehen die resp. Linien $g_m g_n$; $g_{m1} g_{n1}$. Sodann schneiden wir g_m mit $\overline{AN}$ und g_n mit $\overline{AM}$; ferner g_{m1} mit A_1N und g_{n1} mit A_1M. Die Punkte PMN bestimmen mit den ersten zwei Schnittpunkten einen Kegelschnitt R^2 und mit den letzten zwei einen Kegelschnitt R^2_1. Wir construiren den vierten gemeinsamen Punkt U. MU schneidet aus $g_m (g_{m1})$ und NU aus $g_n (g_{n1})$ Punkte, welche auf einer Geraden durch $A (A_1)$ liegen. Diese trifft $K^2 (K^2_1)$ zum zweiten Male in $C (C_1)$.

7. Im Zusammenhange mit der Construction einer Curve dritter Ordnung aus neun Punkten steht die Aufgabe, den neunten Punkt aller Curven dritter Ordnung zu finden, welche durch acht in allgemeiner Lage gegebene Punkte gehen.

Wir entwickeln eine Lösung dieser Aufgabe.

XYZ, AB, A_1B_1 und M seien die acht gegebenen Punkte. Wir legen wieder, wie oben, durch $XYZAB$ und $XYZA_1B_1$ zwei Kegelschnitte $K^2 K^2_1$ und zeichnen den vierten gemeinsamen Punkt P und die Linien $g_m r_m$ (Fig. 5). Durch jeden Punkt H von K^2 wird eine Curve des Büschels fixirt. Sie schneide K^2_1 in H_1. Dann wird die Projectivität der Punkte HH_1 durch $g_m r_m$ vermittelt (5).

Jede Curve des Büschels trifft die Linie A_1B_1 in einem dritten Punkte T_1. Er entspricht dieser Linie in einer Reciprocität $(ABH\Delta)$.* Wir erhalten diese Punkte T_1, indem wir durch $ABHX$ und den Schnittpunkt S von $\overline{A_1B_1}$ mit $\overline{XP}$ Kegelschnitte legen. Ihre zweiten Schnittpunkte mit $\overline{A_1B_1}$ sind die gesuchten Punkte T_1. Benutzen wir zu dieser Construction den Satz von Pascal, so können wir die Anordnung der Punkte so festsetzen, dass alle Pascallinien durch den Schnittpunkt O der Linien $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ gehen. Die Linien $\overline{HA}$ treffen $\overline{XP}$ je in einem zweiten Punkte U einer Pascallinie. Schneiden wir diese Pascallinien mit $\overline{BX}$, so gehen durch die Schnittpunkte L und die resp. H gerade Linien, auf denen die Punkte T_1 liegen.

Eine Linie HT_1 schneidet K^2 ausser in H noch in einem zweiten Punkte F. Suchen wir F mit Hilfe des Sechsecks $PXBAHF$, so finden wir, dass $\overline{OU}$ die Pascallinie ist, und dass F auf der Geraden $\overline{PO}$ liegt.

* Vergl. die oben citirte Abhandlung S. 70 Nr. 4.

Daraus ergiebt sich aber, dass alle Linien HT_1 durch den Punkt F gehen.

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich allgemein als Satz so fassen:

Der Kegelschnitt, welcher durch fünf Grundpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung geht, und die Gerade, welche zwei weitere Grundpunkte verbindet, werden von jeder Curve des Büschels in einem Punktepaar geschnitten. Diese Punktepaare liegen auf Geraden durch einen Punkt des Kegelschnittes.

Wenden wir diesen Satz auf den Kegelschnitt K^2_1 und die Gerade AB an, so folgt, dass jede Curve des Büschels aus K^2_1 und AB zwei Punkte H_1T schneidet, welche auf einer Geraden durch einen Punkt F_1 von K^2_1 liegen. F_1 ist der Schnittpunkt der Linie OP mit K^2_1.

Die Projectivität, welche zwischen den Punkten HH_1 besteht, überträgt sich auf die Strahlen FH, F_1H_1. Diese bilden — weil der Strahl FF_1 sich selbst entspricht — perspectivische Büschel. Folglich schneiden sich entsprechende Strahlen der Büschel auf Punkten einer Geraden m. Die Bedeutung von m ergiebt sich aus der Bemerkung, dass TT_1 Sternpunkte auf AB, A_1B_1 in zwei zusammengehörigen Reciprocitäten $(ABH\Delta)$ $(A_1B_1H_1\Delta_1)$ sind. Daraus folgt*, dass sich die Linien HT_1, H_1T in einem Punkte E derjenigen Curve C^3 schneiden, welche durch die erwähnten Reciprocitäten dargestellt wird. Wir schliessen daher: Jede Gerade durch $F(F_1)$ schneidet aus m, $\overline{A_1B_1}$, K^2 (m, $\overline{AB}$, K^2_1) drei Punkte einer Curve dritter Ordnung des Büschels.

8. Auf m muss der neunte Punkt M_1 des Büschels liegen. Soll nämlich M_1 allen Curven des Büschels gemeinsam sein, so muss M_1 auch derjenigen Curve angehören, für welche die Gerade FM_1 aus m, A_1B_1, K^2 drei Punkte schneidet. Einer dieser Punkte muss M_1 sein; denn sonst würden auf FM_1 vier Punkte einer C^3 liegen und diese Curve zerfiele in eine Gerade und einen Kegelschnitt. Dies ist unmöglich, wenn die acht Grundpunkte — wie vorausgesetzt — in allgemeiner Lage gegeben sind. Derselben Voraussetzung widerspricht es, dass M_1 auf K^2 oder auf A_1B_1 liegt. Im ersten Falle enthielte K^2 sechs, im zweiten Falle A_1B_1 drei Grundpunkte des Büschels. In beiden Fällen könnten die acht gegebenen Grundpunkte sich nicht in allgemeiner Lage befinden. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass M_1 auf m liegt.**

Wir wenden uns nun zur Construction von m und M_1.

M ist ein Punkt von m; denn läge M nicht in m, so müsste die Gerade $\overline{FM}$ vier Punkte einer Curve des Büschels enthalten. Wir haben oben gesehen, dass dies unmöglich ist. Ein zweiter Punkt E von m wird

* Loco citato p. 70 No. 4 und p. 71 Nr. 5.

** Dass m zwei Grundpunkte enthält, folgt auch aus der Umkehrung des in 7 bewiesenen Satzes.



gefunden, indem wir ein entsprechendes Paar HH_1 construiren und FH mit F_1H_1 zum Schnitte bringen. Wir wählen am besten an Stelle von H den zweiten Schnittpunkt von AM mit K^2. Durch diese Wahl wird die Construction von g_m überflüssig.

Um M_1 auf m zu finden, bemerken wir, dass jede Curve des Büschels aus $K^2(K^2_1)$ und m ein Punktepaar schneidet, welches auf einer Geraden durch $F(F_1)$ liegt. Es gilt also für diese Punkte, was wir im Satze von 7 bewiesen haben. Wir können daher in Umkehrung der Reihenfolge die Figur construiren, welche zu diesem Satze führte. Dann folgt, dass eine Gerade durch $F(F_1)$ und den Schnittpunkt von m mit $AB(A_1B_1)$ aus $K^2(K^1_2)$ einen Punkt $P_m(P_{m1})$ schneidet, welcher mit $XYZMM_1$ auf einem Kegelschnitt liegt. Derselbe wird durch $XYZMP_m(P_{m1})$ bestimmt und trifft m in M_1. Fassen wir schliesslich nochmals die nöthigen Constructionslinien zusammen, so ergiebt sich für die Construction des neunten Punktes Folgendes (Fig. 6):

Wir suchen P, projiciren M aus B_1 auf K^2_1 und ziehen durch P und diese Projection die Gerade r_m. Dann verbinden wir P mit dem Schnittpunkte O der Linien $\overline{AB}$, A_1B_1 und construiren die Schnittpunkte FF_1 dieser Verbindungslinie mit $\overline{K^2, K^2_1}$. Hierauf suchen wir den zweiten Schnittpunkt H von $\overline{MA}$ mit K^2 und den Schnittpunkt R von $\overline{MA}$ mit r_m. $\overline{RA_1}$ schneidet K^2_1 zum zweiten Male in H_1. Wir ziehen durch M und den Schnittpunkt E der Linien $\overline{FH}$, $\overline{F_1H_1}$ die Gerade m und suchen ihren Schnittpunkt $O_m(O_{m1})$ mit $\overline{AB}(\overline{A_1B_1})$. $FO_m(F_1O_{m1})$ trifft $K^2(K^2_1)$ ein zweites Mal in $P_m(P_{m1})$. Endlich construiren wir den neunten Punkt M_1 als den zweiten Schnittpunkt der Linie m mit einem Kegelschnitt, welcher durch $XYZMP_m(P_{m1})$ geht.*

In Figur 6 ist die Curve C^3_h des Büschels eingezeichnet, welche durch das Punktepaar HH_1 bestimmt wird. Sie geht durch E und die Schnittpunkte T, T_1 von $\overline{AB}$ mit $\overline{F_1H_1}$ und $\overline{A_1B_1}$ mit $\overline{FH}$.

10. Die Construction des neunten Punktes zu den acht Grundpunkten eines Büschels von C^3 lässt sich anwenden, um eine Curve dritter Ordnung aus neun Punkten zu zeichnen. Wir fassen je acht dieser neun Punkte als Grundpunkte eines Büschels auf und construiren den neunten Punkt. Alle diese neunten Punkte liegen auf C^3.

Der Gedanke, welcher zur Construction des neunten Punktes führte, lässt sich aber noch in anderer Weise für eine vierte Construction der C^3 aus neun Punkten verwerthen.

Wir suchen wieder zwei Reciprocitäten, durch welche sich C^3 darstellen lässt und gehen dabei von zwei Curvenbüscheln aus, welche $XYZABA_1B_1$ und M resp. N zu Grundpunkten haben. Wir zeichnen

---

* In Figur 6 ist dieser Kegelschnitt ein Kreis, weil YZ die imaginären Kreispunkte sind.

für das erste Büschel die Linie M, welche m mit dem neunten Punkte M_1 verbindet. Ferner suchen wir für das zweite Büschel die Linie n, welche durch N und den neunten Punkt N_1 dieses Büschels geht. Der Schnittpunkt E der Linien m und n muss auf der gegebenen C^3 liegen. Die Gerade FE schneidet nämlich aus K^2 und A_1B_1 zwei Punkte, welche einer Curve des einen und einer Curve des anderen Büschels angehören. Keiner dieser zwei Punkte kann Grundpunkt eines der zwei Büschel sein, weil acht Grundpunkte jedes Büschels in allgemeiner Lage gegeben sind. Folglich müssen die in Rede stehenden zwei Curven dritter Ordnung mit der gegebenen C^3 zusammenfallen. CT_1 sind zwei ihrer Punkte. Ein dritter ist E. Die Gerade F_1E schneidet aus K^2_1 und AB zwei weitere Punkte C_1T. ABC, $A_1B_1C_1$ sind die Grundpunkte der gesuchten Reciprocitäten.

Zur Erklärung der Figur 7, welche die entwickelten Gedanken darstellt, fassen wir die nöthigen Constructionslinien nochmals zusammen.

Wir suchen P, F, F_1, r_m und m wie oben (9 und Fig. 6). Dann projiciren wir N aus B_1 auf K^2_1 und ziehen durch P und diese Projection die Gerade r_n. $\overline{AN}$ schneide K^2 in H_n und r_n in R_n. Wir construiren den zweiten Schnittpunkt H_{1n} von $\overline{A_1R_n}$ mit K^2_1. Die Verbindungslinie von N mit dem Schnittpunkte der Geraden FH_n, F_1H_{1n} ist n. m trifft n in einem Punkte E von C^3. FE, F_1E schneiden $K^2K^2_1$ resp. in C, C_1 und AB, A_1B_1 resp. in TT_1.

Schliesslich sei bemerkt, dass in der Figur auch die neunten Punkte M_1N_1 gezeichnet sind. Wir projiciren die Schnittpunkte der Geraden $AB(A_1B_1)$ mit m und n aus $F(F_1)$ auf $K^2(K^2_1)$. Die Projectionen bestimmen resp. mit $XYZM$, $XYZN$ zwei Kegelschnitte. Der eine trifft m in M_1, der andere n in N_1.

11. Die erklärten Constructionen der C^3 aus neun Punkten behalten für eine Reihe von Specialfällen ihre Giltigkeit.

Zunächst sehen wir, dass je die Punkte XYZ, AB, A_1B_1, MN dieselbe Rolle spielen. Wir dürfen daher die Punkte von jeder dieser vier Gruppen unter einander vertauschen.

Ferner können wir die Punkte der drei ersten Gruppen einander unendlich nahe rücken lassen. Nehmen wir an, dass die drei Punkte XYZ auf einer Geraden unendlich benachbart liegen, so ist C^3 durch eine Inflexionstangente, ihren Berührungspunkt und sechs Punkte gegeben. Die Aenderung, welche hierdurch in der allgemeinen Construction eintritt, beschränkt sich darauf, dass sich die Kegelschnitte $K^2K^2_1$ in X osculiren. Ebenso einfach gestalten sich die Constructionen, wenn zwei oder drei Punkte XY, oder wenn die Punkte AB, A_1B_1 als Berührungspunkte je einer Tangente zusammenfallen. Wir erhalten dann Constructionen für Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte und die Tangente in einem, durch sieben Punkte und die Tangenten in zweien oder durch sechs Punkte und die Tangenten in drei dieser Punkte gehen.

Lassen wir aber M und N als Berührungspunkte einer Tangente zusammenfallen, so versagen die bis jetzt abgeleiteten Constructionen. Die Linien $r_m r_n$, $g_m g_n \dots$ fallen zusammen und es tritt eine gewisse Unbestimmtheit ein.

Wir leiten daher eine fünfte Construction einer Curve C^3 aus neun Punkten ab.

Wir werden sehen, dass diese Construction auch dann Giltigkeit hat, wenn C^3 durch fünf Punkte und die Tangenten in vier derselben gegeben ist. Zugleich löst die Construction die allgemeine Aufgabe, den dritten Schnittpunkt einer Geraden mit C^3 zu finden, wenn diese Gerade durch zwei gegebene Punkte der C^3 geht.

12. Für die Erklärung der neuen Construction ist es bequem, die neun gegebenen Punkte der C^3 mit XYZ, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 zu bezeichnen. Die Geraden $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ seien resp. c_1, c_2, c_3. Wir legen nun drei Kegelschnitte $K^2{}_1 K^2{}_2 K^2{}_3$, welche die Punkte XYZ gemein haben und resp. durch A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 gehen.* Wir suchen hierauf den vierten gemeinsamen Punkt P_3 zwischen $K^2{}_1 K^2{}_2$ und den vierten gemeinsamen Punkt P_1 zwischen $K^2{}_2 K^2{}_3$.

Durch die acht Punkte XYZ, A_1B_1, A_2B_2 und A_3 wird ein Büschel $C^3{}_{12}$ von Curven dritter Ordnung bestimmt. Jeder Punkt H_1 auf $K^2{}_1$ fixirt eine Curve des Büschels. Sie schneidet $K^2{}_2$ in einem sechsten Punkte H_2 und die Gerade c_2 in einem dritten Punkte T_2. Die Reihe der Punkte H_1 ist perspectivisch zur Reihe der Punkte T_2 (Satz von 7). Das Perspectivcentrum ist ein Punkt F_1 auf $K^2{}_1$. Ferner ist die Reihe der H_1 projectivisch zur Reihe der H_2. Die Projectivität wird durch zwei Gerade $g_3 r_3$ vermittelt, welche durch P_3 und die zwei Schnittpunkte der Linien A_1A_3, A_2A_3 mit den resp. Kegelschnitten $K^2{}_1 K^2{}_2$ gehen (5).

Wir führen jetzt den analogen Gedankengang für ein zweites Büschel von Curven dritter Ordnung $C^3{}_{23}$ aus, welches XYZ, A_2B_2, A_3B_3 und A_1 zu Grundpunkten hat. Die Curven dieses Büschels schneiden aus $K^2{}_2 K^2{}_3$ und aus c_2 Reihen von Punkten H_2, H_3, $T^*{}_2$. Die ersten dieser zwei Reihen sind zu einander projectivisch. Entsprechende Punkte werden mit Hilfe von zwei Geraden $g_1 r_1$ gefunden, welche durch P_1 und die zweiten Schnittpunkte der Geraden A_2A_1, A_3A_1 mit den resp. Kegelschnitten $K^2{}_2$, $K^2{}_3$ gehen. Die Reihe der H_3 liegt perspectivisch zur Reihe der $T^*{}_2$. Perspectivcentrum ist ein in $K^2{}_3$ liegender Punkt F_3.

Wir ordnen nun die Reihen $T_2 T^*{}_2$ einander projectivisch zu. Durch jeden Punkt H_1 von $K^2{}_1$ geht eine Curve $C^3{}_{12}$, welche $K^2{}_2$ in einem Punkte H_2 schneidet. Durch ihn geht eine bestimmte Curve $C^3{}_{23}$, welche $K^2{}_3$ in einem sechsten Punkte H_3 trifft. Auf diese Weise wird jedem Punkte H_1 ein Punkt H_3, und somit jedem Punkte T_2 ein Punkt $T^*{}_2$ zugeordnet.

* In Figur 8 sind $K^2{}_1 K^2{}_2 K^2{}_3$ Kreise, weil die Curve C^3 circular gewählt ist.

Diese Punkte bilden also projectivische Reihen. Die zwei Doppelpunkte der Reihen haben verschiedene Bedeutung.

Je zwei durch einen Punkt H_2 einander zugeordnete Curven dritter Ordnung C^3_{12}, C^3_{23} bestimmen ein Büschel von C^3, denn sie haben die Punkte XYZ, A_1A_2, B_2, A_3 und einen Punkt H_2 auf K^2_2 gemeinsam. Bekanntlich gehen die Curven eines solchen Büschels durch einen neunten Punkt. In unserem Falle liegen sechs der acht gemeinsamen Punkte auf dem Kegelschnitt K^2_2. Mithin müssen die zwei anderen gemeinsamen Punkte mit dem neunten Punkte auf einer Geraden liegen. Diese ist die Linie A_1A_3. Sie enthält alle neunten Punkte der erwähnten Curvenbüschel. Folglich wird sie die Linie c_2 in einem Punkte V treffen, welcher ein neunter Punkt für eines dieser Curvenbüschel ist. In ihm schneidet also eine bestimmte Curve C^3_{12} ihre entsprechende Curve C^3_{23}. Folglich ist V einer der Doppelpunkte für die projectiven Reihen $T_2T^*_2$. Zum anderen Doppelpunkte W gehören zwei Curven C^3_{12}, C^3_{23}, welche neun Punkte in allgemeiner Lage gemein haben. Daraus folgt, dass diese zwei Curven mit derjenigen C^3 zusammenfallen, welche durch die neun gegebenen Punkte geht. W liegt also auf dieser C^3.

Verbinden wir W mit F_1F_3, so schneiden diese Geraden resp. aus $K^2_1K^2_3$ zwei weitere Punkte C_1C_3. Sie bestimmen mit A_1B_1, A_3B_3 zwei Reciprocitäten, durch welche C^3 dargestellt werden kann.

13. Indem wir die Ausführung dieser Construction besprechen, gelangen wir noch zu einigen Abkürzungen.

Wir verfolgen zuerst den Linienzug, welcher von einem Punkte H_1 zu dem entsprechenden Punkte H_3 führt. Kennen wir g_3r_3, g_1r_1, so ziehen wir $\overline{H_1B_1}$(5). Diese Gerade schneide g_3 in G_3. $\overline{G_3A_3}$ treffe r_3 in R_3. Wir ziehen $\overline{R_3B_2}$. Diese Linie schneidet K^2_2 zum zweiten Male in H_2. Sie treffe g_1 in G_1. $\overline{G_1A_1}$ schneide r_1 in R_1. Verbinden wir schliesslich R_1 mit B_3, so schneidet diese Verbindungslinie den Kegelschnitt K^2_3 zum zweiten Male in H_3. Die Ecken des Linienzuges sind also:

$$H_1 - B_1 - G_3 - A_3 - R_3 - B_2 - G_1 - A_1 - R_1 - B_3 - H_3.$$

Dieser Linienzug wird abgekürzt, wenn wir einmal an Stelle von H_1 den Punkt P_3 und dann an Stelle von H_3 den Punkt P_1 setzen. Im ersten Falle deckt sich H_2 mit H_1. Im zweiten Falle liegt H_2 in H_3.

Zur Construction von W bemerken wir, dass die Büschel aus F_1F_3 nach den resp. Punkten H_1H_3, $T_2T^*_2$ zu einander projectivisch sind. Sie erzeugen also einen Kegelschnitt K^2. Er schneidet c_2 in V und W. F_1F_3V sind drei bekannte Punkte von K^2. Zeichnen wir noch zwei weitere Punkte auf den Linien F_1P_3, F_3P_1, so ist damit der Kegelschnitt bestimmt. Sein zweiter Schnittpunkt mit c_2 ist W.

Fassen wir schliesslich die Constructionslinien, wie sie in Figur 8 dargestellt sind, zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

Wir construiren P_3P_1, g_3r_3, g_1r_1. Dann verbinden wir den Schnittpunkt O_1 der Linien c_1c_2 mit P_3. Diese Verbindungslinie trifft K^2_1 zum zweiten Male in F_1. Ferner ziehen wir durch P_1 eine Gerade nach dem Schnittpunkte O_3 der Linien c_3c_2. Sie schneidet K^2_3 zum zweiten Male in F_3. Hierauf construiren wir zu P_3 den entsprechenden Punkt H_3 durch den Linienzug $P_3-B_2-G_1-A_1-R_1-B_3-H_3$. Zu P_1 finden wir den entsprechenden Punkt H_1 durch den Linienzug $P_1-B_2-R_3-A_3-G_3-B_1-H_1$. $\overline{F_1P_3}$ schneide $\overline{F_3H_3}$ in S_1. $\overline{F_3P_1}$ treffe $\overline{F_1H_1}$ in S_3. $\overline{A_1A_3}$ schneidet c_2 in V. Construiren wir endlich den zweiten Schnittpunkt von c_2 mit dem Kegelschnitt, welcher durch $F_1F_3VS_1S_3$ geht, so erhalten wir W. Die Linien F_1W, F_3W schneiden resp. $K^2_1K^2_3$ zum zweiten Male in C_1C_3. Durch den Linienzug

$$C_1 - B_1 - G_3 - A_3 - R_3 - B_2 - C_2$$

oder

$$C_3 - B_3 - R_1 - A_3 - G_1 - B_2 - C_2$$

wird C_2 gefunden, das heisst, der sechste Schnittpunkt der gegebenen C^3 mit K^2_2.

Lassen wir in der erklärten Construction Y mit Z, A_1 mit B_1, A_2 mit B_2, A_3 mit B_3 als Berührungspunkte von Tangenten zusammenfallen, so finden wir die Curve dritter Ordnung, welche durch fünf Punkte und die Tangenten in vier dieser Punkte geht.

Unsere Ueberlegungen haben nun gezeigt, dass jede beliebige Curve dritter Ordnung durch zwei Reciprocitäten dargestellt werden kann. Wir haben die Grundpunkte von zwei solchen Reciprocitäten in mancherlei Weise und zwar stets mit dem Lineal allein* construirt. Die Beziehungen dieser Reciprocitäten zu einander und die Untersuchung ihrer Δ wird uns zu den Singularitäten der C^3 und zu ihren speciellen Formen führen. Wir treten jetzt auf diese Relationen nicht näher ein.

* Alle oben mit Kegelschnitten ausgeführten Constructionen sind linear.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges.

Eine Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades besitzt bekanntlich n^r-Elemente und $(n!)^{r-1}$-Glieder. Ein Element wird mit r-Indices versehen und durch das Symbol von der Form $a_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r}$ dargestellt, wobei jeder Zeiger irgend eine der Zahlen $1, 2 \ldots n$ bedeuten kann. Wir nennen k-Elemente, bei welchen die gleichstelligen Zeiger eine Variation k^{ter} Klasse o. W. aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ bilden, k-transversale Elemente, dann bilden die n-Elemente irgend eines Gliedes, also auch des Anfangsgliedes $a_{1,1 \ldots 1_r} a_{2, \ldots 2_r} \ldots a_{n \ldots n_r}$, n-transversale Elemente.

Die adjungirte Unterdeterminante eines jeden Elementes ist bekanntlich eine Determinante r^{ten} Ranges und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Es bezeichne $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$ die Anzahl der verschwindenden bezw. der nicht verschwindenden Glieder — also die Gliederzahl — einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades mit k transversalen Nullelementen, so bedeuten die Symbole $\overset{r}{A}{}_0^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_0^{(n)}$ die Anzahl der ersteren bezw. der letzteren Glieder dieser Determinante ohne Nullelemente.

Es bestehen dann die Gleichungen:

$$1)\qquad \overset{r}{A}{}_0^{(n)} = 0,$$

$$2)\qquad \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_0^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

$$3)\qquad \overset{r}{A}{}_k^{(n)} + \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

giltig für $k = 0, 1 \ldots n$.

Die Grösse $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$ kann durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$\overset{r}{A}{}_k^{(n)} = \overset{r}{A}{}_{k-1}^{(n)} + \sigma,$$

wenn σ die Anzahl der Glieder bezeichnet, deren Verschwinden durch das k^{te} Nullelement b_k bewirkt wird. Die Grösse σ ist also gleich der Gliederzahl der adjungirten Unterdeterminante B_k des Elementes b_k, B_k ist aber eine Determinante r^{ten} Ranges und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche die $(k-1)$ ersten Nullelemente enthält, mithin wird die Gliederzahl σ von B_k durch das Symbol $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{k-1}^{(n-1)}$ ausgedrückt; es ist also

$$4)\qquad \overset{r}{A}{}_k^{(n)} = \overset{r}{A}{}_{k-1}^{(n)} + \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{k-1}^{(n-1)}$$

giltig für $k = 1, \ldots n$.



Ersetzt man in 4) die Grössen A mit Hilfe der Gleichung 3) durch die entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$, so ist

5) $$\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{k-1}^{(n)} - \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{k-1}^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, \ldots n$.

Schreibt man in 5) τ für k und bildet daraus die für

$$\tau = (p+1), (p+2) \ldots k$$

— wobei $p = 0, 1 \ldots (k-1)$ ist — sich ergebenden Ausdrücke, so erhält man nach Addition der letzteren folgende Formel:

6) $$\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_p^{(n)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} + \sum_{\tau=p}^{\tau=k-1} \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_\tau^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, \ldots n$ und $p = 0, 1 \ldots (k-1)$.

Für $p = 0$ folgt aus 6) mit Rücksicht auf 2):

7) $$[n!]^{r-1} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} + \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_\tau^{(n-1)},$$

giltig für $k = 1, 2 \ldots n$.

Ersetzt man in 7) die Grösse $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$ durch ihren aus 3) folgenden Werth, so folgt:

$$\overset{r}{A}{}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-1} \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_\tau^{(n-1)}$$

giltig für $k = 1, 2, \ldots n$.

Um den Fundamentalsatz für $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$ zu erhalten, bilden wir die Reihe R_ϱ, deren Glieder aus ihrem allgemeinen Gliede

$$g_\varrho^{(\lambda)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_\varrho^{(\varrho+\lambda-1)}$$

für $\lambda = 1, 2 \ldots (n+\nu) \ldots$ erhalten werden.

Bildet man aus der Gleichung 5) für $n = q + \lambda - 1$ und $k = q$ die Formel:

$$\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_q^{(q+\lambda-1)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{q-1}^{(q+\lambda-1)} - \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{q-1}^{(q+\lambda-2)},$$

so sieht man, dass das allgemeine Glied

$$g_{q-1}^{(\lambda+1)} - g_{q-1}^{(\lambda)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{q-1}^{(q+\lambda-1)} - \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{q-1}^{(q+\lambda-2)}$$

der ersten Differenzreihe von der für $\varrho = q - 1$ entstehenden Reihe R_{q-1} durch den Ausdruck: $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_q^{(q+\lambda-1)}$ dargestellt wird, daher mit dem allgemeinen Gliede

$$g_q^{(\lambda)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_q^{(q+\lambda-1)}$$

der für $\varrho = q$ erhaltenen Reihe R_q identisch ist, woraus folgt, dass die Reihe R_q die erste Differenzreihe der Reihe R_{q-1} ist, mithin R_q die $(q-1)^{\text{te}}$ Differenzreihe der für $\varrho = 1$ erhaltenen Reihe R_1 bildet. Man erkennt ferner, dass die Reihe R_1 die erste Differenzreihe der für $\varrho = 0$

hervorgehenden Reihe R_0 darstellt, so dass die Reihe R_q die q^{te} Differenzreihe der Reihe R_0 ist; man hat also den Satz:

Die aus ihrem allgemeinen Gliede: $\overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(k+\lambda-1)}$ für

$$\lambda = 1 \dots (n+\nu) \dots$$

hervorgehende Reihe:

$$\overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(k)},\quad \overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(k+1)}, \dots \overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(n)} \dots \overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(n+\nu)} \dots,$$

deren auf einander folgende Glieder die Gliederzahlen der Determinanten r^{ten} Ranges von dem k^{ten} bis zum n^{ten} ... Grade mit je k-transversalen Nullelementen bedeuten, bildet die k^{te} Differenzreihe von der Reihe:

$$(0!)^{r-1},\quad (1!)^{r-1},\quad (2!)^{r-1} \dots (n!)^{r-1} \dots,$$

welche aus ihrem allgemeinen Gliede $\overset{r}{\mathfrak{A}}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$ für $\lambda = 1, \dots n$ erhalten wird; wobei $\overset{r}{\mathfrak{A}}_0^{(0)} = (0!)^{r-1} = 1$.

Es folgt ferner:

Die Gliederzahl $\overset{r}{\mathfrak{A}}_k^{(k+x)}$ einer Determinante r^{ten} Ranges und $(k+x)^{ten}$ Grades mit k-transversalen Nullelementen ist das $(x+1)^{te}$ Glied der k^{ten} Differenzreihe von der Reihe:

$$(0!)^{r-1},\quad (1!)^{r-1} \dots (n!)^{r-1} \dots,$$

welche aus ihrem allgemeinen Gliede $\mathfrak{A}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$ für $\lambda = 1, 2 \dots n$ erhalten wird.

In der Theorie der Differenzreihen erhält man für eine aus $(n+1)$ Gliedern bestehende Hauptreihe die folgenden Gleichungen:

$$\text{I)} \qquad D_k g_\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau . (k-p)_\tau . D_p g_{k+\lambda-p-\tau},$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$; $\lambda = 1, 2 \dots (n+1-k)$; $p = 0, \dots (k-1)$;

$$\text{II)} \qquad D_p g_{r+\lambda} = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda} (\lambda)_\tau . D_{k+\tau} g_r,$$

giltig für $k = 0, 1 \dots (n-1)$; $r = 1, 2 \dots (r+\lambda-1)$; $\lambda = 1, 2 \dots (n+1-k-r)$;

$$\text{III)} \qquad \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\tau} D_k g_{r+\varrho} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda+1} (\lambda+1)_\tau . D_{k+\tau-1} g_r,$$

giltig für $k = 0, 1 \dots (n-1)$; $r = 1, 2 \dots (n-k)$; $\lambda = 1, 2 \dots (n+1-k-r)$;

$$\text{IV)} \qquad \sum_{\tau=1}^{\tau=n+1-k} D_k g_\tau = D_{k-1} g_{n+2-k} - D_{k-1} g_1,$$

giltig für $k = 1, 2 \dots n$.

In diesen Gleichungen bedeutet allgemein $(q)_\tau$ den τ^{ten} Binomialcoefficienten der q^{ten} Potenz, und mit:

$$\text{V)}\qquad D_0 g_\lambda = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_0^{(\lambda-1)} = [(\lambda-1)!]^{r-1}$$

das allgemeine Glied der Hauptreihe, mit

$$\text{VI)}\qquad D_k g_\lambda = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(k+\lambda-1)}$$

das allgemeine Glied der k^{ten} Differenzreihe bezeichnet ist.

Mit Hilfe dieser Gleichungen könnte man verschiedene Formeln für die Grössen $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$ und $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$ herleiten, es soll aber nur die independente Form derselben bestimmt werden.

Aus der Gleichung I) folgt für $\lambda = n+1-k$:

$$9)\qquad \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k-p} (-1)^\tau . (k-p)_\tau . \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_p^{(n-\tau)},$$

giltig für $k = 1, 2 \ldots n$ und $p = 0, 1 \ldots (k-1)$.

Aus 9) erhält man für $p=0$ die independente Form von $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$; es ist:

$$10)\qquad \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=k} (-1)^\tau . (k)_\tau . [(n-\tau)!]^{r-1},$$

giltig für $k = 0, 1 \ldots n$; der Werth $k=0$ ist zulässig, weil dafür die Gleichung 10) den richtigen Werth $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_0^{(n)} = (n!)^{r-1}$ liefert.

Aus 3) und 10) erhält man die independente Form von $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$; es ist:

$$11)\qquad \overset{r}{A}{}_k^{(n)} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=k} (-1)^\tau . (k)_\tau . [(n-\tau)!]^{r-1},$$

giltig für $k = 1, 2 \ldots n$.

Für $k=n$ folgt aus den Gleichungen 10) und 11):

$$12)\qquad \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_n^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau . (n)_\tau . [(n-\tau)!]^{r-1} = n! . \sum_{\tau=0}^{\tau=n} (-1)^\tau . \frac{[(n-\tau)!]^{r-2}}{\tau!}$$

und

$$13)\qquad \overset{r}{A}{}_n^{(n)} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=n} (-1)^\tau . (n)_\tau . [(n-\tau)!]^{r-1} = -n! . \sum_{\tau=1}^{\tau=n} (-1)^\tau . \frac{[(n-\tau)!]^{r-2}}{\tau!}.$$

Bezeichnet man mit $\overset{r}{F}{}_k^{(n)}$ und $\overset{r}{F}{}_{k0}^{(n)}$ die Anzahl der Glieder einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades, welche Elemente eines gegebenen Systems $k \leqq n$-transversaler Elemente als Factor enthalten bezw. nicht enthalten, so bestehen die Gleichungen:

$$14)\qquad \overset{r}{F}{}_k^{(n)} + \overset{r}{F}{}_{k0}^{(n)} = [n!]^{r-1},$$

$$15)\qquad \overset{r}{F}{}_k^{(n)} = \overset{r}{A}{}_k^{(n)},$$

$$16)\qquad \overset{r}{F}{}_{k0}^{(n)} = \overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)},$$

giltig für $k=0, 1 \dots n$; die Annahme $k=0$ ist in dem Sinne zu definiren, dass, wenn alle Elemente des gegebenen Systems den Werth Null haben, die Symbole $\overset{r}{F}{}_{00}^{(n)}$ und $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_0^{(n)}$ bezw. $\overset{r}{F}{}_0^{(n)}$ und $\overset{r}{A}{}_0^{(n)}$ dieselbe Bedeutung haben.

Infolge der Gleichungen 15) und 16) haben alle für $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$ giltigen Formeln auch für $\overset{r}{F}{}_k^{(n)}$, und die für $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_k^{(n)}$ auch für $\overset{r}{F}{}_{k0}^{(n)}$ Giltigkeit.

Ordnet man die betrachteten transversalen Elemente in einer bestimmten sonst aber ganz beliebigen Reihenfolge, so ist die Anzahl derjenigen Glieder $\overset{r}{E}{}_\lambda^{(n)}$, in welchen keines der $(\lambda-1)$ ersten Elemente vorkommt, dabei aber jedes dieser Glieder das λ^{te} Element enthält, durch den Ausdruck gegeben:

$$17)\qquad \overset{r}{E}{}_\lambda^{(n)}=\overset{r}{F}{}_\lambda^{(n)}-\overset{r}{F}{}_{\lambda-1}^{(n)}=\overset{r}{A}{}_\lambda^{(n)}-\overset{r}{A}{}_{\lambda-1}^{(n)}=\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{\lambda-1}^{(n-1)},$$

giltig für $\lambda=1, 2 \dots n$.

Die Gleichung 17) enthält den Satz:

Ordnet man die betrachteten transversalen Elemente einer Determinante r^{ten} Ranges und n^{ten} Grades in einer bestimmten, sonst aber beliebigen Reihenfolge, so ist die Anzahl der Glieder, in welchen keines der $(\lambda-1)$ ersten Elemente vorkommt, dabei aber jedes dieser Glieder das λ^{te} Element enthält, gleich der Gliederzahl einer Determinante r^{ten} Ranges und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit $(\lambda-1)$ transversalen Nullelementen.

Substituirt man den aus 10) dadurch sich ergebenden Werth von $\overset{r}{\mathfrak{A}}{}_{\lambda-1}^{(n-1)}$, dass darin $(n-1)$ für r und $(\lambda-1)$ für k gesetzt wird, in die Gleichung 17), so erhält man $\overset{r}{E}{}_\lambda^{(n)}$ in independenter Form:

$$18)\qquad \overset{r}{E}{}_\lambda^{(n)}=\sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1}(-1)^\tau.(\lambda-1)_\tau.[(n-1-\tau)!]^{r-1},$$

giltig für $\lambda=1, 2 \dots n$.

Setzt man in 17) für λ die successiven Werthe $1, 2 \dots k$ und addirt die erhaltenen Ausdrücke, so erhält man mit Rücksicht auf 8) die Formel:

$$19)\qquad \overset{r}{A}{}_k^{(n)}=\overset{r}{F}{}_k^{(n)}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\overset{r}{E}{}_\lambda^{(n)},$$

giltig für $k=1, 2 \dots n$.

Ertheilt man den betrachteten transversalen Elementen den Werth Null, so ist in 19) die Grösse $\overset{r}{A}{}_k^{(n)}$ durch die Anzahl der Glieder ausgedrückt, deren Verschwinden durch die einzelnen, in bestimmter Reihenfolge geordneten Nullelemente bewirkt wird.

Die entwickelten Gleichungen sind insbesondere giltig bei $r=2$ für die quadratischen, bei $r=3$ für die cubischen Determinanten.

Budapest. Nicolaus von Szüts.

V. Ueber die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl N mit Hilfe der Primzahlen, welche kleiner als $\sqrt{N}$ sind.

Die Aufgabe, die Anzahl der Primzahlen zu bestimmen, welche kleiner sind als eine gegebene Zahl N, wird gewissermassen mechanisch gelöst durch das sogenannte Sieb des Eratosthenes und durch directes Abzählen der nicht weggestrichenen Zahlen. Um diese Frage durch Rechnung zu beantworten, erscheint es der einfachste Weg, diese Methode der Ausschliessung der zusammengesetzten Zahlen in Rechnungen umzusetzen.

Hat man bei einer beliebigen Grenzzahl N die Anzahl A der aufzuschreibenden ungeraden Zahlen im Zahlenraum von 1 bis N einschliesslich bestimmt, so sucht man zunächst für jede dabei in Betracht kommende ungerade Primzahl

$$3,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots \text{ bis } p_\nu < \sqrt{N}$$

die Anzahl $(q_3, q_5, q_7, q_{11} \ldots q_{p_\nu})$ der ungeraden Vielfachen derselben bis zur Grenze N, berechnet sodann für jede dieser Primzahlen p_x die Menge derjenigen Vielfachen, welche bereits als Vielfache der kleineren Primzahlen

$$3,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots p_{x-1}$$

in Wegfall gekommen sind und zieht sie von q_x ab und subtrahirt zuletzt von A die Summe der übriggebliebenen Vielfachen der einzelnen Primzahlen.

Ist N gerade, so ist $A = \frac{N}{2}$; für ein ungerades N ist $A = \frac{N+1}{2}$.

Betrachten wir die Zahl 1 nicht als Primzahl, so sind $A-1$ ungerade Zahlen zu berücksichtigen; addiren wir zu denselben gleich hier die einzige gerade Primzahl 2, so sind die in Abzug zu bringenden Vielfachen der ungeraden Primzahlen von A abzuziehen.

In der Reihe der ungeraden Zahlen können von jeder ungeraden Primzahl nur die ungeraden Vielfachen vorkommen und jede ungerade Zahl p nimmt in dieser Reihe die $\frac{p+1}{2}^{\text{te}}$ Stelle ein. Um das Hinwegstreichen der aufeinander folgenden Vielfachen der einzelnen Primzahlen als ein Dividiren betrachten zu können, denken wir bei jeder Primzahl p die Reihe der ungeraden Zahlen rückwärts über die Zahl 1 um $\frac{p-1}{2}$ Stellen erweitert; dann ist

$$\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2} = p;$$

denn, um diese Berechnung mit den späteren in Uebereinstimmung zu bringen, denken wir uns zunächst jede Primzahl selbst mit weggestrichen, müssen jedoch zum Schlussresultat die Anzahl der in Betracht kommenden ungeraden Primzahlen addiren. Es sind also, um die Anzahl $(q_3, q_5, q_7, q_{11} \ldots q_{p_\nu})$ der bei jeder Primzahl in Wegfall kommenden ungeraden Zahlen zu finden, durch die aufeinander folgenden Primzahlen:

die Summen
$$3,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots p_\nu$$
$$A+1,\ A+2,\ A+3,\ A+5, \ldots A+\frac{p_\nu - 1}{2}$$

zu dividiren; die bei diesen Divisionen sich ergebenden ganzen Zahlen sind die gesuchten Zahlen q_3, q_5, q_7, $q_{11} \ldots q_{p_\nu}$.

Die schwierigere Frage ist nun die, wieviel von den bei der Primzahl p_x zu streichenden Zahlen schon früher als Vielfache der kleineren Primzahlen
$$3,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots p_{x-1}$$
in Wegfall gekommen sind. Die Zahl q_x giebt die Anzahl der Glieder in der Reihe der ungeraden Vielfachen von p_x an. Verfolgen wir den weiteren Verlauf der Untersuchung in der Reihenfolge der Primzahlen, so ergiebt
$$(A+1) : 3 = q_3$$
die Anzahl der in der Zahlenreihe von 1 bis N vorkommenden ungeraden Vielfachen von 3, von denen noch keine weggestrichen waren,
$$(A+2) : 5 = q_5$$
die Anzahl der in demselben Zahlenraume vorkommenden ungeraden Vielfachen von 5, das heisst des 1, 3, 5, 7, $9 \ldots q_5$fachen; von dem Dreifachen dieser Reihe an muss jedes dritte Glied derselben den Factor 3 enthalten; es sind also entsprechend unserer ersten Ueberlegung von den q_5 Vielfachen von 5 bereits
$$(q_5 + 1) : 3$$
ungerade Zahlen als Vielfache von 3 in Abzug gebracht worden, so dass bei der Primzahl 5 nicht q_5, sondern nur
$$q_5 - (q_5 + 1) : 3$$
Zahlen zum ersten Male weggestrichen werden.

Die Division $(A_3 + 1) : 7 = q_7$ ergiebt die Anzahl der in dem betreffenden Zahlenraume vorkommenden ungeraden Vielfachen von 7, das heisst des
$$1.,\ 3.,\ 5.,\ 7., \ldots q_7^{\text{ten}};$$
unter diesen q_7 Zahlen enthalten $(q_7 + 1) : 3$ den Factor 3 und $(q_7 + 2) : 5$ den Factor 5. Von den letzteren Fünffachen der Primzahl 7, nämlich dem
$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9 \ldots (q_7 + 2) : 5 \text{fachen}$$
sind unter den $(q_7 + 1) : 3$ Zahlen der Dreifachen von 7 schon
$$[(q_7 + 2) : 5 + 1] : 3$$
Zahlen als Dreifache des Fünffachen von 7 enthalten, so dass als Fünffache nur
$$(q_7 + 2) : 5 - [(q_7 + 2) : 5 + 1] : 3$$
Zahlen, im Ganzen also für die Primzahl 7 nur
$$q_7 - \{(q_7 + 1) : 3 + [(q_7 + 2) : 5 - ((q_7 + 2) : 5 + 1) : 3]\}$$
Zahlen zu subtrahiren sind.

Die Division $(A + 5) : 11 = q_{11}$ ergiebt die ungeraden Vielfachen von 11; unter diesen q_{11} Zahlen enthalten $(q_{11} + 1) : 3$ den Factor 3, $(q_{11} + 2) : 5$

den Factor 5, $(q_{11}+3):7$ den Factor 7; von den $(q_{11}+2):5$ gehen als Vielfache von 3 weiter $[(q_{11}+2):5+1]:3$ Zahlen in Abzug; von den $(q_{11}+3):7$ fallen noch fort

$((q_{11}+3):7+1):3+[((q_{11}+3):7+2):5-\{((q_{11}+3):7+2):5+1\}:3]$ u.s.w.

Bei allen diesen Divisionen gilt als Resultat die sich ergebende ganze Zahl.

Bezeichnen wir allgemein

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \ldots p_\nu$$

die ν^{te} ungerade Primzahl und verstehen wir unter dem Zeichen $\Psi(N, \nu)$ die Menge derjenigen ungeraden Zahlen, welche in der Reihe der ungeraden Zahlen von 1 bis N einschliesslich durch keine der Primzahlen

$$p_1, \; p_2, \; p_3 \ldots p_\nu$$

theilbar sind, so haben wir in der angegebenen Weise für jeden Quotienten $q_\varkappa$ den Werth des Zeichens $\Psi(2q_\varkappa, \varkappa-1)$ zu berechnen, um zu finden, wieviel von den bei der Primzahl $p_\varkappa$ in Abzug zu bringenden Zahlen $q_\varkappa$ bereits durch die kleineren Primzahlen

$$p_1, \; p_2, \; p_3 \cdots p_{\varkappa-1}$$

in Wegfall gekommen sind; denn da der Quotient $q_\varkappa$ die Anzahl der Glieder in der Reihe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen angiebt, so ist die letzte ungerade Zahl $2q_\varkappa - 1$.

Bei diesen letzteren Berechnungen bieten uns einige bekannte, einfache Ueberlegungen bedeutende Vortheile. Gelangen wir bei der Berechnung der durch eine kleinere Primzahl p_h schon in Abzug gebrachten Zahlen auf einen Quotienten Q_h, dessen Doppeltes kleiner ist als das Quadrat der vorhergehenden Primzahl $\quad 2Q_h < (p_{h-1})^2$,

so sind von den ungeraden Zahlen im Zahlenraume von 1 bis $2Q_h$ als Vielfache der Primzahlen 3, 5, 7, $11 \ldots p_{h-1}$ alle ausgeschlossen mit Ausnahme der 1 und der Primzahlen, welche grösser als p_{h-1} und kleiner als $2Q_h$ sind. Hierbei wird $2Q_h$ stets kleiner als die grösste, bei der ganzen Berechnung zu berücksichtigende Primzahl p_ν sein, so dass wir nur die Tafel der unbedingt nothwendigen Primzahlen zu benutzen brauchen. Unter Anwendung des Zeichens $\varphi(m)$, welches die Menge der Primzahlen $\leqq m$ bedeutet, können wir diesen Satz folgendermassen schreiben:

$$\Psi(2Q_h, h-1) = 1 + \varphi(2Q_h) - (h-1),$$

wenn $(p_{h-1})^2 > 2Q_h > p_h$ ist.

Erhalten wir ferner bei einer solchen kleineren Primzahl p_h einen Quotienten Q_h, dessen Doppeltes kleiner als p_h und grösser als p_{h-1} ist, so sind alle Zahlen ausser der Einheit ausgeschlossen; es ist

$$\Psi[2Q_h, \varphi(2Q_h)] = 1.$$

Bei noch kleineren Quotienten Q_h, so dass $2Q_h < p_{h-1}$ ist, bedeutet das Zeichen Ψ, es soll die Menge der ungeraden Zahlen im Zahlenraume von 1 bis $2Q_h$ gesucht werden, die durch keine aller ungeraden Prim-

zahlen zwischen 1 bis $2Q_h$, ja selbst durch keine grössere als $2Q_h$ theilbar sind; es kann in diesem Falle erst recht nur die Einheit übrig bleiben und es ist

$$\Psi[2Q_h,\ a + \varphi(2Q_h)] = 1,$$

wo $a \geq 0$ und eine ganze Zahl ist.

Einige Beispiele werden sofort die Einfachheit und Kürze der Berechnungen erkennen lassen.

$N = 500$; $\sqrt{500} = 22$.

3 500 : 2 = 250
5 (250+1) : 3 = 83
7 (250+2) : 5 = 50; 50 − 17 = 33
11 (50 + 1) : 3 = 17
13
17 (250+3) : 7 = 36; 36 − (12+5) = 19
19 (36 + 1) : 3 = 12
7 (36 + 2) : 5 = 7; 7 − 2 = 5
(7 + 1) : 3 = 2

255 : 11 = 23; 23 − (8 + 3 + 1) = 11
24 : 3 = 8
25 : 5 = 5; 5 − 2 = 3
6 : 3 = 2
26 : 7 = 3 = 1
2 . 3 = 6 < 5²

. . 6 : 13 = 19; 19 − (6+3+1+1) = 8
20 : 3 = 6
. 1 : 5 = 4; = 3
2 . 4 = 8 < 3²
um so mehr für 7 = 1
„ 11 = 1

. . 8 : 17 = 15; 15 − 10 = 5
. 6 : 3 = 5
7 : 5 = 3; 6 = 2
7, 11, 13 = 3

. . 9 : 19 = 13 = 3
. 4 : 3 = 4
5 : 5 = 3, 6 = 2
7, 11, 13, 17 = 4

16 2

250 − 162 = 88
7
95

$N = 1000$; $\sqrt{1000} = 31$.

3 1000 : 2 = 500
5 (500 + 1) : 3 = 167
7 502 : 5 = 100; 100 − 33 = 67
11 101 : 3 = 33
13
17 503 : 7 = 71; 71 − (24 + 9) = 38
19 72 : 3 = 24
23 73 : 5 = 14 = 9
29 15 : 3 = 5
31 . . 5 : 11 = 45 = 21
10 . 6 : 3 = 15
. 7 : 5 = 9 = 6
10 : 3 = 3
8 : 7 = 6, 12 = 3

6 : 13 = 38 = 17
9 : 3 = 13
40 : 5 = 8 − 3 = 5
1 : 7 = 5, 10 = 2
3 : 11 = 3, 6 = 1

8 : 17 = 29 = 11
30 : 3 = 10
1 : 5 = 6 − 2 = 4
2 : 7 = 4, 8 = 2
4 : 11 = 3 = 1
13 = 1

9 : 19 = 26 = 9
7 : 3 = 9
8 : 5 = 5 − 2 = 3
9 : 7 = 4, 8 = 2
11, 13, 17 = 3

511 : 23 = 22 = 7
5 3 : 3 = 7
4 : 5 = 4, 8 = 3
5 : 7 = 3, 6 = 1
11, 13, 17, 19 = 4

514 : 29 = 17 = 3
22 8 : 3 = 6
9 : 5 = 3, 6 = 2
7, 11, 13, 17, 19, 23 = 6

515 : 31 = 16 = 2
20 7 : 3 = 5
8 : 5 = 3, 6 = 2
7
342

500 − 342 = 158
10
168

$N = 10000$; $\sqrt{10000} = 100$.

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 — 24

10000 : 2 = 5000
5001 : 3 = 1667
. . . 2 : 5 = 1000 = 667
. . . 1 : 3 = 333
3 : 7 = 714 = 381
5 : 3 = 238
6 : 5 = 143 48 = 95

5005 : 11 = 455 = 208
456 : 3 = 152
7 : 5 = 91 − 30 = 61
8 : 7 = 65 = 34
6 : 3 = 22
7 : 5 = 13 − 4 = 9

5006 : 13 = 385 = 160
386 : 3 = 128
7 : 5 = 77 − 26 = 51
8 : 7 = 55 = 30
6 : 3 = 18
7 : 5 = 11 − 4 = 7
90 : 11 = 35 = 16
6 : 3 = 12
7 : 5 = 7 − 2 = 5
8 : 7 = 5, 10 = 2

5008 : 17 = 294 = 111
295 : 3 = 98
6 : 5 = 59 − 20 = 39
7 : 7 = 42 − 14 − 5 = 23
9 : 11 = 27 − 9 − 3 − 2 = 13
300 : 13 = 23, 46 = 10

5009 : 19 = 263 = 95
264 : 3 = 88
5 : 5 = 53 − 18 = 35
6 : 7 = 38 − 13 − 5 = 20
8 : 11 = 24, 48 = 12
9 : 13 = 20, 40 8
271 : 17 = 15, 30 5

5011 : 23 = 217 = 77
218 : 3 = 72
9 : 5 = 43 − 14 = 29
220 : 7 = 31 − 10 − 4 = 17
2 : 11 = 20 40 9
3 : 13 = 17 34 7
5 : 17 = 13 26 4
6 : 19 = 11 22 2

5014 : 29 = 172 = 60
173 : 3 = 57
4 : 5 = 34 − 11 = 23
5 : 7 = 25 − 8 − 3 = 14
7 : 11 = 16 32 8
8 : 13 = 13 26 5
180 : 17 = 10 20 3
1 : 19 = 9 18 1
3 : 23 = 7 14 1

5015 : 31 = 161 = 57
162 : 3 = 54
3 : 5 = 32 − 11 = 21
4 : 7 = 23 − 8 − 3 = 12
6 : 11 = 15 30 7
7 : 13 = 12 24 5
9 : 17 = 9 18 2
19, 23, 29 3

5018 : 37 = 135 = 47
136 : 3 = 45
7 : 5 = 27 − 9 = 18
8 : 7 = 19 − 6 − 3 = 10
140 : 11 = 12 24 6
1 : 13 = 10 20 4
3 : 17 = 8 16 1
19, 23, 29, 31 4

5020 : 41 = 122 = 42
123 : 3 = 41
4 : 5 = 24 − 8 = 16
5 : 7 = 17 − 6 − 2 = 9
7 : 11 = 11 22 5
8 : 13 = 9 18 3
6

5021 : 43 = 116 = 38
117 : 3 = 39
8 : 5 = 23 − 8 = 15
9 : 7 = 17 − 6 − 2 = 9
120 : 11 = 10 5
1 : 13 = 9 3
7

5023 : 47 = 106 = 34
107 : 3 = 35
8 : 5 = 21 − 7 = 14
9 : 7 = 15 − 5 − 2 = 8
111 : 11 = 10 20 5
2 : 13 = 8 16 2
3

5026 : 53 = 94 = 28
95 : 3 = 31
6 : 5 = 19 − 6 = 13
7 : 7 = 13 − 4 − 2 = 7
9 : 11 = 9 18 4
100 : 13 = 7 14 2
9

5029 : 59 = 85 = 24
86 : 3 = 28
7 : 5 = 17 − 6 = 11
8 : 7 = 12 24 7
90 : 11 = 8 16 3
1 : 13 = 7 14 2
10

5030 : 61 = 82 = 22
83 : 3 = 27
4 : 5 = 16 − 5 = 11
5 : 7 = 12 24 7
7 : 11 = 7 14 3
8 : 13 = 6 12 1
11

5033 : 67 = 75 = 18
76 : 3 = 25
7 : 5 = 15 − 5 = 10
8 : 7 = 11 22 6
80 : 11 = 7 14 3
13

5035 : 71 = 70 = 16
71 : 3 = 23
2 : 5 = 14 − 5 = 9
3 : 7 = 10 20 6
5 : 11 = 6 12 2
14

5036 : 73 = 68 = 13
69 : 3 = 23
70 : 5 = 14 − 5 = 9
1 : 7 = 10 6
3 : 11 = 6 2
15

5039 : 79 = 63 = 10
64 : 3 = 21
5 : 5 = 13 − 4 = 9
6 : 7 = 9 18 5
8 : 11 = 6 12 2
16

5041 : 83 = 60 = 9
61 : 3 = 20
2 : 5 = 12 − 4 = 8
3 : 7 = 9 18 5
5 : 11 = 5 10 1
17

5044 : 89 = 56 = 7
57 : 3 = 19
8 : 5 = 11 − 4 = 7
9 : 7 = 8 16 4
19

5048 : 97 = 52 = 4
53 : 3 = 17
4 : 5 = 10 − 3 = 7
5 : 7 = 7 14 4
20

3795

5000 − 3795 = 1205
24
1229

Bautzen. Dr. H. Vollprecht.

VI. Beweis eines Satzes von Jacob Steiner über die Krümmungskreise einer Ellipse.

Jacob Steiner stellte den nachstehenden Satz über die Krümmungskreise einer Ellipse auf, den wir in Folgendem auf einfache Art beweisen werden.

> „Durch jeden Punkt q einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der Ellipsee und zwar liegen die Osculationspunkte a, b, c dieser Kreise mit dem Punkt q auf einem Kreise und sind die Ecken eines grössten, der Ellipse einbeschriebenen Dreiecks.“

In den Ecken eines beliebigen einem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABC seien an den Kreis die Tangenten gezogen, welche einen beliebigen Durchmesser D dieses Kreises in den Punkten A_1, B_1 und C_1 treffen. Um A, B, C seien mit den Längen AA_1, BB_1 und CC_1 Kreisbögen beschrieben, die den Durchmesser D ein zweites Mal in den Punkten A_2, B_2 und C_2 treffen. Es lässt sich dann auf elementare Weise zeigen, dass

α) AA_2, BB_2 und CC_2 sich in einem Punkte Q auf dem Kreise schneiden; und

β) die Geradenpaare AB, CQ; AC, BQ und BC und AQ gegen den Durchmesser D gleich geneigt sind.

Drehen wir den Kreis um den Durchmesser D und projiciren die ganze Figur auf die ursprüngliche Kreisebene, oder aber verkürzen wir die Entfernungen aller Punkte vom Durchmesser D in bestimmtem Verhältniss, so sind, wenn wir die Projectionen der Punkte mit den gleichen,

jedoch kleinen Buchstaben bezeichnen, allemal auch in der neuen Figur

α) ab und qc und ac und qb und ebenso bc und aq gegen den Durchmesser D gleich geneigt;

β) ebenso bilden die Geradenpaare aa_1, aa_2; bb_2, bb_2 und cc_1, cc_2 mit dem Durchmesser D gleiche Winkel. Es folgt daraus aber unmittelbar, dass auch die Punkte a, b, c und q auf einem Kreise liegen; denn bilden zwei Gegenseiten eines Vierecks, das einer Ellipse einbeschrieben ist, mit einer Achse der Ellipse, also hier mit D, gleiche Winkel, so ist das Viereck ein Kreisviereck.

Da weiter das Dreieck ABC ein dem Kreise einbeschriebenes grösstes Dreieck ist, so ist auch abc ein solches in Bezug auf die Projection des Kreises, also in Bezug auf die Ellipse. Da ferner z. B. die Geraden aa_1 und aq auch in Bezug auf die Gerade D, die Hauptachse der Ellipse, gleich geneigt sind, so geht der Krümmungskreis der Ellipse im Punkte a durch den Punkt q, womit der Satz bewiesen ist.

Weingarten (Württemberg). BENEDIKT SPORER.

VII. Combinatorischer Beweis des Wilson'schen Lehrsatzes.

Die in der Zahl $(p-1)!$ enthaltenen Einheiten lassen sich durch die sämmtlichen Permutationen von p verschiedenen Elementen $1, 2, \ldots p$ darstellen, wenn die nur durch cyklische Verschiebung ihrer Elemente von einander verschiedenen Permutationen als identisch betrachtet werden. Es kann ja unter dieser Bedingung jede Permutation so umgestellt werden, dass sie mit einem bestimmten Elemente, etwa mit 1, beginnt, so dass alle wesentlich von einander verschiedenen Anordnungen nur durch den Platzwechsel der $(p-1)$ übrigen Elemente entstehen.

Leitet man nun aus irgend einer Permutation $a, b, \ldots p, \ldots k$ dadurch eine andere $(a+1), (b+1), \ldots 1, \ldots (k+1)$ ab, dass man jedes Element durch das ihm nach der ursprünglichen Anordnung $(1, 2, \ldots p)$ folgende ersetzt, wobei natürlich 1 als auf p folgend gilt, und wendet man auf die erhaltene Permutation immer wieder dieselbe Operation an, so muss man endlich einmal, spätestens nach $p$maliger Ausführung dieses Verfahrens, wieder diejenige Anordnung erhalten, von der man ausgegangen ist. Geschieht dies nun zum ersten Male nach m Operationen, so wird es immer wieder und nicht früher als nach m weiteren, das heisst, es wird nach m, $2m$, $3m \ldots$ Verwandlungen stattfinden. Demnach muss m ein Theiler von p sein.

Sämmtliche $(p-1)!$ Permutationen werden durch dieses Verfahren in geschlossene Gruppen zusammengefasst, von denen keine zwei irgend eine Permutation gemeinsam haben können, da die Ableitung der übrigen zu einer Gruppe gehörigen Permutationen aus einer derselben durch eine eindeutige Operation erfolgt.

Ist nun p eine Primzahl, so bleiben für m nur die beiden Werthe 1 und p möglich, das heisst, es kann in diesem Falle nur solche Permutationen geben, die durch die geschilderte Verwandlung ungeändert bleiben, und solche, die zu $p$gliedrigen Gruppen zusammentreten. Die Anzahl der ersteren ist leicht zu bestimmen. In der cyklisch angeordneten Elementenreihe muss bei ihnen der Abstand von a bis $(a+1)$ derselbe sein, wie der von $(a+1)$ bis $(a+2)$ u. s. w., da sonst $a\ldots$, $(a+1)\ldots$, $(a+2)\ldots$ nicht mit $(a+1)\ldots$, $(a+2)\ldots$, $(a+3)\ldots$ übereinstimmen könnte. Es sind daher nur die $(p-1)$ Fälle möglich, in denen dieser Abstand $1, 2, 3\ldots$ oder $(p-1)$ Intervalle ausmacht, und diese Fälle kommen thatsächlich sämmtlich vor, da die genannten Zahlen alle relativ prim zu p sind, so dass jedesmal gerade ein Element auf jeden Platz entfällt.

Die $(p-1)!$ vorhandenen Permutationen zerfallen also in $(p-1)$ einzelstehende und in Gruppen von je p zusammengehörigen. Demnach ist $(p-1)!$ in Bezug auf den Modul p mit $(p-1)$ oder (-1) congruent.

Ein einfaches Beispiel möge das (übrigens leicht geometrisch zu veranschaulichende) Beweisverfahren erläutern. Für $p=5$ hat man die Permutationen:

1 2 3 4 5	1 3 5 2 4	1 4 2 5 3	1 5 4 3 2	
1 2 3 5 4	1 5 2 3 4	1 3 4 5 2	1 3 2 4 5	1 2 4 3 5
1 2 4 5 3	1 4 2 3 5	1 2 5 3 4	1 4 5 2 3	1 3 4 2 5
1 2 5 4 3	1 5 4 2 3	1 5 3 4 2	1 4 5 3 2	1 4 3 2 5
1 3 5 4 2	1 5 3 2 4	1 4 3 5 2	1 3 2 5 4	1 5 2 4 3

Gotha. Dr. Ad. Schmidt.

VIII. Ueber einen zahlentheoretischen Satz von Legendre.

Wie auf S. 221 der Historisch-literarischen Abtheilung des 39. Jahrganges der vorliegenden Zeitschrift angegeben ist, hat Herr Dr. Scheffler den folgenden, von Legendre ausgesprochenen Satz zu beweisen versucht:

> Ist eine Folge von k beliebigen ungeraden Primzahlen $p_1, \ldots p_k$ gegeben, und versteht man unter π_i das i^{te} Glied in der natürlichen Reihe der Primzahlen 3, 5, 7, 11, ..., so giebt es unter π_{k-1} aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Progression, deren Anfangsglied und Differenz relativ prim sind, mindestens eines, das durch keine der Primzahlen $p_1, \ldots p_k$ theilbar ist.

Nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Dr. K. Th. Vahlen in Berlin hat zuerst Herr Dr. Piltz die Unrichtigkeit dieser Behauptung in seiner Habilitationsschrift (Jena 1884) nachgewiesen; auf dem von Dr. Piltz angegebenen Wege hat nachher Herr Prof. Bachmann (Zahlentheorie, II. Bd. Anhang) an einem Beispiele die Unrichtigkeit des Legendre'schen Satzes gezeigt.

Schlömilch.

IX. Ueber eine Verallgemeinerung der Euler'schen φ Funktion.

Es seien α und β beliebige positive, n eine positive ganze Zahl, F eine beliebige, für positive Brüche eindeutig definirte Function.

Wir definiren eine Function $\varphi_{\alpha\beta}(n)$ durch die Gleichung:

$$\text{I)} \qquad \varphi_{\alpha\beta}(n) = \Sigma F\left(\frac{m}{n}\right), \qquad (m, n \text{ theilerfremd})$$

in welcher die Summation über alle irreductibeln, zwischen α und β gelegenen Brüche $\frac{m}{n}$ zu erstrecken ist.

Setzt man in I) für n alle Divisoren d von n und summirt, so erhält man:

$$\text{II)} \qquad \sum_{dd'=n} \varphi_{\alpha\beta}(d) = \Sigma F\left(\frac{m}{n}\right),$$

wo die Summation rechts über alle reductibeln und irreductibeln Brüche $\frac{m}{n}$ zwischen α und β zu erstrecken ist.

Setzt man in II) für n alle ganze Zahlen bis n und summirt, so ergiebt sich:

$$\text{III)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{h,k} [(\alpha - \beta)k] F\left(\frac{h}{k}\right), \quad (h, k \text{ theilerfremd});$$

hier bezieht sich rechts die Summation auf alle zwischen α und β gelegenen irreductibeln Brüche, deren Nenner n nicht übersteigen.

Für $F\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ bedeutet $\varphi_{\alpha\beta}(n)$ die Anzahl der zwischen α und β gelegenen irreductibeln Brüche mit dem Nenner n.

Aus II) und III) folgt dann:

$$\text{IV)} \qquad \sum_{dd'=n} \varphi_{\alpha\beta}(d) = [(\alpha - \beta)n],$$

$$\text{V)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \varphi_{\alpha\beta}(k) = \sum_{k=1}^{n} [(\alpha - \beta)k].$$

Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ist $\varphi_{1,0}(n)$ die Anzahl der zwischen 1 und 0 gelegenen irreductibeln Brüche mit dem Nenner n, also $\varphi_{1,0}(n) = \varphi(n)$. Dann folgt aus IV) und V):

$$\text{VI)} \qquad \sum_{dd'=n} \varphi(d) = n,$$

$$\text{VII)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \varphi(k) = \frac{n(n+1)}{2},$$

von denen die erste Gleichung bekanntlich Gauss*, die zweite Sylvester** aufgestellt hat.

---

* Gauss, Disquisitiones arithmeticae Art. 39.

** Sylvester, Comptes rendus XCVI.

Eine von Eisenstein* und Stern** betrachtete Function ergiebt sich aus I) für $F\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{m}$; eine Gleichung von Laguerre*** aus IV) für $\alpha=\frac{1}{k}$, $\beta=0$.

Berlin. K. Th. Vahlen.

X. Die Transformation der quadratischen Formen.

Die Transformation der quadratischen Formen lässt sich auf Grund der von Euklid zur Auflösung der quadratischen Gleichungen benutzten Methode der quadratischen Ergänzung in folgender Weise ausführen.

Es sei
$$f=\Sigma a_{ik}x_i x_k \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ldots,n)$$
die zu transformirende Form. Giebt man ihr die Gestalt:
$$f=\frac{1}{a_{11}}\{a^2_{11}x^2_1+2a_{11}x_1(a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\}+\Sigma a_{ik}x_i x_k \quad (i,k=2,\ldots,n)$$
und ergänzt den ersten Theil zum Quadrat, so erhält man:
$$f=\frac{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}+\frac{1}{a_{11}}\Sigma a'_{ik}x_i x_k, \quad (i,k=2,\ldots,n)$$
wo $a'_{ik}=a_{11}a_{ik}-a_{1i}a_{1k}$ gesetzt ist.

Ebenso wird:
$$\sum_{(i,k=2,\ldots,n)} a'_{ik}x_i x_k=\frac{(a'_{22}x_2+a'_{23}x_3+\cdots+a'_{2n}x_n)^2}{a'_{22}}+\frac{1}{a'_{22}}\Sigma a''_{ik}x_i x_k,$$
$$(i,k=3,\ldots,n)$$
wo $a''_{ik}=a'_{22}a'_{ik}-a'_{2i}a'_{2k}$ ist; u. s. w.

Schliesslich wird also:
$$\left\{\begin{aligned} f=&\frac{(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)^2}{a_{11}}+\frac{(a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n)^2}{a_{11}\cdot a'_{22}}\\ &+\frac{(a''_{33}x_3+\cdots+a''_{3n}x_n)^2}{a_{11}\cdot a'_{22}\cdot a''_{33}}+\cdots+\frac{(a^{(n-1)}_{nn}x_n)^2}{a_{11}\cdot a'_{22}\cdots a^{(n-1)}_{nn}},\end{aligned}\right.$$
wo $a'''_{ik}=a''_{33}a''_{ik}-a''_{3i}a''_{3k}$ u. s. w. ist.

Um jetzt auf die bei der Transformation einer quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten übliche Form zu kommen, ist die Anwendung eines einfachen Determinantensatzes nothwendig.

---

* Eisenstein, Monatsberichte der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften, Berlin 1850; Journal für d. r. u. a. Mathematik Bd. 39.

** Stern, Journal für d. r. u. a. Mathematik Bd 55.

*** Laguerre, Bulletin de la société mathématique Bd. 1.

Die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ a_{12}, & a_{11}a_{22}-a^2_{12}, & a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}, & \ldots, & a_{11}a_{2m}-a_{12}a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1m}, & a_{11}a_{2m}-a_{12}a_{1m}, & a_{11}a_{3m}-a_{13}a_{1m}, & \ldots, & a_{11}a_{mm}-a^2_{1m} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & \ldots & a_{11}a_{1m} \\ a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \ldots & a_{11}a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1m} & a_{11}a_{2m} & a_{11}a_{3m} & \ldots & a_{11}a_{mm} \end{vmatrix}, \text{ wo } a_{ik}=a_{ki} \text{ ist,}$$

die man erhält, wenn man in der ersten Determinante die mit a_{1k} multiplicirte erste Colonne zur k^{ten} addirt, (für $k=2,3,\ldots m$), liefert den Satz:

$$\underset{i,k=2,\ldots,m}{|a'_{ik}|} = a_{11}^{m-2}.\underset{i,k=1,2,\ldots,m}{|a_{ik}|}.^*$$

Die successive Anwendung desselben ergiebt:

$$a''_{gh} = a_{11}.\underset{\substack{i=1,2,g\\k=1,2,h}}{|a_{ik}|},$$

$$a'''_{gh} = a'_{22}.\underset{\substack{i=2,3,g\\k=2,3,h}}{|a'_{ik}|} = a^2_{11}.\underset{\substack{i=1,2\\k=1,2}}{|a_{ik}|}.\underset{\substack{i=1,2,3,g\\k=1,2,3,h}}{|a_{ik}|},$$

$$a''''_{gh} = a'^2_{22}.\underset{\substack{i=2,3\\k=2,3}}{|a'_{ik}|}.\underset{\substack{i=2,3,4,g\\k=2,3,4,h}}{|a'_{ik}|} = a^4_{11}.\underset{\substack{i=1,2\\k=1,2}}{|a_{ik}|^2}.\underset{\substack{i=1,2,3\\k=1,2,3}}{|a_{ik}|}.\underset{\substack{i=1,2,3,4,g\\k=1,2,3,4,h}}{|a_{ik}|};$$

durch Induction findet man, dass allgemein

$$a^{(\nu-1)}_{gh} = A_1^{2^{\nu-3}}.A_2^{2^{\nu-4}}.A_3^{2^{\nu-5}}\ldots A^{2^0}_{\nu-2}.A_{\nu,g,h}$$

ist, wenn

$$\underset{\substack{i=1,2,\ldots,\nu-1,g\\k=1,2,\ldots,\nu-1,h}}{|a_{ik}|} = A_{\nu,g,h},\ A_{\nu,\nu,h}=A_{\nu,h},\ A_{\nu\nu}=A_\nu$$

gesetzt wird.

Setzt man diese Ausdrücke für $a^{(\nu-1)}_{gh}$ in die transformirte Form f ein, und beachtet, dass

$$a_{11}a'_{22}a''_{33}\ldots a^{(\nu-1)}_{\nu\nu} = A_1^{2^{\nu-2}}.A_2^{2^{\nu-3}}.A_3^{2^{\nu-4}}\ldots A^2_{\nu-2}.A_{\nu-1}.A_\nu$$

wird, so dass sich aus dem Zähler und Nenner des ν^{ten} Gliedes der Factor $A_1^{2^{\nu-2}}.A_2^{2^{\nu-3}}.A_3^{2^{\nu-4}}\ldots A^2_{\nu-2}$ forthebt, so bekommt man die quadratische Form in der gewünschten Gestalt:

$$f=\frac{\left(\sum_1^n a_{1h}x_h\right)^2}{A_1}+\frac{\left(\sum_2^n A_{2,h}x_h\right)^2}{A_1A_2}+\frac{\left(\sum_2^n A_{3,h}x_h\right)^2}{A_2A_3}+\cdots+\frac{(A_nx_n)^2}{A_{n-1}A_n}.$$

* Derselbe ist ein besonderer Fall des Subdeterminantensatzes, welchen Herr G. Landsberg in der Arbeit: „Ueber relativ adjungirte Minoren" (Bd. 109 des Journals für die reine und angewandte Mathematik) aufgestellt hat.

Berlin. K. Th. Vahlen.



VIII.

Conforme Abbildungen, welche von der ζ-Function vermittelt werden.

Von

J. C. Kluyver,

Professor an der Universität Leiden.

Hierzu Tafel VI Fig. 1—6.

Wie aus den Untersuchungen des Herrn Schwarz hervorgeht, bewirkt das elliptische Integral erster Gattung oder dessen Umkehrung die $\wp$-Function, die Abbildung der inneren w-Fläche eines Rechtecks, in einzelnen Fällen auch eines geradlinigen Dreiecks auf die positive z-Halbebene.*

Ausserdem aber zeigte Herr Schwarz, dass ein solches Integral zweiter Gattung das Innere eines Kreises auf das Aeussere eines Quadrates abbildet. Dies veranlasste mich zu näherer Beschäftigung mit der Aufgabe der conformen Abbildung einer äusseren Polygonsfläche, insofern für deren Lösung die ζ-Function Verwerthung findet.

Die Herleitung der betreffenden Abbildungsformeln bildet den Gegenstand der nachfolgenden Seiten.

§ 1. Die Function $w = f(z)$, welche die äussere w-Fläche eines geradlinigen n-Ecks auf die positive z-Halbebene abbildet.

Im Anschluss an die Schwarz'sche Lösung der Abbildungsaufgabe für die innere Polygonsfläche bildet auch im vorliegenden Falle die Untersuchung der Function:

* Ausser der Abhandlung des Herrn Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben", Ges. W. II S. 65, mögen hier angeführt werden:

„Love, Vortex Motion in certain Triangles, American Journ. of Math. XI S. 158 (1889)",

„Burnside, On a Problem of conformal Representation, Proc. of the London Math. Soc. XXIV S. 187 (1893).

$$J(z) = \frac{d}{dz} \log \frac{dw}{dz}$$

den Ausgangspunkt. Unmittelbar erkennt man, dass die von Herrn Schwarz nachgewiesenen Eigenschaften dieser Function theils völlig ungeändert bleiben, theils nur sehr unwesentliche Umänderungen erfahren, so dass wir, ohne darauf weiter einzugehen, nachstehende Sätze aufstellen können.

1. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $w = w_1$ der äusseren Polygonsfläche gilt die Entwickelung

$$J(z) = P(z - z_1).$$

2. In der Umgebung eines beliebigen Punktes $w = w_1$ der Begrenzung hat man

$$J(z) = p(z - z_1).$$

3. In der Umgebung eines Eckpunktes $w = b$ mit dem inneren Polygonswinkel $\lambda\pi$ ist

$$J(z) = \frac{1 - \lambda}{z - a} + p(z - a),$$

falls der enteprechende reelle Punkt $z = a$ im Endlichen liegt. Ist dagegen $a = \infty$, so hat man zu setzen:

$$J(z) = -\frac{3 - \lambda}{z} + \frac{1}{z^2} p\left(\frac{1}{z}\right).$$

4. Ist dem Punkte $z = \infty$ ein gewöhnlicher Punkt w des Umfanges zugeordnet, so gilt in der Umgebung des letzteren die Entwickelung:

$$J(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} p\left(\frac{1}{z}\right).$$

Die Potenzreihen $P(z - z_1)$, $p(z = z_1)$ sind für $z = z_1$ von Null verschieden; sämmtliche Coefficienten der Reihen p sind reell.

Die in diesen Sätzen zusammengestellten wesentlichen Eigenschaften der Function $J(z)$ genügen fast vollständig zu ihrer expliciten Darstellung. Man hat nur noch, wie wir jetzt thun wollen, das Verhalten von $J(z)$ in der Umgebung von $w = \infty$ näher in Betracht zu ziehen.

Vorausgesetzt $w = \infty$ entspricht der complexe z-Werth $z = k$, so erfordert die Aehnlichkeit der Stellen $w = \infty$, $z = k$, dass die Ableitung $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{w}\right)$ für $z = k$ endlich und von Null verschieden ist.* Demzufolge lässt sich $\frac{1}{w}$ im Bereiche des Punktes $z = k$ entwickeln in eine Reihe von der Gestalt

$$\frac{1}{w} = (z - k) P(z - k),$$

wo in der Potenzreihe $P(z - k)$ das constante Anfangsglied nicht fehlen darf.

* Wir betrachten nur solche Polygone, welche keinen unendlich weit entfernten Eckpunkt haben.

Man erhält hieraus:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{C}{(z-k)^2} + P(z-k),$$

$$1) \qquad J(z) = -\frac{2}{z-k} + (z-k)P(z-k).$$

Es hat also die Function $J(z)$ ausser den Unstetigkeitspunkten $z = a$, welche den Eckpunkten des Polygons entsprechen, im Punkte $z = k$ einen einfachen Pol.

Wir haben jetzt zu zeigen, dass $J(z)$ in die negative z-Halbebene fortzusetzen ist und im Punkte $z = k_0$, wo k und k_0 conjugirt complexe Werthe sind, sich ganz wie im Punkte $z = k$ verhält.

In dieser Absicht grenzen wir einen Theil U der positiven z-Halbebene so ab, dass die vollständige Begrenzung dieses einfach zusammenhängenden Stückes gebildet wird, erstens von einer Strecke AB der Achse des Reellen, welche keinen der Unstetigkeitspunkte $z = a$ enthält, zweitens von einer sich nicht schneidenden Curve ACB, die in der Umgebung von $z = k$ verläuft, ohne den Punkt $z = k$ selbst einzuschliessen.

In dem so erhaltenen Gebiete U ist $J(z)$ definirt als einwerthige und stetige Function von z, wobei hervorzuheben ist, dass für die reellen Werthe, welche z auf AB annimmt, $J(z)$ eine stetige Folge ebenfalls reeller Werthe aufweist. Man kann somit den bekannten Schwarz'schen Satz anwenden und schliessen, dass die für U erklärte Function $J(z)$ über AB hinaus in das conjugirte Gebiet U_0 derart fortzusetzen ist, dass zu conjugirt complexen z-Werthen auch conjugirt complexe Functionswerthe gehören. Insbesondere nimmt daher $mod\,J(z)$ für entsprechende Punkte der beiden Umgebungen von $z = k$ und $z = k_0$ gleich grosse Werthe an.

Durch diese Betrachtungen ist nun $J(z)$ charakterisirt als eine in der ganzen z-Ebene einwerthige und bis auf einzelne jetzt völlig bekannten Pole stetige reelle Function, welche für $z = \infty$ verschwindet und die deshalb nur ein rationaler Ausdruck sein kann, dessen Darstellung sich ohne Weiteres aus den vorhergehenden Erwägungen ergiebt.

Für den Fall, dass alle den n-Eckpunkten zugehörigen z-Werthe endlich sind, hat man offenbar

$$2) \qquad J(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1-\lambda_i}{z-a_i} - \frac{2}{z-k} - \frac{2}{z-k_0}.$$

Gehört aber zum Punkte $z = \infty$ der Eckpunkt $w = b_n$ mit dem inneren Polygonswinkel $\lambda_n \pi$, so bleibt in der Summe der Bruch $\frac{1-\lambda_n}{z-a_n}$ einfach weg. Da $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = n-2$, erhält man, wie es sein muss, für sehr grosse

z-Werthe in der ersten Voraussetzung $-\frac{2}{z}$, im zweiten Falle $-\frac{3-\lambda_n}{z}$ als Hauptglied von $J(z)$.

Aus 1) folgt noch, dass das geschlossene Integral

$$\int \frac{J(z)}{z-k} dz,$$

genommen längs eines kleinen Kreises um den Punkt k herum, verschwindet. Indem wir in dasselbe für $J(z)$ die rechte Seite von 2) eintragen, ergiebt sich das wichtige Resultat:

$$3)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1-\lambda_i}{k-a_i} - \frac{2}{k-k_0} = 0.$$

Namentlich ist durch diese Gleichung der Pol k festgelegt, so bald man die reellen z-Werthe a_i als bekannt ansieht. In Bezug auf dieses „Bekanntsein" der Grössen a_i wollen wir beiläufig bemerken, dass drei unter ihnen die übrigen bestimmen, wenn man nicht blos die Winkel $\lambda\pi$ als gegeben betrachtet, sondern die Abbildung eines Polygons von vorgeschriebener Form verlangt.

Die Gleichung 3) für k ist ziemlich verwickelt und ihre directe Auflösung möchte manche Schwierigkeiten darbieten. Sie ist, wie zu erwarten war, gegenüber beliebigen linearen Transformationen invariant und lässt sich auf verschiedene Weisen umformen. So z. B. ist sie zu schreiben in der Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \frac{k-a_i}{k_0-a_i} = 0,$$

oder in

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \frac{k_0-a_i}{k-a_i} = 0,$$

woraus man, indem mit α_i die Amplitude von $k-a_i$ bezeichnet wird, weiter ableitet die reellen Relationen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \cos 2\alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) \sin 2\alpha_i = 0.$$

Indessen kann man unschwer die Gleichung 3) geometrisch deuten. Die Anwendung der Substitution

$$k - a'_i = \frac{(k-k_0)^2}{k-a_i}$$

liefert

$$\sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i) a'_i = k_0 \sum_{i=1}^{i=n} (1-\lambda_i),$$

und damit gewinnt man den Satz:

Spiegelt man die Punkte a_i an einem Kreise, der k zum Mittelpunkt und die Strecke kk_0 zum Radius hat, so liegen die Spiegelbilder a''_i auf einem Kreise mit k_0 als Mittelpunkt derart, dass k_0 den Schwerpunkt bilde der Massen $1-\lambda_i$, welche in den Punkten a''_i enthalten sind.

Besonders für den Fall $n=3$ ist diese Aussage von Interesse, da wir mit ihrer Hilfe zu der folgenden einfachen Construction des Punktes k geführt werden.

Um ein Dreieck PQR, dessen Seiten sich wie die Grössen $1-\lambda_i$ verhalten, beschreiben wir einen Kreis, auf welchem die Mitten A_1, A_2, A_3 der Bogen QR, RP, PQ verzeichnet werden. Wie man nun durch elementargeometrische Ueberlegung zeigt, werden die Massen $1-\lambda_i$, in den Punkten A_i angebracht, den Mittelpunkt des Kreises zum Schwerpunkt haben. Denken wir uns jetzt die gegebenen Punkte a_i auf der Achse des Reellen so, dass a_2 auf die endliche Strecke a_1a_3 fällt, dann folgert man leicht, dass die Winkel $\angle a_1ka_2$ und $\angle a_2ka_3$ resp. den Winkeln A_3 und A_1 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ einfach gleich zu machen sind. Durch letztere Construction aber ist k unzweideutig bestimmt.

Nachdem wir hiermit die Eigenschaften der Function $J(z)$ und die Beziehung des Poles k zum Punktsysteme der a_i erörtert haben, wenden wir uns nunmehr zu der Darstellung der Function w.

Offenbar erhalten wir dieselbe aus 2) durch zweifache Integration, wobei zwei beliebige Constanten A und B eingeführt werden; dann entsteht das Integral*

$$4)\qquad Aw+B=\int^{z}\frac{dz\prod\limits_{i=1}^{i=n}(z-a_i)^{1-\lambda_i}}{(z-k)^2(z-k_0)^2},$$

welches, weil wir $\lambda_i<2$ voraussetzten, nur in den Punkten k und k_0 unendlich wird. Wie wir aber sahen, sind diese Unendlichkeitsstellen einfache Pole, wenn nur k die Bedingung 3) erfüllt. Die Eindeutigkeit der durch 4) definirten Function w unterliegt daher keinem Zweifel, so lange z sich in der positiven Halbebene bewegt. Für rationale Werthe der λ_i ist das Integral 4) algebraisch und zwar von der zweiten Gattung; daneben erscheint dann als zugehöriges Integral erster Gattung:

$$5)\qquad Au+B=\int^{z}dz\prod_{i=1}^{i=n}(z-a_i)^{\lambda_i-1}.$$

Dasselbe bildet, wie bekannt genug, das Innere eines n-Ecks auf die z-Halbebene ab; folglich bewirkt die aus 4) und 5) resultirende Be-

---

* In seiner Arbeit: „Ueber gewisse geradlinig begrenzte Stücke Riemannscher Flächen" (Göttinger Nachrichten 1892 S. 258, Note) benutzt Herr Schönflies dieses Integral in sehr allgemeiner Gestalt. Die Abbildungsformel ist, wie er mittheilt, von Herrn Klein in Vorlesungen dargelegt.

ziehung zwischen w und u die Abbildung einer äusseren Polygonsfläche auf das Innere eines zweiten n-Ecks, welche beide Polygone entsprechend gleiche Winkel besitzen.

Inzwischen hat auch die Frage nach den Bedingungen, unter welchen die ζ-Function für die Lösung unserer Aufgabe ausreicht, ihre Erledigung gefunden, und können wir auf bekannte Resultate Bezug nehmen. So findet man, z. B. von Briot und Bouquet (Theorie des Fonctions elliptiques, 1875 S. 390) angegeben*, dass nur in den folgenden vier Fällen die Gleichung 5) eine einwerthige doppelperiodische Function von u definirt:

$$\text{I)}\quad n=4,\ \lambda_i=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\qquad \text{III)}\quad n=3,\ \lambda_i=\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3};$$

$$\text{II)}\quad n=3,\ \lambda_i=\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\qquad \text{IV)}\quad n=3,\ \lambda_i=\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3}.$$

Dazu kommt noch der Fall V), in welchem z zwar doppelperiodisch in u, aber zugleich zweideutig wird:

$$\text{V)}\qquad n=3,\ \lambda_i=\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}.$$

Wir werden nun in den folgenden Paragraphen daran gehen, diese speciellen Fälle nach einander zu discutiren.

§ 2. Das Rechteck.

Im Falle I) handelt es sich um die äussere Fläche irgend eines Rechtecks R. Wir wollen zuvörderst das Seitenverhältniss nicht als gegeben betrachten, vielmehr werden wir für sämmtliche vier Punkte a_i auf der Achse des Reellen eine bestimmte Wahl treffen. Aus der fertigen Abbildungsformel wird sich alsdann die Gestalt des Rechtecks ergeben.

Da für alle Ecken $\lambda_i=\frac{1}{2}$ ist, erscheint das Abbildungsintegral § 1 (4) sofort als ein elliptisches. Wir nehmen nun, wie es angemessen scheint, für a_1, a_2, a_3 die mit dem negativen Zeichen versehenen Wurzeln e_1, e_2, e_3 irgend einer p-Function, lassen aber a_4 ins Unendliche rücken, sodass der Factor $(z-a_4)^{\frac{1}{2}}$ im Integranden wegzulassen ist.

Substituiren wir ausserdem noch

$$\text{1)}\qquad z=-pu,$$

so erhalten wir schliesslich

$$\text{2)}\qquad A\,dw=du\,\frac{p'^2u}{(pu+k)^2(pu+k_0)^2}.$$

* Man vergleiche auch die citirten Schriften der Herren Love und Burnside, oder: Appell-Goursat, Theorie des Fonctions algébriques et de leurs Intégrales (1894) S. 246.

Einerseits wird nun durch 1) die positive z-Halbebene abgebildet auf die innere u-Fläche eines zweiten Rechtecks R' mit den vier Eckpunkten $b'_i = 0, \omega, \omega'', \omega'$, andererseits wird durch 2) eine analoge Beziehung zwischen dieser u-Fläche und der äusseren w-Fläche des Rechtecks R hergestellt, derart, dass die Ecken b'_i von R' mit denjenigen b_i von R übereinstimmen.

Es erübrigt noch die Auffindung des Poles k. Dazu kann man verschiedene Wege einschlagen. Entweder kann man nach Einsetzung der Werthe der a_i und der λ_i die Lösung versuchen einer der in § 1 für k abgeleiteten Gleichungen, oder man kann, was auf dasselbe hinausläuft, die Bedingungen aufstellen, unter welchen die Residuen der rechten Seite von 2) für die Pole $pu = -k$, $pu = -k_0$ einzeln zum Verschwinden gebracht werden können. Am einfachsten verfährt man jedoch, indem man den in § 1 bewiesenen Satz benutzt.

Weil λ in allen Ecken denselben Werth hat, werden jetzt diesem Satze zufolge die Spiegelbilder a''_i der a_i an einem Kreise mit k als Mittelpunkt in die Ecken eines Rechtecks verlegt. Das aber erfordert, dass die Strecken $a_1 a_3$ und $a_2 a_4$ aus k durch rechte Winkel projicirt werden, womit ersichtlich k den Werth

$$-p\frac{\omega''}{2} = -e_2 + i\sqrt{(e_3 - e_2)(e_1 - e_2)}$$

erhält. Dem Unendlichkeitspunkte der w-Ebene ist also in der u-Ebene der Mittelpunkt des Rechtecks R' zugewiesen, wie mit Rücksicht auf die Symmetrie zu erwarten war (Fig. 1).

Die Gleichung 2) lässt sich nun ohne Mühe integriren. Ersichtlich besitzt die Function rechter Hand, jetzt von der Gestalt

$$\frac{p'^2 u}{\left(pu - p\frac{\omega''}{2}\right)^2 \left(pu - p\frac{\omega' - \omega}{2}\right)^2},$$

die vier zweifachen Pole $\pm\frac{\omega''}{2}$, $\pm\frac{\omega' - \omega}{2}$ und die vier zweifachen Nullstellen $0, \omega, \omega'', \omega'$, folglich unterscheidet dieselbe sich nur um einen constanten Factor von dem Ausdrucke

$$p(2u - \omega'') - e_2.$$

Indem wir der willkürlichen Constanten A einen geeigneten Werth ertheilen, erhalten wir demnach

$$-\frac{dw}{du} = p(2u - \omega'') - e_2,$$

und schliesslich:

$$w = \frac{1}{2}\zeta(2u - \omega'') + e_2 u + \frac{1}{2}\eta''. \tag{3}$$

Dieses particuläre Integral liefert in Verbindung mit 1) die vollständige Lösung der gestellten Aufgabe.

Die Frage nach der Beschaffenheit des Rechtecks R wird nun dadurch erledigt, dass man durch Substitution aus 1) und 3) die den Ecken zukommenden w-Werthe b_i bestimmt. Das Resultat ist in nachstehendem Schema enthalten:

$$\begin{array}{llll}
z\text{-Ebene: } z = a_i = -e_1, & -e_2, & -e_3, & \infty, \\
u\text{-Ebene: } u = b'_i = \omega, & \omega'', & \omega', & 0, \\
w\text{-Ebene: } w = b_i = \eta + e_2\omega, & \eta'' + e_2\omega'', & \eta' + e_2\omega', & 0.
\end{array}$$

Bei dieser Folge der Ecken werden die Ränder von R und R' im positiven Sinne durchlaufen. Sind also, wie üblich, ω und $\frac{\omega'}{i}$ reell und positiv, so können wir beiläufig schliessen, dass für jede p-Function positiver Discriminante die reellen Grössen $\eta + e_2\omega$ und $\frac{1}{i}(\eta' + e_2\omega')$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Thatsächlich aber ist $\eta + e_2\omega$ stets positiv, die Seitenlängen l_1, l_2 des Rechtecks erhalten somit die Werthe:

$$l_1 = \eta + e_2\omega,$$
$$l_2 = -\frac{1}{i}(\eta' + e_2\omega').$$

Dem entsprechend hat man vorab die p-Function zu bestimmen, falls ein gegebenes Rechteck zur Abbildung vorgelegt ist.

Das geschieht mit Benutzung der beiden Formeln*:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2},$$

$$\eta + e_2\omega = \frac{2\pi^2}{\omega}\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{q^{2p-1}}{(1+q^{2p-1})^2} \qquad \frac{2\pi^2}{\omega}\varphi(q).$$

Dieselben führen zu den Gleichungen

$$4)\qquad \begin{cases} 4\log q + \dfrac{1}{\varphi(q)} = 4\pi\,\dfrac{l_2}{l_1}, \\ \qquad\qquad \omega = \dfrac{2\pi^2}{l_1}\varphi(q), \end{cases}$$

welche zur Auswerthung von q und ω und damit zur endgiltigen Bestimmung der p-Function dienen können.

Es fragt sich, ob unter Umständen die Rechtecke R und R' einander ähnlich werden. Alsdann würde eine einzige Formel 3) — wenigstens,

---

* Schwarz: „Formeln und Lehrsätze“ S. 36 Formel 12.

wenn man darin w durch den mit einem passenden Factor multiplicirten conjugirt complexen Werth w_0 ersetzt — ohne Weiteres genügen, um eine indirect conforme Abbildung der äusseren Fläche R auf das Innere desselben Rechtecks darzustellen.

Man könnte diese Beziehung gewissermassen eine „Spiegelung am Rechtecke" nennen. Selbstverständlich ist bei jedem Rechtecke eine derartige Spiegelung zu erreichen, jedoch ist dabei dann eine vermittelnde Abbildung der äusseren wie der inneren Fläche auf die s-Halbebene unumgänglich.

Wir sichern nun die Aehnlichkeit der beiden Rechtecke, indem wir setzen:

$$-\frac{\eta + e_2\omega}{\eta' + e_2\omega'} = \frac{\omega}{\omega'},$$

oder

$$o = \omega'\eta + \omega\eta' + 2e_2\omega\omega'.$$

Etwas einfacher gestaltet sich diese Bedingung, wenn man von der Legendre'schen Bezeichnung Gebrauch macht. Wir setzen also

$$K = \omega\sqrt{e_1 - e_3}, \quad E = \frac{\eta + e_1\omega}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$
$$iK' = \omega'\sqrt{e_1 - e_3}, \quad E' = \frac{\eta' + e_3\omega'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

und bestätigen dann leicht, dass obige Gleichung zusammengezogen werden kann in

$$\frac{d(KK')}{d(k^2)} = 0.$$

Die im Intervalle $0 < k^2 < 1$ stets positive Function KK', unendlich sowohl für $k^2 = 0$ als auch für $k^2 = 1$, besitzt muthmasslich daselbst nur ein einziges Minimum, welches auf Grund der Symmetrie in der Mitte des Intervalles, also bei $k^2 = \frac{1}{2}$, zu suchen ist. Hieraus würde aber folgen, dass nur für $e_2 = 0$, $i\omega = \omega'$ die Forderung der Aehnlichkeit erfüllt wird, und dass daher lediglich beim Quadrate eine einzige Abbildungsformel die Spiegelung unmittelbar bewirkt.

Am Ende wollen wir noch nebenbei bemerken, dass die hergeleiteten Abbildungsformeln im Grenzfalle, wo die Discriminante der elliptischen Functionen verschwindet, nicht länger anwendbar sind, weil wir die sämmtlichen w-Werthe b_i endlich voraussetzten. Die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassend, lautet das Resultat:

Die Gleichungen

$$w = \frac{1}{2}\zeta(2u - \omega'') + e_2 u + \frac{1}{2}\eta'', \quad s = -pu$$

stellen die conforme Abbildung dar der positiven s-Halbebene auf die

äussere w-Fläche eines Rechtecks R mit den Seitenlängen l_1 und l_2 unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Innern eines Rechteckes R' mit den Eckpunkten 0, ω, ω'', ω'. Die Bestimmungsstücke q und ω der p-Function genügen den Gleichungen 4).

§ 3. Das rechtwinkelige gleichschenkelige Dreieck.

Im Falle II) ist

$$\lambda_i = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}.$$

Für die drei willkürlichen reellen Grössen a_i machen wir die Annahme:

$$a_i = 1, \quad -1, \quad 0.$$

Die allgemeine Abbildungsformel erscheint hiermit in der Form:

$$1) \qquad A\,dw = \frac{dz\sqrt[4]{z^2(z^2-1)^3}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Bevor wir das Differential zu reduciren versuchen, wollen wir den Werth von k mittelst der in § 1 angegebenen Construction bestimmen. Demgemäss construiren wir ein Dreieck PQR mit den Seiten

$$\varrho(1-\lambda_i) = 3, \; 3, \; 2,$$

und halbiren die Bogen QR, RP, PQ des umgeschriebenen Kreises durch die Punkte A_1, A_2, A_3. Weil jetzt a_3 den Mittelpunkt bildet der endlichen Strecke a_2a_1, sind die Winkel $\angle a_2 k a_3$, $\angle a_3 k a_1$ resp. den Winkeln A_1, A_2 des Dreiecks $A_1A_2A_3$ gleich zu machen (Fig. 2).

Aus dieser Construction erhellt sofort

$$ctg \angle a_2 k a_3 = ctg \angle a_3 k a_1 = tg \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

sodass man einfach findet $k = i\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Unter Einführung dieses Werthes für k, setzen wir nunmehr

$$z = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, \quad \sqrt[4]{z^2(z^2-1)^3} = \frac{\sqrt{t}}{t^2-1},$$

$$dz = -\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)^3}},$$

wodurch die Differentialgleichung 1) die Gestalt annimmt:

$$A\,dw = \frac{A\,dt}{\sqrt{4t^3-4t}} \cdot \frac{1}{(3t^2-1)^2}.$$

Hiermit ist schon auf die lemniscatische p-Function mit den reellen Wurzeln $1, 0, -1$ hingewiesen. Demnach ersetzen wir t durch pu oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch $pu - e_2$, woraus hervorgeht:

$$2)\qquad -2u=\int^{s}\frac{ds}{\sqrt[4]{s^2(s^2-1)^3}},\quad s=\frac{pu-e_2}{\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_3)}},$$

$$3)\qquad A\frac{dw}{du}=\frac{pu}{p''^2u}.$$

Die Gleichung 2) definirt, wie wir einstweilen hervorheben, die Variable s als eindeutige Function des complexen Argumentes u.

In Betreff der geometrischen Bedeutung der Gleichungen 2) und 3) erkennt man leicht folgendes. Durchläuft s die positive Halbebene, so giebt es einen eindeutig bestimmten Werth des Argumentes u, der sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $b'_i=0,\ 2\omega,\ \omega''$ resp. den reellen s-Werthen $a_i=1,\ -1,\ 0$ entsprechend. Die Gleichung 2) bildet also die s-Halbebene auf das Innere von D' ab, während 3) eine ähnliche Beziehung zwischen letzterer Fläche und der äusseren w-Fläche eines Dreiecks D vermittelt (Fig. 2).

Wir werden diese letztere Beziehung endgiltig festsetzen, indem wir 3) integriren. Das erfordert die vorhergehende Zerlegung der doppelperiodischen Function rechter Hand:

$$F(u)=\frac{pu}{p''^2u}.$$

Diese Function ist sicherlich, weil w ein elliptisches Integral zweiter Gattung vorstellt, durch eine Summe von p-Functionen darstellbar, mit anderen Worten, sie besitzt nur zweifache Pole und für jeden Pol verschwindet das Residuum. Ersichtlich sind diese Pole der vier Wurzeln $\pm\alpha,\ \pm\beta$ der Gleichung $p''u=0$ und eine kurze Ueberlegung genügt sonach, um zu zeigen, dass $F(u)$ bis auf einen constanten Factor mit der Summe

$$p(u-\alpha)+p(u+\alpha)+p(u-\beta)+p(u+\beta)$$

identisch ist.

Indem wir für A einen geeigneten Werth wählen, können wir daher setzen

$$-\frac{dw}{du}=p(u-\alpha)+p(u+\alpha)+p(u-\beta)+p(u+\beta),$$

eine Gleichung, deren particuläres Integral

$$w=\zeta(u-\alpha)+\zeta(u+\alpha)+\zeta(u-\beta)+\zeta(u+\beta)=4\zeta u+\frac{p'''u}{p''u}$$

wir als Abbildungsformel benutzen wollen.

Durch Substitution der u-Werthe $b'_i=0,\ 2\omega,\ \omega''$ findet man für die entsprechenden Ecken des Dreiecks D die w-Werthe $b_i=0,\ 8\eta,\ 4\eta''$. Hieraus ersieht man ohne Mühe, dass dieses Dreieck D in der That rechtwinkelig gleichschenkelig ist. Offenbar gehört nun zum Unendlichkeitspunkte der w-Ebene diejenige Wurzel α der Gleichung $p''u=0$, welche im Inneren des Dreiecks D' liegt. Dieser u-Werth ist also bestimmt durch $p\alpha=+\sqrt{\frac{1}{3}}$, das heisst, der Punkt α befindet sich auf der Strecke $\omega\omega''$.

Den bisherigen Betrachtungen entnehmen wir jetzt folgenden Satz: Die Gleichungen

$$w = 4\zeta u + \frac{p'''u}{p''u}, \quad z = \frac{pu - e_2}{\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_3)}}$$

$$(p'^2 u = 4p^3 u - 4pu)$$

stellen eine conforme Abbildung der positiven z-Halbebene dar auf die äussere w-Fläche eines rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecks D unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten 0, 2ω, ω''.

§ 4. Das gleichseitige Dreieck.

Wir wiederholen in Kurzem für den Fall III) die Rechnung des vorigen Paragraphen. Zunächst setzen wir in die allgemeine Abbildungsformel

$$a_i = -1, \quad 0, \quad +1,$$

$$\lambda_i = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3},$$

wodurch wir erhalten

$$A\,dw = \frac{dz \sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Die schon mehrfach benutzte Construction des Poles k lehrt hier unmittelbar, dass aus diesem Punkte die Strecken $a_1 a_2$ und $a_2 a_3$ durch Winkel von 60^0 projicirt werden, dass also für k den Werth $i\sqrt{\frac{1}{3}}$ einzutragen ist.

Wir reduciren weiter das Differential in der letztgefundenen Gleichung unter Benutzung einer p-Function negativer Discriminante, bestimmt durch

$$p'^2 u = 4p^3 u + 1,$$

mit den beiden Perioden $2\omega_2$ und $2\omega'_2$, zwischen welchen die Relation $\omega_2 i = \omega'_2 \sqrt{3}$ stattfindet.

In dieser Absicht setzen wir

$$1) \qquad z = -\frac{1}{p'u}$$

und mithin

$$\sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2} = \frac{p^2 u \sqrt[3]{16}}{p'^2 u}, \quad dz = \frac{p''u}{p'^2 u} du,$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{16}} u = \int^z \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2(z^2-1)^2}},$$

wodurch wir eine Gleichung von der Form:

$$2)\qquad A\frac{dw}{du}=\frac{p^4u}{(p'^2u+3)^2}=\frac{p^4u}{\left(p'^2u-p'^2\frac{2\omega_2}{3}\right)^2}$$

erhalten.

Unschwer sieht man ein, dass die Gleichung 1) die eindeutige Abbildung der positiven z-Halbebene auf die innere u-Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D' vermittelt, dessen Eckpunkte $b'_i=2\omega_3-\frac{2\omega_2}{3}$, 0, $\frac{2\omega_2}{3}$ resp. den reellen z-Werthen $a_i=-1,\ 0,\ +1$ entsprechen (Fig. 3).

Die Gleichung 2) wird wiederum das Innere von D' auf die äussere w-Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D abbilden. Dem Werthe $w=\infty$ gehört $z=k=i\sqrt{\frac{1}{3}}$, und deshalb auch der u-Werth $\alpha=\frac{2\omega_3}{3}$, das heisst der Mittelpunkt des Dreiecks D'.

Es erübrigt nur noch die Integration von 2). Die zu integrirende Function besitzt die sechs zweifachen Pole $\pm\frac{2\omega'_2}{3}$, $\pm\frac{2\omega_3}{3}$, $\pm\frac{2\omega_1}{3}$ und die drei vierfachen Nullstellen 0, $\pm\frac{2\omega_2}{3}$. Unter Berücksichtigung der speciellen Eigenschaften der hier gebrauchten elliptischen Functionen — wir erinnern hier insbesondere an die Relationen

$$p\varepsilon u=\varepsilon pu,\quad p'\varepsilon u=p'u,\quad \zeta\varepsilon u=\varepsilon^2\zeta u\ -$$
$$\left(\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

zeigt man mühelos, weil für alle Pole das Residuum verschwindet, dass die Function der rechten Seite von Gleichung 2) bis auf einen constanten Factor durch den Ausdruck

$$\begin{cases} p\left(u-\frac{2\omega_3}{3}\right)+p\left(u+\frac{2\omega_3}{3}\right)+p\left(u-\frac{2\omega_1}{3}\right)+p\left(u+\frac{2\omega_1}{3}\right)\\ \qquad\qquad +p\left(u-\frac{2\omega'_2}{3}\right)+p\left(u+\frac{2\omega'_2}{3}\right)\end{cases}$$

zu ersetzen ist.

Sonach ist es gestattet, die Gleichung

$$\begin{cases} w=\zeta\left(u-\frac{2\omega_3}{3}\right)+\zeta\left(u+\frac{2\omega_3}{3}\right)+\zeta\left(u-\frac{2\omega_1}{3}\right)+\zeta\left(u+\frac{2\omega_1}{3}\right)\\ \qquad\qquad +\zeta\left(u-\frac{2\omega'_2}{3}\right)+\zeta\left(u+\frac{2\omega'_2}{3}\right)\end{cases}$$

als die gesuchte Abbildungsformel zu betrachten.

Eine leichte Umrechnung giebt indessen dieser Formel die einfachere Gestalt:

$$w=6\zeta u+\frac{3p^2u\,p'u}{p^3u+1}.$$

Hieraus erhält man durch die Substitutionen

$$u = b'_i = 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3},\ \ 0,\ \ \frac{2\omega_2}{3}$$

unmittelbar $w = b_i = -4\varepsilon\eta_2,\ 0,\ 4\eta_2$, welche Functionswerthe, wie es sein muss, in der w-Ebene ein gleichseitiges Dreieck bestimmen. Für ein solches Dreieck gilt also der Satz:

Die Gleichungen

$$w = 6\zeta u + \frac{3p^2 u p' u}{p^3 u + 1},\quad z = -\frac{1}{p' u}\quad (p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven z-Halbebene auf die äussere w-Fläche eines gleichseitigen Dreiecks D unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3},\ 0,\ \frac{2\omega_2}{3}$.

§ 5. Das Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

Nur wenig umständlicher gestaltet sich die Rechnung im Falle IV), wo man hat

$$a_i = 0,\ \ -4,\ \ -1,$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},$$

und wo es sich handelt um die Gleichung

$$A\,dw = \frac{dz\sqrt[6]{z^3(z+4)^5(z+1)^4}}{(z-k)^2(z-k_0)^2}.$$

Zur Bestimmung des Poles k auf geometrischem Wege construiren wir das Dreieck PQR mit den Seitenlängen $\varrho(1-\lambda_i) = 3,\ 5,\ 4$ im Kreise (Fig. 4). Das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ der Bogenhalbirungspunkte erhält erstens einen Winkel $A_2 = \frac{\pi}{4}$; ein zweiter Winkel A_1 ist offenbar bestimmt durch

$$tg A_1 = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R\right) = 3.$$

Es wird hier aber $\angle a_2 k a_3 = A_1$, $\angle a_3 k a_1 = A_2$, mithin ergiebt sich sofort $k = -1 + i$.

Wir verwerthen wiederum hier die p-Function des § 4 zur Reduction der Differentialgleichung, indem wir setzen:

1) $$z = -\frac{p'^2 u}{1 + p^3 u},$$

und somit:

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt[6]{z^3(z+4)^5(z+1)^4} = \frac{3p^2up'u}{(1+p^3u)^2}\sqrt[6]{-3^3}, \quad dz = -\frac{9p^2up'u}{(1+p^3u^2)}du, \\ &\qquad -\frac{3}{\sqrt[6]{-3^3}}u = \int^z \frac{dz}{\sqrt[6]{z^3(z+4)^5(z+1)^4}}. \end{aligned}\right.$$

Zugleich führen wir statt des Poles k das Argument α ein, bestimmt durch die Gleichung:

$$p^3\alpha = -\frac{k+1}{k+4} = -\frac{1}{10}(1+3i),$$

und gelangen schliesslich zu einer Gleichung von der Form:

$$2)\qquad A\frac{dw}{du} = \frac{p^2up'^2u}{(p'^2u - p'^2\alpha)^2(p'^2u - p'^2\alpha_0)^2},$$

in welcher wir unter α_0 den zu α conjugirten complexen Werth verstehen.

Es geht nunmehr aus einer einfachen Ueberlegung hervor, dass die Gleichung 1) eine beiderseitig eindeutige Abbildung der positiven z-Halbebene bewirkt auf die innere u-Fläche eines Dreiecks D' mit den Ecken $b'_i = \omega_2,\ 0,\ \frac{2\omega_2}{3}$ und den inneren Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, so dass also die Gleichung 2) in analoger Weise das Innere von D' auf das Aeussere des Dreiecks D in der w-Ebene bezieht.

Letztere Beziehung ist nun durch Integration von 2) zweckmässig zu fixiren.

Von der doppeltperiodischen Function rechter Hand, welche offenbar die zwölf zweifachen Pole $\pm\alpha$, $\pm\varepsilon\alpha$, $\pm\varepsilon^2\alpha$, $\pm\alpha_0$, $\pm\varepsilon\alpha_0$, $\pm\varepsilon^2\alpha_0$ besitzt, ist von vornherein bekannt, dass die Residuen sämmtlicher Pole verschwinden. Eine sehr leichte Rechnung genügt daher, zu zeigen, dass die Function bis auf einen constanten Factor einfach durch die Summe der zwölf p-Functionen: $p(u-\alpha)$, $p(u+\alpha)$ u. s. w. dargestellt werden kann.

Wir können also die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} w &= \zeta(u-\alpha) + \zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\varepsilon\alpha) + \zeta(u+\varepsilon\alpha) + \zeta(u-\varepsilon^2\alpha) + \zeta(u+\varepsilon^2\alpha) \\ &\quad + \zeta(u-\alpha_0) + \zeta(u+\alpha_0) + \zeta(u-\varepsilon\alpha_0) + \zeta(u+\varepsilon\alpha_0) + \zeta(u-\varepsilon^2\alpha_0) + \zeta(u+\varepsilon^2\alpha_0) \end{aligned}\right.$$

ansehen als ein particuläres Integral von 2), welches sich auch in der bequemeren Form:

$$w = 12\zeta u + \frac{pup'''u(10p'^2u - 6)}{5p'^4u - 6p'^2u + 9}$$

schreiben lässt.

Für $u = b'_i = \omega_2,\ 0,\ \frac{2\omega_2}{3}$ folgt aus dieser Abbildungsformel

$$w = b_i = 4\eta_2(1-\varepsilon),\ 0,\ 8\eta_2;$$

den Ecken des Dreiecks D' sind also diejenigen eines ihm indirect ähnlichen Dreiecks D in der w-Ebene zugefügt.

Hiermit ist nun für das vorliegende Problem folgende Lösung gefunden:

Die Gleichungen

$$w = 12\zeta u + \frac{pu\,p'''u(10p'^2u - 6)}{5p'^4u - 6p'^2u + 9}, \quad s = -\frac{p'^2u}{1 + p^3u}$$

$$(p'^2u = 4p^3u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven s-Halbebene auf die äussere w-Fläche eines Dreiecks D mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten ω_3, 0, $\frac{2\omega_2}{3}$.

§ 6. Das Dreieck mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$.

Wie schon gesagt, unterscheidet sich der Fall V) von den übrigen dadurch, dass es nicht gelingt, die Veränderliche s als eine in der ganzen u-Ebene eindeutige Function des Argumentes u darzustellen.

Wir setzen in die Grundformel ein:

$$a_i = 0, \quad +1, \quad -1,$$

$$\lambda_i = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6},$$

wodurch die Gleichung entsteht:

$$A\,dw = \frac{ds\sqrt[6]{s^2(s^2-1)^5}}{(s-k)^2(s-k_0)^2}.$$

Zur Bestimmung von k haben wir jetzt im Kreise ein Dreieck PQR zu construiren mit den Seitenlängen $\varrho(1-\lambda_i) = 2, 5, 5$ (Fig. 5). Das Dreieck $A_1A_2A_3$ der Bogenhalbirungspunkte wird gleichschenkelig, für den Winkel A_2 gilt offenbar

$$\cot A_2 = \frac{1 - \cos Q}{\sin Q} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Man hat hier aber $\angle a_3 k a_1 = A_2$, $\angle a_1 k a_2 = A_2$, das hat mithin zur Folge $k = i\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Die Reduction des Differentials gelingt jetzt durch die Substitution

$$s = \frac{2\sqrt{p^3u}}{p'u}, \tag{1}$$

wo noch immer

$$p'^2u = 4p^3u + 1.$$

Man findet auf diesem Wege:

$$\sqrt[6]{z^2(z^2-1)^5} = \frac{\sqrt[6]{-4p^3u}}{p'^2u}, \quad dz = \frac{3\sqrt{pu}}{p'^2u}du,$$

$$\frac{3}{\sqrt[6]{-4}}u = \int^z \frac{dz}{\sqrt[6]{z^2(z^2-1)^5}},$$

und schliesslich erscheinen, indem noch:

$$p'^2\alpha = \frac{1}{1-k^2} = \frac{3}{5}$$

gesetzt wird, die Variabeln u und w verbunden durch eine Gleichung von der Form:

$$2)\qquad A\frac{dw}{du} = \frac{pu}{(p'^2u - p'^2\alpha)^2}.$$

Wir betrachten zunächst die Gleichung 1). Sie definirt z als zweideutige Function von u mit den Verzweigungspunkten

$$u \equiv \pm \frac{2\omega_2}{3}.$$

Diese Zweideutigkeit aber wird gänzlich aufgehoben, wenn wir das Gebiet der Veränderlichen u beschränken auf das Innere eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $b'_i = \frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0, weil innerhalb D' kein Verzweigungspunkt angetroffen wird. Wenn wir nun überdies festsetzen, dass für alle reellen u-Werthe auf der Dreiecksseite $b'_3b'_1$ der Veränderlichen z die Amplitude $+\pi$ zukommen soll, ist dadurch z eindeutig und völlig bestimmt.

Dieser Voraussetzung gemäss erhält z für $u = b'_i = \frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0 die reellen Werthe $a_i = 0$, $+1$, -1. Eine eindeutige Abbildung des Inneren des Dreiecks D' mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ ist dabei erreicht worden, indem es aus den besonderen Eigenschaften der p-Function sofort erhellt, dass immer ein, aber auch nur ein einziges Argument u innerhalb D' einem gegebenen positiv complexen z-Werthe entspricht. So z. B. gehört zu dem Pole k das Argument α, wofür wir jetzt in ganz bestimmter Weise finden können.:

$$p\alpha = -\varepsilon\sqrt[3]{\frac{1}{10}}, \quad p'\alpha = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Nach diesen Erörterungen kehren wir zu der Gleichung 2) zurück, welche die Abbildung der äusseren w-Fläche des Dreiecks D auf das Innere von D' bewirken soll. Die rechte Seite besitzt die sechs zweifachen Pole $\pm\alpha$, $\pm\varepsilon\alpha$, $\pm\varepsilon^2\alpha$, für welche die Residuen verschwinden. Letzterem

Umstande Rechnung tragend, überzeugt man sich bald davon, dass die Function, ungerechnet einen constanten Factor, sich auf die einfache Summe der sechs p-Functionen $p(u-\alpha)$, $p(u+\alpha)$ u. s. w. reduciren lässt. Indem wir daher der Constanten A einen passenden Werth ertheilen, erhalten wir das particuläre Integral:

$$w = \zeta(u-\alpha) + \zeta(u+\alpha) + \zeta(u-\varepsilon\alpha) + \zeta(u+\varepsilon\alpha) + \zeta(u-\varepsilon^2\alpha) + \zeta(u+\varepsilon^2\alpha),$$

oder auch

$$w = 6\zeta u + \frac{30p^2 u p' u}{10p^3 u + 1}.$$

Aus dieser Abbildungsformel ersieht man sofort, dass w die Werthe $b_i = 4\eta_2$, $4\eta_2(1-\varepsilon)$, 0 resp. annimmt für $u = b'_i = \frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0, dass also das Dreieck D der w-Ebene dem Dreiecke D' indirect ähnlich ist.

In Betreff dieses Dreiecks D lautet mithin das Schlussresultat:

Die Gleichungen

$$w = 6\zeta u + \frac{30p^2 u p' u}{10p^3 u + 1}, \quad z = \frac{2\sqrt{p^3 u}}{p' u} \quad (p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen eine conforme Abbildung dar der positiven z-Halbebene auf die äussere w-Fläche eines Dreiecks D mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren eines Dreiecks D' mit den Eckpunkten $\frac{2\omega_2}{3}$, $2\omega_3$, 0. Für reelle u-Werthe ist dabei z die Amplitude $+\pi$ zuzuweisen.

§ 7. Zusammengesetzte Figuren.

Herr Burnside* hat darauf aufmerksam gemacht, dass aus jeder Lösung der Abbildungsaufgabe für eine innere Polygonsfläche einfach durch algebraische Elimination neue Abbildungsformeln hergeleitet werden können. Letztere beziehen sich alsdann auf die Figuren, welche aus dem ursprünglichen Polygone entstehen durch Anlegung von Spiegelbildern an den Seiten. So z. B. betrachtet Herr Burnside das Dreieck ABB' mit den Winkeln $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ als hervorgegangen aus dem Dreiecke ABC mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ indem er an der kürzesten Seite AC des letzteren das Spiegelbild ACB' anlegt. Diese Betrachtung gestattet nun sofort aus der Abbildungsformel des Dreiecks ABC diejenige für ABB' zu ermitteln.

Gleiches gilt gewissermassen für äussere Polygonsflächen, was hier an dem Beispiele des regelmässigen Sechsecks S dargelegt werden möge.

* Man sehe die citirte Schrift S. 194.

In der u-Ebene lassen wir das Sechseck S' durch eine fünfmal wiederholte Spiegelung und Anlegung entstehen aus dem gleichseitigen Dreiecke I mit den Ecken:

$$b'_1 = 0, \quad b'_2 = 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, \quad \alpha = \frac{2\omega_2}{3},$$

derart, dass nach einander zum Ausgangsdreiecke I die Dreiecke II bis VI hinzugefügt werden (Fig. 6).

Das Dreieck I wurde durch die Gleichung $s = -\frac{1}{p'u}$ auf die positive s-Halbebene abgebildet (§ 4), den Ecken b'_1, b'_2, α entsprachen die reellen s-Werthe $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $h = +1$.

Es fragt sich, welche Erweiterung das s-Gebiet erfährt, wenn das Gebiet von u zufolge der erwähnten Construction sich allmählich über die ganze Fläche von S' ausdehnt.

Ersichtlich überschreitet s die Achse des Reellen zwischen den Punkten $+1$ und -1 bei jedem Durchgange von u durch die Radien $\alpha b'_2$, $\alpha b'_4$, $\alpha b'_6$; überschreitet aber u die Radien $\alpha b'_1$, $\alpha b'_3$, $\alpha b'_5$, so geht s zwischen den Punkten $+1$ und 0 aus der negativen in die positive Halbebene über.

Die innere u-Fläche von S' findet daher ihre Abbildung auf sechs zusammenhängende Halbebenen; drei unter ihnen, die positiven, entsprechen den Dreiecken I, III, V, die drei negativen sind den Dreiecken II, IV, VI zugewiesen.

Man überzeugt sich nun bald davon, dass dieses System von Halbebenen eine dreiblättrige Windungsfläche R_3 bildet mit dem Windungspunkte $s = +1$. Alle Uebergangslinien fallen zusammen in die Strecke $0, +1$, längs welcher also die Blätter cyklisch an einander geheftet sind; der Rand der Fläche R_3 aber besteht aus den drei Doppelgeraden $0, -1$. Um letzteren Umstand zu veranschaulichen ist auf R_3 eine in sich selber zurücklaufende Linie gezeichnet, welche die Abbildung vorstellt einer hart am inneren Rande von S' verlaufenden geschlossenen Curve (Fig. 6).

Man ersieht hieraus, dass die den Ecken b'_i von S' entsprechenden Punkte a_i sich zu dreien über einander lagern, dass also $a_1 = a_3 = a_5 = 0$, $a_2 = a_4 = a_6 = -1$.

Wir erreichen nun unser nächstes Ziel, die conforme Abbildung auf eine Halbebene der inneren u-Fläche S', indem wir die s-Fläche R_3 eindeutig auf diese t-Halbebene beziehen.

Letztere Beziehung findet ihren analytischen Ausdruck in einer algebraischen, in s linearen Gleichung $f(t, s) = 0$, in welcher nur reelle Coefficienten vorkommen, da s für jeden reellen t-Werth einen ebenfalls reellen, zwischen -1 und 0 gelegenen Werth annimmt. Wie am Ende diese Gleichung sich gestaltet, geht aus der folgenden Ueberlegung hervor.

Wir überdecken R_3 mit einer zweiten ihr congruenten Fläche R'_3 und verbinden beide längs der Strecke -1, 0, je ein Blatt von R_3 mit einem

von R'_8 verknüpfend. So entsteht eine geschlossene sechsblättrige Fläche R_6 mit zwei in $z = +1$ übereinander liegenden Windungspunkten zweiter Ordnung, während in $z = 0$ und $z = -1$ je drei einfache Windungspunkte auftreten (Fig. 6). Diese Fläche R_6 ist nun der J-Fläche R'_6, welche von der Diederirrationalität*:

$$\lambda(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; J\right)$$

auf die λ-Ebene conform abgebildet wird, vollkommen ähnlich. Die Ausnahmepunkte von R'_6 aber, die auf R_6 den Punkten $z = +1, 0, -1$ entsprechen, sind $J = 0, +1, \infty$; folglich geht R'_6 durch die Substitution

$$J = \frac{1-z}{1+z}$$

in R^6 über, woraus wir schliessen, dass die Function $\lambda\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ die Fläche R_6 auf die lückenlose λ-Ebene eindeutig bezieht. Die positive λ-Halbebene kann offenbar dabei als das Abbild unserer ursprünglichen Fläche R_3 angesehen werden. Indem wir noch die sehr unwesentliche Substitution $2\lambda = t + 1$ in der bekannten Gleichung der Irrationalität λ vornehmen, ergiebt sich nunmehr die Relation $f(z, t) = 0$ in der Form:

$$1) \quad 1 - z : -2z : z + 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2.$$

Jeder der sechs Halbebenen von R_3 entspricht jetzt ein bestimmtes von Geraden und Kreisbogen begrenztes Stück der t-Halbebene. Den z-Werthen a_i gehören nach einander die t-Werthe $c_i = 0, -1, -3, \infty, +3, +1$; der Windungspunkt $z = +1$ ist in $t = i\sqrt{3}$ verlegt. Wir ersetzen in der Gleichung 1) z durch $-\frac{1}{p'u}$ und erhalten als Abbildungsformel** für die innere u-Fläche des regelmässigen Sechsecks S':

$$2) \quad 1 + p'u : +2 : p'u - 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2.$$

Damit jedoch die Beziehung zwischen u und t eine beiderseitig eindeutige sei, hat man stete Rücksicht zu nehmen auf die Eintheilung der beiden Flächen in entsprechende Bereiche (Fig. 6).

Ausgerüstet mit dem oben gewonnenen Resultate können wir nun endlich die Abbildungsfrage für die äussere w-Fläche eines regelmässigen Sechsecks S ohne Mühe lösen.

Wir gehen dabei aus von der Bemerkung, dass die Gleichung 2) und die Abbildungsformel:

$$3) \quad Au + B + \int^t \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t^2-9)(t^2-1)}}$$

* Klein-Fricke: „Theorie der elliptischen Modulfunctionen" I, S. 65–71.

** In etwas abweichender Form von Herrn Burnside angegeben.

gleichbedeutend sein müssen. Betrachten wir nun zu gleicher Zeit das Integral

$$4)\qquad Aw + B = \int^{t} \frac{dt \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)}}{(t-k)^2(t-k_0)^2},$$

welches die Abbildung bewirkt der äusseren w-Fläche eines bestimmten gleichwinkeligen, aber nicht nothwendig gleichseitigen Sechsecks S, so liegt die Vermuthung nahe, das dieses Integral 4) unter Zuhilfenahme von 2) auf ein elliptisches reducirt werden kann.

Ehe wir jedoch diese Reduction versuchen können, haben wir wie früher den Pol k zu ermitteln. Alle Rechnung lässt sich dabei vermeiden, indem wir bemerken, dass die Punkte $c_i = 0,\ -1,\ -3,\ \infty,\ +3,\ +1$ durch Spiegelung an einem Kreise mit dem Mittelpunkt $i\sqrt{3}$ und dem Radius $2i\sqrt{3}$ in die Ecken c''_i eines regelmässigen Sechsecks übergehen, dessen Mittelpunkt den t-Werth $-i\sqrt{3}$ zukommt. Die Anwendung des in § 1 bewiesenen Satzes ergiebt dann unmittelbar das Resultat:

$$k = i\sqrt{3}.$$

Es handelt sich also um die Einführung von u in die Gleichung

$$A\,dw = \frac{dt \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)}}{(t^2+3)^2}.$$

Aus 2) und 3) findet man:

$$dt = -\frac{1}{3}\,du \sqrt[3]{t(t^2-1)(t^2-9)},$$

$$\frac{\sqrt[3]{t^2(t^2-1)^2(t^2-9)^2}}{(t^2+3)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{pu}{1+p'u},$$

so dass wir in der That w durch u ausdrücken können und zu der Gleichung

$$A\frac{dw}{du} = -\frac{2pu}{1+p'u} = p\left(u - \frac{2\omega_2}{3}\right)$$

gelangen. Die gesuchte Abbildungsformel ist also:

$$w = \zeta\left(u - \frac{2\omega_2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta_2,$$

oder:

$$w = \zeta u + \frac{1}{2}\,\frac{p'u-1}{pu}.$$

Substitution der sechs u-Werthe b'_i liefert für die Ecken des Sechsecks S:

$$w = b_i = 0,\quad 2\eta_3 - \frac{2}{3}\eta_2,\quad 2\eta_3,\quad \frac{4}{3}\eta_2,\quad 2\eta_1,\quad 2\eta_1 - \frac{2}{3}\eta_2;$$

das Sechseck S erweist sich also als regelmässig, womit wir den Satz gewonnen haben:

Die Gleichungen

$$w = \zeta u + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - 1}{pu},$$

$$1 + p'u : + 2 : p'u - 1 = (t^2 + 3)^3 : t^2(t^2 - 9)^2 : 27(t^2 - 1)^2,$$

$$(p'^2 u = 4p^3 u + 1)$$

stellen die conforme Abbildung dar der äusseren w-Fläche eines regelmässigen Sechsecks S auf die positive t-Halbebene unter der Bedingung, dass die Veränderliche u sich bewegt im Inneren des Sechsecks S' mit den Eckpunkten

$$0, \quad 2\omega_3 - \frac{2\omega_2}{3}, \quad 2\omega_3, \quad \frac{4}{3}\omega_2, \quad 2\omega_1, \quad 2\omega_1 - \frac{2\omega_2}{3}.$$

IX.

Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung.

Von

Prof. F. Wittenbauer
in Graz.

Hierzu Taf. VII Fig. 1—7.

Der Beschleunigungspol ist für die Kenntniss des Beschleunigungszustandes eines in ebener Bewegung begriffenen starren Systems von hervorragender Bedeutung; um ihn gruppiren sich die Beschleunigungen aller Systempunkte sowohl der Grösse wie auch der Richtung nach in so übersichtlicher Weise, dass man sagen kann: mit der Angabe dieses Punktes gewinnt man mit einem Schlage einen Ueberblick über den Beschleunigungszustand des Systems.

Zu dem kommt, dass, wenn ausser dem Beschleunigungspol die Beschleunigung eines Systempunktes gegeben ist, die Beschleunigung jedes anderen Systempunktes in sehr einfacher Weise construirt werden kann.

Die Lösung des wichtigen und für die Zukunft der Kinematik bedeutungsvollen Problems: *die Beschleunigung jedes Punktes einer kinematischen Kette in Bezug auf jedes beliebige Glied derselben zu construiren*, lässt sich vom allgemeinen Gesichtspunkte aus nur so erreichen, dass man zunächst zeigt, wie *der Beschleunigungspol jedes Gliedes in Bezug auf jedes andere Glied der Kette* construirt werden kann.

Die folgenden Untersuchungen sollen die Lösung dieser Frage vorbereiten; sie sollen zeigen, wie man den resultirenden Beschleunigungspol eines Systems finden kann, das eine bekannte Eigenbewegung besitzt und überdies gezwungen wird, die Bewegung eines fremden Systems mitzumachen.

1. Der Bewegungszustand eines ebenen Systems Σ_2 sei durch Angabe des Drehpoles O_2, des Wendepoles O_2, des Beschleunigungspoles G_2, der Winkelgeschwindigkeit ω_2 und der Winkelbeschleunigung $\lambda_2 = \frac{d\omega_2}{dt}$ vollständig bekannt (Fig. 1).

Dieses System, das geführte, werde gezwungen, die Bewegung eines anderen Systems Σ_1, des führenden, mitzumachen. Die Bewegung dieses letzteren sei durch die Angabe der analogen Punkte und Intensitäten $O_1 J_1 G_1$, ω_1, $\lambda_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ vollständig bestimmt.

Es sei der Beschleunigungspol G der resultirenden Bewegung des Systems Σ_2 zu bestimmen. Die Lösung ist folgende: Man suche zuerst den Drehpol O und den Wendepol J der resultirenden Bewegung, ziehe über OJ als Durchmesser den Wendekreis und construire den Winkel $JOG = \varphi$; im Schnitte der Linie OG mit dem Wendekreise liegt der gesuchte Beschleunigungspol G (vergl. Fig. 3).

Die Bestimmung des Wendepoles J habe ich in meiner Abhandlung: „Die Wendepole der absoluten und relativen Bewegung" gelehrt.* Man ziehe die Linien $O_1 J_2$, $O_2 J_1$, $O J_2$, ferner

$$OK \,||\, O_1 J_1, \quad OL \,||\, O_2 J_2, \quad LMN \,||\, O_1 O_2, \quad NJ^0 \,||\, KL,$$

dann liefert der Schnitt der Linien MK und NJ^0 den Punkt J^0, das ist den resultirenden Wendepol bei Ausserachtlassung der Winkelbeschleunigungen λ_1 und λ_2. Der wirkliche Wendepol J liegt mit J^0 in einer Senkrechten auf $O_1 O_2$ und zwar ist, wie ich a. a. O. gezeigt habe,

$$\beta = JJ^0 = b \cdot \frac{\lambda}{\omega^2} = b \,.\, tang\, \varphi,$$

worin $\omega = \omega_1 + \omega_2$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ die resultirende Winkelbeschleunigung und b die Strecke OB bedeutet (Fig. 4), wobei die Punkte O und B die barycentrischen Ausdrücke besitzen:

$$\omega O = \omega_1 O_1 + \omega_2 O_2, \quad \lambda B = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2.$$

Beachtet man die aus Obigem folgenden Relationen:

$$a_1 : a_2 : a = \omega_2 : \omega_1 : \omega,$$

$$a_1 + b : a_2 - b : a = \lambda_2 : \lambda_1 : \lambda,$$

worin $O_1 O = a_1$, $O O_2 = a_2$, $O_1 O_2 = a$ bedeuten; ferner die bekannten Beziehungen:

$$\frac{\lambda}{\omega^2} = tang\, \varphi, \quad \frac{\lambda_1}{\omega_1^2} = tang\, \varphi_1, \quad \frac{\lambda_2}{\omega_2^2} = tang\, \varphi_2,$$

worin $\varphi\, \varphi_1\, \varphi_2$ die Winkel JOG, $J_1 O_1 G_1$, $J_2 O_2 G_2$ bezeichnen, so ergeben sich die Gleichungen:

1) $$\omega^2 tang\, \varphi = \omega^2_1 \,.\, tang\, \varphi_1 + \omega^2_2 \,.\, tang\, \varphi_2,$$

2) $$b \,.\, \omega^2 tang\, \varphi = a_1 \omega^2_1 tang\, \varphi_1 + a_2 \omega^2_2 tang\, \varphi_2,$$

oder:

---

* Zeitschrift für Mathematik und Physik 36. Bd.

3) $$a^2 . tang\, \varphi = a^2_2 . tang\, \varphi_1 + a^2_1 . tang\, \varphi_2,$$

4) $$b . a^2 . tang\, \varphi = a_1 a^2_2 tang\, \varphi_1 + a_2 a^2_1 tang\, \varphi_2.$$

Diese Relationen können zur Construction von b und φ zweckmässig in folgender Weise verwendet werden (Fig. 1). Man übertrage die Bögen $F_1 E_1 = G_1 J_1$, $F_2 E_2 = G_2 J_2$ und ziehe die Linien $E_1 O_1$ und $E_2 O_2$ bis zu den Schnitten 1 und 2 mit einer Geraden, die im Punkte V auf $O_1 O_2$ senkrecht errichtet wird. V ist der Vertauschungspunkt der Strecke $O_1 O O_2$, das heisst, es ist:

$$O_1 V = a_2, \quad V O_2 = a_1.$$

Es ist dann

$$V1 = a_2 . tang\, \varphi_1, \quad V2 = a_1 . tang\, \varphi_2$$

und

$$\text{Fläche } O_1 1 2 O_2 = \frac{1}{2} a^2_2 tang\, \varphi_1 + \frac{1}{2} a^2_1 . tang\, \varphi_2.$$

Zieht man nun $23 \parallel O_2 1$, $34 \parallel O_2 O_1$, so ist nach 3)

$$\text{Fläche } 4 O_2 O_1 = \frac{1}{2} a^2 tang\, \varphi,$$

somit

$$\sphericalangle (4 O_2 O_1) = \varphi.$$

Zieht man ferner $25 \parallel O_2 O_1$, $5B \parallel 4O$, so erhält man auf $O_1 O_2$ den Punkt B und damit die Strecke b.

Errichtet man nun $CB \perp O_1 O_2$ und zieht $COE \parallel 4 O_2$, so ist

$$BC = b . tang\, \varphi = \beta = JJ^0.$$

Hierdurch ist der resultirende Wendepol J bekannt. Beschreibt man über OJ als Durchmesser einen Kreis und überträgt den Bogen $FE = JG$, so hat man damit den resultirenden Beschleunigungspol G gefunden.

2. Die im vorigen Artikel angegebene Construction des Beschleunigungspoles ist zwar sehr einfach, verlangt aber die Uebertragung von Winkeln, was wohl umgangen werden kann.

Es soll deshalb hier noch eine andere Construction des Beschleunigungspoles mitgetheilt werden, welche diese Uebertragung überflüssig macht und bei welcher auch die Construction des Wendepoles J^0 und der Strecke b vermieden werden kann.

Zieht man (Fig. 2) $E_1 J_1 A_1 \parallel O_1 O_2$ und bringt diese Gerade zum Schnitte E_1 mit $F_1 G_1$, der Linie, welche den Beschleunigungspol G_1 mit dem zweiten Schnittpunkte F_1 des Wendekreises mit der Polgeraden $O_1 O_2$ verbindet, fällt $E_1 i_1 \perp A_1 O$ bis zum Schnitte i_1 mit der Geraden $J_1 F_1 \perp O_1 O_2$, so ist

$$J_1 i_1 = a_1 . tang\, \varphi_1.$$

Führt man dieselbe Construction am zweiten Wendekreise durch, so ist

$$J_2 i_2 = a_2 . tang\, \varphi_2.$$

Es kann nun gezeigt werden, dass der resultirende Wendepol J den barycentrischen Ausdruck besitzt:

$$\omega^2 J = \omega^2_1 i_1 + \omega^2_2 i_2 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,.\,O_2,$$

das heisst, dass er aus den Punkten $i_1 i_2 O_2$ durch dieselbe Construction gefunden werden kann, wie J^0 aus $J_1 J_2 O_2$ gefunden wurde. Beachtet man nämlich, dass J^0 den barycentrischen Ausdruck besitzt

$$\omega^2 J^0 = \omega^2_1 J_1 + \omega^2_2 J_2 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,O_2$$

und bezeichnet die Abstände der Punkte $J_1 J_2 J^0$, $i_1 i_2 J$ von der Polgeraden $O_1 O_2$ mit $p_1 p_2 p$, $q_1 q_2 q$, so liefert die Differenz obenstehender Ausdrücke:

$$(q - p)\,\omega^2 = (q_1 - p_1)\,.\,\omega^2_1 + (q_2 - p_2)\,.\,\omega^2_2,$$

oder, da

$$q - p = JJ^0 = b\,.\,tang\,\varphi, \quad q_1 - p_1 = J_1 i_1 = a_1\,tang\,\varphi_1,$$

$$q_2 - p_2 = J_2 i_2 = a_2\,.\,tang\,\varphi_2,$$

$$b\,.\,\omega^2.\,tang\,\varphi = a_1\,\omega^2_1\,tang\,\varphi_1 + a_2\,\omega^2_2\,tang\,\varphi_2,$$

welche Gleichung mit 2) übereinstimmt.

Man construirt also zunächst die Punkte $i_1 i_2$ und aus ihnen auf gewöhnlichem Wege den Wendepol J; die Construction der Strecke JJ^0 entfällt.

Um den Beschleunigungspol G zweckmässig zu construiren, beachte man nun folgenden Hilfssatz, auf den ich schon bei anderer Gelegenheit aufmerksam gemacht habe:*

Bewegen sich n mit den Gewichten $p_1 \ldots p_n$ behaftete Punkte in einer Ebene derart, dass sie stets in einer parallel zu sich fortrückenden Geraden verbleiben, jeder derselben aber eine beliebige, gegen die erstgenannte unter dem Winkel α_n geneigte Gerade beschreibt, so bewegt sich der Schwerpunkt dieser Punkte ebenfalls in einer Geraden, für deren Neigung α zur fortrückenden Geraden die Beziehung besteht:

$$cotang\,\alpha\,.\,\Sigma p_n = \Sigma\,.\,p_n\,.\,cotang\,\alpha_n.$$

Dieser Hilfssatz gestattet im vorliegenden Falle eine bemerkenswerthe Anwendung. Bezeichnet man (Fig. 2) mit $F F_1 F_2$ die zweiten Schnittpunkte der Wendekreise mit der Polgeraden $O_1 O_2$, so ist F der Schwerpunkt der Punkte $F_1 F_2 O_2$, wenn in ihnen die Gewichte ω^2_1, ω^2_2, $2\,\omega_1\,\omega_2$ angebracht werden; denn zu allen Wendepolen $J_1 J_2$, die beziehungsweise auf den Geraden $J_1 F_1$, $J_2 F_2$ angenommen werden, liegt der resultirende Wendepol auf der Geraden JF.

Zieht man nun die Geraden $F_1 G_1$, $F_2 G_2$, $O_2 A_2$ und lässt die Polgerade $O_1 O_2$ parallel zu sich fortrücken, sucht in irgend einer neuen Lage derselben ihre Schnittpunkte $D_1 D_2 D_0$ mit den eben erwähnten Geraden und bringt in ihnen die Gewichte ω^2_1, ω^2_2, $2\,\omega_1\,\omega_2$ an, so gilt für die Gerade, in welcher der Schwerpunkt D dieser drei Punkte liegen muss, nach obigem Hilfssatze die Gleichung:

---

* „Ueber gleichzeitige Bewegungen eines ebenen Systems", Zeitschrift für Mathematik und Physik 33. Bd.

$$\omega^2 \operatorname{cotang} \alpha = \omega^2_1 \operatorname{cotang} \alpha_1 + \omega^2_2 . \operatorname{cotang} \alpha_2 + 2\, \omega_1 \omega_2 \operatorname{cotang} \alpha_0,$$

oder:

$$\omega^2 . \operatorname{cotang} \alpha = \omega^2_1 . \operatorname{tang} \varphi_1 + \omega^2_2 . \operatorname{tang} \varphi_2 .$$

Vergleicht man hiermit Gleichung 1), so folgt $\alpha = 90 - \varphi$, das heisst, die Gerade DF, in der sich der Schwerpunkt D bewegt, geht durch den Beschleunigungspol G.

Die Bestimmung des Punktes D aus $D_1 D_2 D_0$ kann in folgender Weise vorgenommen werden (Fig 5):

Man suche die Schnittpunkte:

S_1 von $O_1 D_1$ und $O_2 D_0$,
S_2 „ $O_1 D_0$ „ $O_2 D_2$,
R_1 „ OS_1 „ $D_1 D_2$,
R_2 „ OS_2 „ $D_1 D_2$,
T „ $O_1 R_1$ „ $O_2 R_2$,
D „ OT „ $D_1 D_2$,

dann ist D der gesuchte Schwerpunkt; denn es bestehen zwischen den Punkten die barycentrischen Ausdrücke:

$$\omega O = \omega_1 O_1 + \omega_2 O_2,$$

$$\omega R_1 = \omega_1 D_1 + \omega_2 D_0, \quad \omega R_2 = \omega_1 D_0 + \omega_2 D_2,$$

$$\omega D = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2,$$

somit

$$\omega^2 D = \omega^2_1 D_1 + \omega^2_2 D_2 + 2\, \omega_1 \omega_2 D_0 .$$

Diese Construction wird besonders einfach, wenn man die Polgerade bis zum Schnitte von zweien jener drei Geraden $D_1 F_1$, $D_2 F_2$, $D_0 O_2$ verschiebt, z. B. bis $C_1 C_2$ (Fig. 2); hier fallen $C_0 C_2 R_2$ zusammen und es genügt, folgende Schnittpunkte zu bestimmen:

S_1 von $O_1 C_1$ und $O_2 C_0$,
R_1 „ $O\, S_1$ „ $C_1 C_2$,
T „ $O_1 R_1$ „ $O_2 C_0$,
C „ $O\, T$ „ $C_1 C_2$,

dann ist C ein Punkt der Linie DF, die durch den Beschleunigungspol G geht.

Die Construction dieses Poles nimmt also folgenden Verlauf: Man suche zuerst die Punkte $i_1 i_2$, sodann den Wendepol J und ziehe den Wendekreis über OJ. Hierauf ermittle man den Punkt C (oder allgemein D) und verbinde ihn mit F, dem zweiten Schnittpunkt des Wendekreises mit der Polgeraden; dann schneidet CF diesen Kreis im Beschleunigungspol G.

3. Ausser dem Wendekreis, dessen Punkte keine Normalbeschleunigung besitzen und deshalb Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, dient noch ein anderer Kreis dazu, den Bewegungszustand eines ebenen Systems in ganz ausgezeichneter Weise darzustellen. Es ist dies der zweite der

Bresse'schen Kreise (Gleichenkreis nach Burmester*, Tangentialkreis nach Proell**). Die Punkte dieses Kreises besitzen keine Tangentialbeschleunigung und legen somit in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen gleiche Wegelemente zurück.

Der Tangentialkreis enthält den Drehpol O und den Beschleunigungspol G (Fig. 3); sein Mittelpunkt liegt auf der Poltangente und schneidet diese ausser in O in einem zweiten Punkte H, den wir Tangentialpol nennen wollen.

Zwischen den Durchmessern des Wendekreises d und des Tangentialkreises e besteht die Beziehung:

5) $$d\omega^2 = e\lambda.$$

Der Tangentialpol spielt bei der Bestimmung des Beschleunigungspoles eine ähnlich wichtige Rolle, wie der Wendepol. Auf diesen Punkt hat zuerst W. Schell aufmerksam gemacht***; er nennt ihn Mittelpunkt der Winkelbeschleunigung.

Es soll hier die Aufgabe gelöst werden, den Tangentialpol H der resultirenden Bewegung zu finden, wenn die Tangentialpole H_1 und H_2 der führenden und der geführten Bewegung gegeben sind.

Der Tangentialpol ist jener Punkt, um welchen die augenblicklich auftretende Winkelbeschleunigung zu drehen sucht.

Die um H_1 auftretende Winkelbeschleunigung λ_1 (Fig. 6) kann in folgender Weise ersetzt werden:

a) durch eine Translationsbeschleunigung $e_1\lambda_1$ in der Richtung des Wendedurchmessers $O_1J_1 = d_1$ und

b) durch eine Winkelbeschleunigung λ_1 um O_1.

Ebenso kann die um H_2 auftretende Winkelbeschleunigung λ_2 ersetzt werden:

c) durch eine Translationsbeschleunigung $e_2\lambda_2$ in der Richtung des Wendedurchmessers $O_2J_2 = d_2$ und

d) durch eine Winkelbeschleunigung λ_2 um O_2.

Anderseits sind beide Winkelbeschleunigungen λ_1 und λ_2 zusammen einer dritten $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ um A äquivalent, wobei A den barycentrischen Ausdruck hat:

$$\lambda A = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2.$$

Die Winkelbeschleunigung λ um H kann in folgender Weise ersetzt werden:

e) durch eine Translationsbeschleunigung $-\gamma.\lambda$ senkrecht zu $AH = \gamma$,

f) durch eine Translationsbeschleunigung $e\lambda$ in der Richtung des Wendedurchmessers $OJ = d$,

* Lehrbuch der Kinematik S. 809.

** Civilingenieur 1872.

*** Zeitschrift für Mathematik und Physik 19. Jahrgang.

g) durch eine Translationsbeschleunigung $b\lambda$, senkrecht zu $OB = b$ und
h) durch eine Winkelbeschleunigung λ um B.

Die unter a) bis d) angeführten Beschleunigungen müssen den unter e) bis h) aufgezählten äquivalent sein; nun sind aber in Folge des Ausdruckes

$$\lambda B = \lambda_1 O_1 + \lambda_2 O_2$$

die unter b) und d) erwähnten ohnedies der unter h) angeführten Beschleunigung äquivalent; es müssen also auch die Translationsbeschleunigungen a) und c) jenen e), f) und g) äquivalent sein, das heisst, es muss die Gleichheit der geometrischen Summen bestehen:

$$\bar{e}_1 . \lambda_1 + \bar{e}_2 . \lambda_2 = \bar{e} . \lambda + \bar{b} . \lambda - \bar{\gamma} . \lambda.$$

Benützt man die imaginäre Einheit i, um anzudeuten, dass die Strecke ib durch Drehung der Strecke b um 90^0 im Sinne der Winkelbeschleunigung λ entsteht, so ist mit Berufung auf Gleichung 5):

$$\bar{d}_1 \omega^2{}_1 + \bar{d}_2 \omega^2{}_2 = \bar{d}\omega^2 + i\bar{b}\lambda - i\bar{\gamma}\lambda.$$

Vergleicht man hiermit die in meiner Abhandlung: „Die Wendepole der absoluten und relativen Bewegung" gegebene Gleichung 2):

$$\bar{d}_1 \omega^2{}_1 + \bar{d}_2 \omega^2{}_2 = \bar{d}\omega^2 + i\bar{b}\lambda - \bar{a}\,\omega_1 \omega_2,$$

so folgt unmittelbar:

$$\gamma = a . \frac{\omega_1 \omega_2}{\lambda} = \frac{a_1 a_2}{a} . \frac{\omega^2}{\lambda}$$

und zwar ist diese Strecke senkrecht zur Polgeraden $O_1 O_2 = a$.

Hieraus folgt der Satz:

Der Tangentialpol H der resultirenden Bewegung liegt in einer Senkrechten, die man aus dem Theilungspunkte A der Geraden $H_1 H_2$ auf die Polgerade $O_1 O_2$ fällt.

Der Theilungspunkt A theilt die Strecke $H_1 H_2$ im umgekehrten Verhältniss der Winkelbeschleunigungen $\lambda_1 \lambda_2$.

Dieser Satz kann mit Vortheil zur Construction des Beschleunigungspoles verwendet werden.

Zieht man nämlich in Figur 1 $BD \parallel O_1 H_1$ bis zum Schnitte mit $O_2 H_1$, sodann $DA \parallel O_2 H_2$ bis zum Schnitte mit $H_1 H_2$, so ist A der Theilungspunkt und die von ihm auf $O_1 O_2$ gefällte Senkrechte trifft die Poltangente $OH \perp OJ$ im Tangentialpol H der resultirenden Bewegung.

Sind beide Bewegungen, die führende wie die geführte, dauernde Rotationen, so fallen die Wendepole und Tangentialpole mit den zugehörigen Drehpolen zusammen. Der Theilungspunkt A fällt dann nach B.

Dieser Specialfall hat insbesondere Bedeutung für kinematische Ketten; wie hier die Tangentialpole zu construiren sind, soll in einer folgenden Arbeit gezeigt werden.

4. Zum Schlusse möge noch der Beweis erbracht werden, dass die angegebene Construction des Beschleunigungspoles einer zusammengesetzten

Bewegung in völliger Uebereinstimmung steht mit dem Coriolis'schen Satze über die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes.

Es seien wieder (Fig. 7) $O_1 O_2 O$, $J_1 J_2 J$, $G_1 G_2 G$ die Drehpole, Wendepole und Beschleunigungspole dreier Bewegungen: der führenden, der geführten und der resultirenden aus beiden.

Nennt man die Abstände eines beliebigen Punktes M der Ebene von den drei Drehpolen $\varrho_1 \varrho_2 \varrho$, von den drei Beschleunigungspolen $r_1 r_2 r$, so ist die Beschleunigung γ des Punktes M zusammengesetzt aus $r\omega^2$ in der Richtung MG und aus $r\lambda$ senkrecht zu MG, oder

$$\gamma = \bar{r} . \omega^2 - i . \bar{r}\lambda.$$

Diese beiden Beschleunigungen können in folgender Weise in Componenten zerlegt werden:

$$r\omega^2 = \bar{\varrho}\,\omega^2 + \bar{d}\,\omega^2 + \overline{JG} . \omega^2,$$

$$r\lambda = \overline{MB} . \lambda - b . \lambda + \overline{OG} . \lambda,$$

somit

$$\gamma = \bar{\varrho}\,\omega^2 + \bar{d}\,\omega^2 + \overline{JG} . \omega^2 - i . \overline{MB} . \lambda + i\bar{b}\lambda - i . \overline{OG} . \lambda.$$

Nun ist

$$JG = i . \overline{OG} . \operatorname{tang} \varphi = i . \overline{OG} \cdot \frac{\lambda}{\omega^2},$$

somit

$$\overline{JG} . \omega^2 - i . \overline{OG} . \lambda = 0.$$

Ferner ist

$$MB . \lambda = \varrho_1 \lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2,$$

$$\varrho\,\omega^2 = \omega(\varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2) = \varrho_1 \omega^2_1 + \varrho_2 \omega^2 + \omega_1 \omega_2 (\varrho_1 + \varrho_2);$$

endlich nach vorigem Artikel:

$$\bar{d}\,\omega^2 + i\bar{b}\lambda = \bar{d}_1 \omega^2_1 + \bar{d}_2 . \omega^2_2 + \bar{a} . \omega_1 \omega_2.$$

Die geometrische Summe, welche γ darstellt, geht somit über in:

$$\gamma = \bar{\varrho}_1 \omega^2_1 + \bar{\varrho}_2 \omega^2_2 + \omega_1 \omega_2 (\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{a}) + \bar{d}_1 \omega^2_1 + \bar{d}_2 \omega^2_2 - i\bar{\varrho}_1 \lambda_1 - i\bar{\varrho}_2 \lambda_2$$

und da die Strecke a die Richtung $O_1 O_2$ besitzt:

$$\bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \bar{a} = 2\varrho_2,$$

$$\gamma = (\bar{\varrho}_1 \omega^2_1 + \bar{d}_1 \omega^2_1 - i\bar{\varrho}_1 \lambda_1) + (\bar{\varrho}_2 \omega^2_2 + \bar{d}_2 \omega^2_2 - i\bar{\varrho}_2 \lambda_2) + 2\varrho_2 \omega_1 \omega_2.$$

Nun ist aber die Beschleunigung des Punktes M in Bezug auf das führende System:

$$\gamma_1 = \bar{r}_1 \omega^2_1 - i\bar{r}_1 \lambda_1 = \bar{\varrho}_1 \omega^2_1 + \bar{d}_1 \omega^2_1 + \overline{J_1 G_1}\,\omega^2_1 - i\varrho_1 \lambda_1 - i . \overline{O_1 G_1} . \lambda_1$$

und da auch hier gilt:

$$\overline{J_1 G_1} . \omega_1^2 - i . \overline{O_1 G_1} . \lambda_1 = 0,$$

$$\gamma_1 = \bar{\varrho}_1 \omega_1^2 + \bar{d}_1 \omega^2_1 - i\bar{\varrho} . \lambda_1.$$

Ebenso ergiebt sich für die Beschleunigung des Punktes im geführten System:

$$\gamma_2 = \bar{\varrho}_2 \omega^2_2 + \bar{d}_2 \omega^2_2 - i\bar{\varrho}_2 . \lambda_2,$$

somit bleibt

$$\gamma = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 2\bar{\varrho}_2 . \omega_1 \omega_2,$$

der bekannte Satz von Coriolis.

X.

Ueber einige besondere Curven des dritten Grades und solche der dritten Klasse.

Von

Benedikt Sporer

in Ulm a. D.

I.

1. Sind die Kegelschnitte C^2 eines Büschels von Kegelschnitten, $B(C^2)$ durch vier Grundpunkte p_1, p_2, p_3 und p_4 und zwei beliebige Geraden G und H gegeben, so bestimmt jeder Kegelschnitt C^2 auf der Geraden G zwei Punkte x_1 und x_2 und auf der Geraden H zwei Punkte y_1 und y_2. Durch irgend einen Kegelschnitt C^2 sind dadurch vier Gerade xy, nämlich die Geraden x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1 und x_2y_2, bestimmt, und zwar gehen durch jeden Punkt x auf der Geraden G zwei Gerade xy, die im Allgemeinen von G verschieden sind; die Gerade xy fällt aber auch einmal auf die Gerade G selbst und zwar für den Punkt $x = x_0$, den der Kegelschnitt C^2_0 des Büschels durch den Schnittpunkt $a = y_0$ der Geraden G und H mit G ausserdem gemein hat. Ebenso fällt xy auch einmal auf die Gerade G, oder wir erhalten:

Der Ort der Geraden xy ist eine Curve der dritten Klasse, K^3, mit G und H als einfachen Tangenten, und zwar werden die letzteren von der Curve K^3 in den Punkten berührt, in denen der Kegelschnitt C^2_0 des Büschels, der durch den Schnittpunkt a der Geraden G und H geht, diese nochmals schneidet.

2. Von der Curve K^3 lassen sich (ausser den Geraden G und H) eine Reihe von Tangenten angeben oder leicht zeichnen, so z. B.:

α) Die Tangente des Kegelschnitts C^2_0 im Punkte a.

β) Die sechs Verbindungslinien der vier Grundpunkte p_1, p_2, p_3 und p_4.

γ) Die Geraden xy, die durch die zerfallenden drei Kegelschnitte des Büschels bestimmt sind.

Ueberdies können die Schnittpunkte der Ortscurve K^3 mit jeder der Geraden G und H bestimmt werden. Die mit der Geraden G sind die vier

Punkte, in denen die zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Gerade H berühren, die Gerade G schneiden. Für jeden dieser vier Schnittpunkte fallen nämlich zwei Geraden xy auf einander und die Tangenten in diesen Punkten an K^3 schneiden sich also zu zweimal zwei auf G, oder wir finden, dass die Tangenten in diesen Punkten an K^3 paarweise durch die Doppelpunkte der Involution auf H gehen, die auf H durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte C^2 bestimmt ist. Gleiches gilt auch für die Gerade H.

3. Irgend zwei Kegelschnitte C^2 bestimmen im Ganzen acht Geraden xy, welche mit den Geraden G und H zusammen zehn Tangenten der Curve K^3 sind und wir schliessen daraus, das wir dieselbe Curve K^3 erhalten, wenn wir durch die vier Punkte $2x$ und $2y$ auf dem ersten Kegelschnitt C^2 einen beliebigen Kegelschnitt M^2_1 und ebenso durch die vier Punkte $2x$ und $2y$ auf dem zweiten Kegelschnitt einen beliebigen Kegelschnitt M^2_2 legen und an Stelle des Kegelschnittbüschels $B(C^2)$ das durch die Kegelschnitte M^2_1 und M^2_2 bestimmte Büschel setzen. Die Curve K^3 ist also nichts Anderes, als die Einhüllende der zerfallenden Kegelschnitte des Netzes, das durch zwei Kegelschnitte C^2 und die Geraden G und H, zusammen als Kegelschnitt angesehen, bestimmt ist; K^3 ist also die Cayley'sche Curve dieses Netzes.

4. Die Kegelschnitte irgend eines Büschels $B(C^2)$ bestimmen auf einem Kegelschnitt N^2, der dem Büschel nicht angehört, Gruppen von vier Punkten z, deren sechs Verbindungslinien die zum Netz, das durch N^2 und das Büschel bestimmt ist, gehörige Curve K^3 umhüllen. Soll die Mitte einer Sehne des Kegelschnitts N^2 auf einer Geraden L gelegen sein, so ist aber der Ort dieser Sehne eine Parabel P^2. Diese hat mit der Ortscurve K^3 im Allgemeinen sechs Tangenten gemein und auf einer beliebigen Geraden L liegen also im Allgemeinen die Mitten von sechs Sehnen, die N^2 mit Kegelschnitten des Büschels gemein hat, oder:

Der Ort der Mitten aller Sehnen, welche die Kegelschnitte des Büschels $B(C^2)$ mit irgend einem Kegelschnitt N^2 gemein haben, ist eine Curve des sechsten Grades S^6.

Die Tangenten der Curve K^3 sind zu drei und drei parallel und es liegen also die Mitten von je drei parallelen Sehnen auf einem Durchmesser von N^2. Da durch den Mittelpunkt von N^2 ebenfalls drei Tangenten von K^3 gehen, so ist dieser dreifacher Punkt des Ortes S^6. Für jede Sehne parallel einer Asymptote von S^2 fällt die Mitte auf die unendlich ferne Gerade G_∞, das heisst, die Curve S^6 hat in den unendlich fernen Punkten des Kegelschnittes N^2 mit diesem drei Punkte gemein. In den weiteren sechs gemeinsamen Punkten von S^6 und N^2 wird N^2 von je einem Kegelschnitt C^2 berührt und es giebt also auch im Allgemeinen immer sechs Kegelschnitte eines Büschels, die einen dem Büschel nicht angehörigen Kegelschnitt C^2 berühren. Von der Curve S^6 lassen sich weiter noch die 18 Punkte bestimmen, die Mitten solcher Sehnen von N^2 mit je einem der

zerfallenden Kegelschnitte des Büschels sind. Tritt an Stelle des Kegelschnitts N^2 ein Geradenpaar, so berührt die obengenannte Parabel P^2 die Geraden und P^2 und K^3 haben ausser diesen nur noch vier weitere Tangenten gemein, das heisst, S^6 zerfällt in diese Geraden und eine Curve des vierten Grades S^4.

5. Ist das Büschel Kegelschnitte $B(C^2)$ ein Büschel doppelt berührender Kegelschnitte, so erleiden die Curven K^3 und S^6 folgende Aenderungen:

α) Die Curve K^3 hat die gemeinsame Berührungssehne R zur Doppeltangente, und berührt ausserdem die gemeinsamen Tangenten in den Berührungspunkten. Durch irgend vier Punkte $2x$ und $2y$ auf den Geraden G und H ist dann allemal ein neues Büschel von Kegelschnitten $B(C^2_1)$ bestimmt und jeder dieser Kegelschnitte C^2_1 bestimmt auf der Geraden R zwei Punkte, die die gemeinschaftlichen Berührungspunkte eines Büschels doppelt berührender Kegelschnitte des Netzes sind, und die Ortscurve K^3 kann jetzt durch die Tangenten erzeugt werden, die man an die einzelnen Kegelschnitte C^2_1 in ihren Schnitten mit R ziehen kann. Die Curve K^3 ist also dann die besondere Curve, die wir bereits früher (siehe diese Zeitschrift Bd. 38 S. 34—47) eingehender untersucht haben.

β) Ist insbesondere die Berührungssehne R die unendlich ferne Gerade G_∞, die Gerade G_∞ also der Ort aller Asymptoten eines Büschels $B(C^2_1)$, so berührt die Curve K^3 die Gerade G_∞ in zwei Punkten. Zudem hat sie auch die beiden Asymptoten irgend eines Kegelschnitts N^2 des Netzes zu Tangenten. Ihre gemeinschaftlichen sechs Tangenten mit der Parabel P^2 (siehe 4) bestehen also aus der doppelt zu zählenden Geraden G_∞ und den beiden Asymptoten des Kegelschnitts N^2 und zwei weiteren Tangenten. Die zu dem Kegelschnitt N^2 des Netzes gehörige Curve S^6 zerfällt also in die doppelt zu zählende Gerade G_∞, die beiden Asymptoten von N^2 und eine Curve S^2, das heisst, wir haben:

Das Büschel Kegelschnitte $B(C^2_1)$, das durch zwei Geraden als Asymptoten bestimmt ist, hat mit einem festen Kegelschnitt Sehnen gemein, deren Mitten auf einem Kegelschnitt S^2 gelegen sind.

Irgend ein Kegelschnitt dieses Büschels bestimmt auf dem Kegelschnitt N^2 vier Punkte q und die drei Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des vollständigen Vierecks dieser Punkte q schneiden sich dann allemal in einem Punkt S und halbiren sich in diesem Punkt, und zwar ist der Punkt S der Schwerpunkt der Punkte q. Diese drei Verbindungslinien sind aber zugleich Sehnen des Kegelschnitts S^2 und der Punkt S muss nothwendig Mittelpunkt dieses Kegelschnitts sein, oder:

Jeder Kegelschnitt C^2_1 des Büschels $B(C^2_1)$, das durch zwei Geraden als gemeinsame Asymptoten bestimmt ist, bestimmt auf einem Kegelschnitt N^2 vier Punkte, die einen unveränderlichen Punkt S zum Schwerpunkt haben.

Sind also irgend zwei Kegelschnitte N^2 und C^2 gegeben und halten wir den einen dieser Kegelschnitte, etwa N^2 fest, und lassen den andern sich ändern, doch so, dass er seine Asymptoten beibehält, so bestimmt er auf N^2 immer vier Punkte q, die denselben Punkt S zum Schwerpunkt haben. Halten wir ebenso den Kegelschnitt C^2 fest und lassen gleicherweise den Kegelschnitt N^2 sich ändern, so dass die Asymptoten dieses Kegelschnitts dieselben bleiben, so folgt, dass auch jetzt die vier gemeinschaftlichen Punkte des Kegelschnitts N^2 mit dem Kegelschnitt C^2 dieselben bleiben, oder, dass wir jeden der Kegelschnitte N^2 und C^2 durch einen anderen ersetzen dürfen, der jedoch mit N^2 resp. C^2 die Asymptoten gemein hat. Solche Kegelschnitte sind aber auch die Asymptotenpaare von N^2 und C^2 selbst; das heisst, wir finden:

Der Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte fällt mit dem Schwerpunkt der vier Punkte zusammen, welche die Asymptoten des einen Kegelschnitts auf den Asymptoten des anderen bestimmen.

Da weiter concentrische Kreise ebenfalls ein Büschel von Kegelschnitten sind, die auf der unendlich fernen Geraden G_∞ sich doppelt berühren, so folgt daraus noch:

Beschreibt man um einen festen Punkt als Mittelpunkt beliebige Kreise, so haben die vier Punkte, die jeder dieser Kreise mit einem Kegelschnitt gemein hat, einen festen Punkt zum Schwerpunkt.

Der Kegelschnitt S^2 wird für diesen Fall zur gleichseitigen Hyperbel, die auch durch die Fusspunkte der vier vom Kreismittelpunkt auf den Kegelschnitt gefällten Lothe, den Kreismittelpunkt, den Mittelpunkt des Kegelschnitts und durch die unendlich fernen Punkte der Achsen des letzteren geht.

II.

1. Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte a, b, c gehen und gegebene Achsenrichtungen haben, so geht er stets noch durch einen Punkt δ auf dem Umkreis des Dreiecks abc; alle Kegelschnitte, welche den gegebenen Bedingungen gehorchen, bilden also ein Büschel $B(C^2)$ von Kegelschnitten und der Ort der Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte ist eine gleichseitige Hyperbel H^2, deren Asymptoten den gegebenen Achsenrichtungen parallel sind.* Diese Hyperbel H^2 geht durch die Mitten der Seiten des Dreiecks abc und den Mittelpunkt des Umkreises

* Es folgt dies aus dem Umstand, dass die Seiten eines Kreisvierecks, das einem Kegelschnitt einbeschrieben ist, gegen die Achsen desselben gleich geneigt sind; der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels durch die vier Ecken des Kreisvierecks ist dann nach einem bekannten Satz eine gleichseitige Hyperbel, die durch den Mittelpunkt des Kreises als eines Kegelschnitts des Büschels geht.

des Dreiecks *abc*. Geben wir also den Achsen aller Kegelschnitte durch die Punkte *abc* nach und nach alle Richtungen, so gehört zu jeder Richtung eine Hyperbel H^2 und alle diese Hyperbeln H^2 bilden ein Büschel $B(H^2)$ von gleichseitigen Hyperbeln durch vier Punkte. Unter allen diesen Kegelschnitten sind aber auch Parabeln mit inbegriffen und zwar sind die Achsen dieser Parabeln die Asymptoten dieser Hyperbeln H^2. Diese Achsen umhüllen also eine Curve der dritten Klasse mit G_∞ als Doppeltangente, oder wir finden:

Der Ort der Achsen aller Parabeln, die durch drei Punkte gehen, ist eine Curve der dritten Klasse P^3 mit G_∞ als Doppeltangente.

2. Jede der Hyperbeln H^2 bestimmt auf einer festen Geraden G zwei Punkte x; ziehen wir durch diese Punkte x Parallelen zu den Asymptoten der Hyperbel, so erhalten wir (nach I., 1) als Ort dieser Parallelen eine Curve der dritten Klasse mit G und der Geraden G_∞ als einfachen Tangenten, indem die Gerade G_∞ an Stelle der Geraden H getreten ist, oder:

Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte gehen und seinen Mittelpunkt auf einer Geraden G haben, so ist der Ort der Achsen aller dieser Kegelschnitte eine Curve der dritten Klasse $K^3{}_1$ mit der Geraden G und der unendlich fernen Geraden als einfachen Tangenten, und die vier Asymptoten dieser Curven schneiden sich zweimal zu zweien rechtwinklig auf der Geraden G in den Doppelpunkten der Involution, die durch die gleichseitigen Hyperbeln durch die drei Punkte auf der Geraden G bestimmt ist. Die Berührungspunkte der Curve $K^3{}_1$ mit den Geraden G und G_∞ sind durch die Hyperbel bestimmt, die durch den Schnittpunkt der beiden Geraden G und G_∞ geht, das heisst, die Gerade G wird von $K^3{}_1$ in der Mitte zwischen den Doppelpunkten obiger Involution und die Gerade G_∞ in einem Punkte berührt, dessen Richtung senkrecht zur Richtung der Geraden G ist.

Und hieraus:

Soll ein Kegelschnitt durch drei Punkte *abc* und eine seiner Achsen durch einen festen Punkt p gehen, so ist der Ort seines Mittelpunktes eine Curve des dritten Grades P^3 mit p als Doppelpunkt.

Durch jeden Punkt p gehen nämlich drei Tangenten des Ortes $K^3{}_1$, oder auf G liegen drei Punkte, die Mittelpunkte von Kegelschnitten sind, von denen eine Achse durch p geht. Auf jeder Geraden durch p liegt ferner nur noch ein Punkt von $P^3{}_1$, indem jede solche Gerade Achse eines einzigen Kegelschnitts durch *abc* ist, der Punkt p ist also Doppelpunkt von $P^3{}_1$ und zwar wird er zu einem solchen für den Kegelschnitt durch *abc*, der p zum Mittelpunkt hat, und die Achsen dieses Kegel-

schnitts sind Tangenten an P^3_1, und die Tangenten an P^3_1 im Doppelpunkt stehen also senkrecht auf einander.

3. Von den Ortscurven P^3, K^3_1 und P^3_1 lassen sich eine Reihe von Tangenten resp. Punkte angeben oder doch leicht bestimmen, so:

α) Die Curve P^3 berührt die Verbindungslinien der Mitten der Seiten des Dreiecks abc, in dem jede dieser Geraden als Achse einer Parabel durch abc angesehen werden kann, die aus zwei parallelen Geraden besteht; ebenso berührt die Curve P^3 die Halbirungslothe der Seiten des Dreiecks abc und zwar ist jede dieser Gerade Achse einer eigentlichen Parabel durch abc. Die gleichseitigen Hyperbeln H^2 bestimmen weiter auf G_∞ eine Rechtwinkel-Involution und die Curve P^3 berührt G_∞ in den Doppelpunkten dieser Involution, also in den unendlich fernen Kreispunkten auf G_∞. Die Mittelpunkte aller Hyperbeln H^2 liegen auf dem Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks abc und Tangentenpaare von P^3, die aufeinander senkrecht stehen, schneiden sich also auf diesem Kreise.

β) Die Curve K^3_1 berührt ausser den drei Verbindungslinien der Mitten der Seiten Dreiecks abc und den drei Halbirungslothen der Seiten dieses Dreiecks noch die auf diesen sechs Geraden in ihren Schnitten mit G errichteten Lothe, indem jedes dieser sechs Geradenpaare, die ihren Schnitt auf G haben, die Achsen eines zerfallenden resp. eigentlich Kegelschnitts durch abc sind.

γ) Die Curve P^3_1 geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck abc umschriebenen Kreises, die Mitten der Seiten des Dreiecks abc, die Punkte, in welchen die Parallelen durch p zu den Seiten des Dreiecks die Halbirungslothe zu diesen Seiten treffen, durch die Fusspunkte der Lothe von p auf die Verbindungslinien der Seitenmitten des Dreiecks abc und die zwei Punkte auf jeder Seite von abc, in welchen die Tangenten von den Gegenecken an den Kreis die Seite treffen, der p zum Mittelpunkt hat und die Seite berührt. Alle diese Punkte sind nämlich Mittelpunkte einzelner Kegelschnitte durch abc, von denen eine Achse durch p geht.

Wählen wir für den Punkt p eine besondere Lage in Bezug auf das Dreieck abc, so zerfällt die Curve P^3_1 und wir erhalten z. B.:

Auf der Verbindungslinie $a_1 c_1$ zweier Seitenmitten des Dreiecks abc (a_1 auf bc etc.) sei ein Punkt p angenommen; von p werde auf die Geraden, welche a_1 und c_1 mit der Mitte b_1 von ac verbinden, die Lothe $p\alpha$ und $p\beta$ gefällt, ebenso auf die Halbirungslothe $c_1 m$ und $a_1 m$ von ab und bc die Lothe $p\delta$ und $p\gamma$; um p werden weiter die Kreise K_a, K_b, K_c beschrieben, welche die Seiten des Dreiecks abc berühren (K_a die Seite bc u. s. f.) und die p zum Mittelpunkt haben; von a werden an K_a die beiden Tangenten gezogen, welche bc in a_2 und a_3 schneiden, und ebenso von c an den Kreis K_c die beiden Tangenten, die auf ab die Punkte c_2 und c_3 bestimmen und endlich von b

aus an den Kreis K_b die Tangente, die zu ac nicht parallel ist, und die auf ac den Punkt b_2 bestimmt. Es liegen dann allemal die Punkte p, α, β, γ, δ, der Mittelpunkt m des Umkreises des Dreiecks abc, der Halbirungspunkt b_1 von ac, die Punkte a_2, a_3, b_2, c_3 mit c_3 auf einem Kegelschnitt, der die Gerade a_1c_1 in p senkrecht durchschneidet.

Und:

Auf dem Halbirungslothe a_1m der Seite bc eines beliebigen Dreiecks abc sei ein beliebiger Punkt p angenommen und um denselben seien als Mittelpunkt die Kreise K_a, K_b, K_c beschrieben, die die Seiten des Dreiecks abc berühren. Von dem Punkte a seien an K_a die Tangenten gezogen, welche auf bc die Punkte a_2 und a_3 bestimmen, von b ebenso an Kreis K_b die Tangente gelegt, die (im Allgemeinen) mit bc und ac kein gleichschenkliges Dreieck bildet und die ac in b_2 trifft, und endlich sei von c auch an K_c die Tangente gezogen, die mit bc und ac kein gleichschenkliges Dreieck bildet und die ab in c_2 trifft; auf die Halbirungslothe b_1m und c_1m der Dreiecksseiten ac und ab und die Verbindungslinien der Seitenmitten a_1 von bc mit den Seitenmitten von ab und ac seien von p die Lothe $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$ und $p\delta$ gefällt. Es liegen dann immer die Punkte p, α, β, γ, δ, a_2, a_3, b_2 und c_2, die Mitten b_1 und c_1 von ac und ab auf einem Kegelschnitt, der das Mittelloth von bc in p senkrecht durchschneidet.

4. Sind ferner irgend vier Punkte $abc\delta$ gegeben, so können wir aus diesen zwei Gruppen von drei Punkten abc und $ab\delta$ auswählen. Zu jeder dieser Gruppen und einem Punkt p gehört dann eine Ortscurve $P^3{}_1$. Die gemeinsamen Punkte dieser Curven setzen sich dann aus folgenden Punkten zusammen:

α) Dem Punkte p, als Doppelpunkt bei den Curven vierfach zählend.

β) Dem Halbirungspunkt von ab.

γ) Dem Fusspunkt des Lothes von p auf das Halbirungsloth von ab.

δ) Drei weiteren Punkten, welche solchen Kegelschnitten angehören, die durch die vier Punkte $abc\delta$ gehen und von denen eine Achse durch p geht; das heisst wir finden:

Der Ort der Achsen der Kegelschnitte eines Büschels durch vier Punkte ist eine Curve der dritten Klasse A^3.

Unter den Kegelschnitten eines Büschels sind weiter zwei Parabeln. Es folgt daraus:

Die Curve A^3 hat die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente, sie ist also von der vierten Ordnung und unter den Achsen aller dieser Kegelschnitte sind keine zwei parallel.

Die Curve A^3 berührt die Halbirungslothe der Seiten des vollständigen Vierecks der vier Punkte und die drei Geradenpaare, welche die Winkel der Gegenseiten dieses Vierecks halbiren. Sind die Kegelschnitte des Büschels alle gleichseitige Hyperbeln, oder ist jeder der Grundpunkte Höhenschnitt des Dreiecks der andern, so ist die Curve P^3 der Curve A^3 congruent und die drei Rückkehrpunkte beider Curven bilden zwei gleichseitige Dreiecke, die die Mittelpunkte gemein haben, und von denen das eine gegen das andere um 180° gedreht ist.

III.

1. Unter den Curven C^3 eines Büschels von Curven des dritten Grades $B(C^3)$ giebt es im Allgemeinen immer vier solche, die eine Gerade G berühren. Ziehen wir an jede der Curven C^3 in ihren drei Schnittpunkten mit G die Tangenten, so erhalten wir als Ort dieser Tangenten eine Curve der fünften Klasse G^5 mit G als vierfacher Tangente, indem durch jeden Punkt auf G nur eine einzige solche Tangente geht, die von G verschieden ist, diese Tangente aber auch viermal auf G zu liegen kommt. Ist ausserdem noch ein zweites Büschel von Curven des dritten Grades $B(C^3_1)$ gegeben, und ziehen wir auch an die Curven dieses Büschels in ihren Schnitten mit derselben Geraden G die Tangenten, so ist auch der Ort dieser Tangenten eine Curve der fünften Classe mit G als vierfacher Tangente. Beide Curven haben ausser G selbst noch $5.5-4.4=9$ Tangenten gemein, oder:

Soll eine Curve C^3 eines Büschels von Curven durch neun Grundpunkte eine Curve C^3_1 eines zweiten Büschels durch neun andere Grundpunkte berühren, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve des neunten Grades S^9.

Durch jeden Grundpunkt des einen Büschels geht eine Curve des anderen Büschels, und die Curve S^9 geht also namentlich auch durch die Grundpunkte beider Büschel.

2. Haben die beiden Büschel sieben Punkte gemein, so giebt es immer eine Curve C^3, welche beiden Büscheln zugleich angehört. Jeder Punkt dieser gemeinsamen Curve beider Büschel kann aber als ein Punkt angesehen werden, in dem eine Curve des einen Büschels eine Curve des anderen Büschels berührt; das heisst, die Curve S^9 zerfällt in diese gemeinsame Curve C^3 beider Büschel und in eine Curve des sechsten Grades S^6, oder:

Haben zwei Curvenbüschel $B(C^3)$ und $B(C^3_1)$ sieben Punkte gemein, so ist der Ort der Punkte, in denen eine Curve des ersten Büschels eine solche des zweiten Büschels berührt, eine Curve des sechsten Grades S^6.

Irgend ein Punkt dieses Ortes S^6 bildet aber mit den sieben gemeinschaftlichen Grundpunkten der beiden ersten Büschel acht Grundpunkte

eines neuen Büschels und zwar berühren sich in diesem achten Punkte zwei Curven C^3 und C^3_1, die dem neuen Büschel angehören und somit alle Curven dieses Büschels. Unter diesen Curven ist aber auch immer eine solche, die in diesem gemeinsamen Berührungspunkt einen Doppelpunkt hat, das heisst, wir finden:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sieben Punkte gehen und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve des sechsten Grades, nämlich die Curve S^6 (Steiner's G. W. Bd. 2 S. 526)*.

Da jeder der sieben Punkte selbst Doppelpunkt einer Curve C^3 durch diese sieben Punkte sein kann, so folgt daraus noch:

Die Curve S^6 hat die sieben festen Punkte zu Doppelpunkten.

Die Curve S^6 geht ausserdem durch die 42 Punkte, in denen die Verbindungslinien von je zwei Punkten der Kegelschnitte durch die übrigen fünf Punkte treffen, indem jede dieser Geraden mit dem zugehörigen Kegelschnitt als zerfallende Curve des dritten Grades mit zwei Doppelpunkten angesehen werden kann.

3. Sind irgend sechs Punkte p gegeben, so können wir jeden Punkt x der Geraden G als Doppelpunkt einer Curve des dritten Grades ansehen; diese Curve bestimmt dann auf einer zweiten Geraden H drei Punkte y und durch jeden Punkt x auf G gehen also drei Geraden xy. Die Gerade xy fällt aber auch viermal auf die Gerade G selbst, nämlich für die Punkte x_0, in denen die zu den sechs Punkten p und dem Schnittpunkt a von G und H gehörige Ortscurve S^6 die Gerade G ausser in a noch schneidet. Der Ort der Geraden xy ist also eine Curve der siebenten Klasse mit G als vierfacher Tangente. Lassen wir G und H zusammenfallen, so fällt eine der drei Geraden xy auf die Gerade G und die anderen werden zu Tangenten im Doppelpunkt x auf G, und wir erhalten:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs Punkte gehen und auf einer Geraden G einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort der Tangenten in diesem Doppelpunkt eine Curve der siebenten Klasse G^7 mit G als fünffacher Tangente.

Durch jeden Punkt q ausserhalb G gehen also sieben solche Tangenten einzelner der Curven C^3 mit Doppelpunkt durch die sechs Punkte p, die C^3 in einem Doppelpunkt berühren, der auf G liegt, oder:

Soll eine Cure des dritten Grades durch sechs gegebene Punkte p gehen, einen Doppelpunkt haben, und soll die eine

* Ganz ebenso findet man allgemein:
Soll eine Curve des n^{ten} Grades durch $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ Punkte gehen und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort des Doppelpunkts eine Curve des $3(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

der Tangenten in diesem Doppelpunkt durch einen gegebenen Punkt gehen, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve des siebenten Grades Q^7 (Steiner a. a. O.).

Jede Gerade G kann fünfmal zu einer Tangente im Doppelpunkt einer Curve C^3 durch sechs Punkte werden und auf jeder Geraden durch q liegen also ausser q nur noch fünf weitere Punkte des Ortes Q^7, oder q ist selbst Doppelpunkt dieses Ortes. Ziehen wir in q an die Curve C^3 mit Doppelpunkt, welche durch die sechs Punkte p geht und den Punkt q zum Doppelpunkt hat, die Tangenten, so wird jede dieser Tangenten nur noch von vier weiteren Curven C^3 berührt, die auf diesen Tangenten einen Doppelpunkt und die diese Geraden selbst zu Tangenten in diesem Doppelpunkt haben; diese beiden Tangenten sind also auch Tangenten an Q^7 im Doppelpunkt A.

Auch von dieser Curve lassen sich eine Reihe von Punkten leicht angeben; legen wir z. B. durch fünf der sechs Punkte p einen Kegelschnitt, so liegen auf diesem 14 Punkte des Ortes, nämlich die beiden Schnittpunkte der Geraden von q nach dem sechsten Punkt p und die Berührungspunkte der zwei von q an den Kegelschnitt gelegten Tangenten, indem diese ebenfalls als Doppelpunkte von Curven C^3 auftreten, die in diesen Kegelschnitt und eine Gerade von einem dieser Berührungspunkte nach dem letzten Punkt p zerfallen. Ausser diesen vier Punkten und den fünf Punkten p kann auf dem Kegelschnitt kein weiterer Punkt des Ortes Q^7 liegen, das heisst, die Punkte p sind Doppelpunkte des Ortes. Auf jeder Geraden qp liegen ausser dem zweifach zählenden Punkt q und den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt durch die übrigen fünf Punkte p nur noch der sechste Punkt p; dieser ist also dreifach zu zählen, oder die Geraden qp sind ausserdem noch Tangenten in den Doppelpunkten p des Orts Q^7.

4. Zu irgend zwei Punkten q und q_1 gehören in Bezug auf die obigen Curven C^3 (durch dieselben sechs Punkte p) zwei Ortscurven Q^7 und Q^7_1. Die gemeinsamen Punkte dieser Curven setzen sich zusammen aus 24 Punkten, die in die sechs Punkte p, aus fünf, die auf die Gerade qq_1 fallen und aus zwanzig weiteren Punkten, das heisst wir finden:

Soll eine Curve dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte gehen und sollen die Tangenten im Doppelpunkt an C^3 durch zwei feste Punkte q und q_1 gehen, so giebt es im Allgemeinen 20 Lösungen.*

Und:

Soll eine Curve des dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte p gehen und soll die eine Tangente im

* Steiner giebt 25 Lösungen an, indem er wohl die fünf Punkte von Q^7 und Q^7_1 auf qq_1 übersah in Abzug zu bringen.

Doppelpunkt dieser C^3 durch einen festen Punkt q gehen, so ist der Ort der anderen Tangente in diesem Doppelpunkt eine Curve der zwanzigsten Klasse Q^{20}.

Jeder Tangente von q an diese Curve Q^{20} entspricht eine Curve C^3, die anstatt einem Doppelpunkt einen Rückkehrpunkt hat. Unter den zwanzig Tangenten von q an Q^{20} sind aber die zwei mit inbegriffen, die an die C^3 gezogen sind, die q selbst zum Doppelpunkt hat, und wir finden also in Uebereinstimmung mit Steiner:

Soll eine Curve C^3 mit Doppelpunkt durch sechs Punkte p gehen und soll die eine Tangente in diesem Doppelpunkt durch einen festen Punkt q gehen, so sind unter der Schaar von diesen Curven dritten Grades im Allgemeinen 18, die einen Rückkehrpunkt haben; und soll eine C^3 durch sechs Punkte gehen und einen Rückkehrpunkt haben, so ist der Ort der Rückkehrtangente eine Curve der 18. Klasse R^{18}.

5. Wir sahen oben, dass es im Allgemeinen fünf Curven C^3 durch sechs Punkte p giebt, die auf einer Geraden G einen Doppelpunkt und G zu dem zur Tangente in diesem Doppelpunkt haben, und es giebt also auch fünf solche Curven C^3 durch sechs Punkte p, die auf G_∞ einen Doppelpunkt haben und G_∞ zugleich zur Tangente in diesem Doppelpunkt. Jeder dieser fünf Doppelpunkte auf G_∞ kann aber als Mittelpunkt einer C^3 angesehen werden, die durch die p geht, und wir schliessen daraus:

Soll eine Curve C^3 durch sechs Punkte p gehen und einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort dieses Mittelpunkts eine Curve des fünften Grades M^5.

Diese Curve M^5 geht namentlich durch jeden der Punkte p selbst, durch die Mitten der 15 Verbindungslinien von je zwei dieser Punkte, durch die Mittelpunkte der 30 Kegelschnitte, die durch vier Punkte p gehen und ihren Mittelpunkt auf der Verbindungslinie der letzten zwei Punkte p haben, und durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte durch je fünf der Punkte p.

6. Die in 3. gefundene Ortscurve G^7 hat mit der Geraden G ausser den fünf Berührungspunkten zwölf weitere Punkte gemein, indem ihr Grad gleich $6 . 7 - 5 . 4 = 22$ ist. Jedem dieser zwölf Punkte entspricht aber eine Curve C^3, die auf G einen Rückkehrpunkt hat, oder:

Soll eine Curve des dritten Grades durch sechs Punkte p gehen und einen Rückkehrpunkt haben, so ist der Ort dieses Rückkehrpunkts eine Curve des zwölften Grades, R^{12} (Steiner a. a. O. S. 526, findet eine Curve R^6).

Die Curve R^6 hat die Punkte p zu vierfachen Punkten und geht ausserdem durch die 30 Punkte, in denen die Verbindungslinie von je zweien von

einem Kegelschnitt durch die übrigen vier berührt wird, sowie durch die zwölf Berührungspunkte der Tangenten von jedem Punkt p an den Kegelschnitt durch die anderen fünf Punkte p, indem alle diese Punkte (ausser den Punkten p selbst), Rückkehrpunkte einzelner (zerfallender) Curven C^3 durch die sechs Punkte p sind.

7. Die oben (in 2.) entwickelte Ortscurve S^6 zerfällt für besondere Lagen der gegebenen sieben Punkte p. Sind insbesondere drei der sieben Punkte in einer Geraden gelegen, so kann jeder Punkt dieser Geraden als Doppelpunkt einer zerfallenden Curve C^3 angesehen werden oder diese Gerade ist ein Theil der Curve S^6. Sind also sechs der gegebenen Punkte p die Schnitte von je zweien von vier Geraden, oder sind sechs Punkte p die Ecken eines vollständigen Vierseits, so enthält die Ortscurve S^6 die Seiten dieses Vierseits, zerfällt also in diese vier Seiten und in eine Curve des zweiten Grades. Die letztere muss also den siebenten Punkt p zum Doppelpunkt haben, zerfällt also selbst wieder in zwei Geraden L und L_1, die zu dem in dem siebenten Punkte p Tangenten an eine solche C^3 durch die sechs Ecken des Vierseits sind, die den siebenten Punkt p zum Doppelpunkt hat, oder:

Soll eine Curve des dritten Grades C^3 mit Doppelpunkt durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits und einen siebenten beliebigen Punkt p_7 gehen, so ist der Ort des Doppelpunkts aus den Geraden L und L_1 zusammengesetzt, die Tangenten in p_7 an die besondere der Curven C^3 in p_7 sind, die p_7 zum Doppelpunkt hat.

Wir sahen weiter, dass auf der Curve S^6 die Punkte liegen, in denen ein Kegelschnitt durch fünf der gegebenen Punkte die Verbindungslinie der letzten zwei Punkte p schneidet, oder wir finden:

Legen wir durch je zwei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits und einen beliebigen Punkt p Kegelschnitte, so schneidet jeder dieser Kegelschnitte die Verbindungslinie des dritten Paares von Gegenecken des Vierseits in zwei Punkten a und die so erhaltenen sechs Punkte a liegen dann allemal auf zwei durch den Punkt p gehenden Geraden, nämlich den Geraden L und L_1.

8. Auch die Curve M^5 kann in Curven niedrigeren Grades zerfallen; liegen z. B. irgend drei der gegebenen Punkte p auf einer Geraden, so hat diese Gerade nach Obigem mit M^5 mehr als fünf Punkte gemein, ist also ein Theil von M^5 und dieser Ort besteht somit aus dieser Geraden und einer Curve des vierten Grades M^4. Sind die sechs Punkte p z. B. zu je drei auf drei Geraden gelegen, so folgt daraus:

Werden auf den Seiten p_1p_2, p_1p_3 und p_2p_3 eines Dreiecks $p_1p_2p_3$ drei beliebige Punkte p_6, p_5 und p_4 angenommen und sind

q_3, q_2 und q_1 die Mitten der Seiten des Dreiecks $p_1p_2p_3$, so liegen allemal die Mitten der Seiten des Dreiecks $p_4p_5p_6$, die Mitten von p_1p_4, p_2p_5, p_3p_6 und die Schnittpunkte von q_1q_2 mit p_4p_5, q_1q_3 mit p_4p_6 und q_2q_3 mit p_5p_6 auf einem Kegelschnitt H^2 und dieser ist der Ort der Mittelpunkte aller Curven des dritten Grades mit Mittelpunkt durch die sechs Punkte p.

Schneiden sich die Geraden p_1p_4, p_2p_5 und p_3p_6 in einem Punkt, so geht der Kegelschnitt H^2 auch durch diesen Punkt.

Liegen die sechs Punkte p auf vier Geraden, oder sind dieselben die Ecken eines vollständigen Vierseits, so zerfällt M^5 in die Seiten dieses Vierseits und in eine Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht. Da diese Gerade zugleich der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte ist, die dem Vierseit einbeschrieben sind, so folgt daraus noch:

Soll eine Curve des dritten Grades durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und einen Mittelpunkt haben, so ist der Ort des Mittelpunktes diejenige Gerade, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des Vierseits geht und jede dieser Curven hat also auch mit einem Kegelschnitt, der die Seiten des Vierseits berührt, den Mittelpunkt gemein.

IV.

1. Durch jeden Punkt x gehen im Allgemeinen zwei Kegelschnitte eines Systems $S(C^2)$ von Kegelschnitten, die vier Gerade berühren. Lassen wir den Punkt x sich auf einer Geraden G bewegen und ziehen wir in x an jeden durch x gehenden Kegelschnitt C^2 die Tangenten, so ist der Ort dieser Tangenten eine Curve der dritten Klasse G^3_1, indem durch jeden Punkt auf G zwei der obigen Tangenten gehen, diese aber auch einmal mit G zusammenfällt und zwar für den Punkt, in dem G von einem Kegelschnitt C^2 berührt wird. Zudem berührt die Ortscurve die vier Tangenten der Schaar und zwar in ihren Schnitten mit G und ebenso die drei Diagonalen des Vierseits der Schaar. Durch jeden Punkt ausserhalb G gehen also auch drei Tangenten an einzelne C^2, die ihren Berührungspunkt auf G haben. Wir folgern daraus:

Ziehen wir an alle C^2 der Schaar von einem Punkt p_0 die Tangenten, so ist der Ort des Berührungspunktes eine Curve des dritten Grades P^3.

Durch p_0 selbst gehen zwei Kegelschnitte C^2, das heisst, P^3 hat den Punkt p_0 zum Doppelpunkt und zwar sind die beiden Tangenten in p_0 an diese Kegelschnitte auch Tangenten im Doppelpunkt von P^3, indem auf jeder dieser kein weiterer Punkt des Ortes liegen kann. Die Curve P^3

geht ferner auch durch die sechs Ecken des Vierseits, das heisst wir finden:

Die Geraden L und L_1 (vergl. III.) sind Tangenten in p_0 an die zwei Kegelschnitte, die dem Vierseit einbeschrieben sind und die durch p_0 gehen.

Und hieraus wieder:

a) Soll eine Curve des dritten Grades durch die Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und auf einer Geraden G einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort der Tangenten ein Doppelpunkt an diese Curve die obige Curve $G^3{}_1$; soll dagegen die Tangente im Doppelpunkt durch einen festen Punkt p_0 gehen, so ist der Ort des Doppelpunkts die Curve des dritten Grades, die durch die sechs Ecken des Vierseits geht und p_0 zum Doppelpunkt hat.

Und:

b) Geht eine Curve des dritten Grades mit Doppelpunkt durch die Ecken eines vollständigen Vierseits und durch einen siebenten Punkt p_0, so ist der Ort der Tangenten im Doppelpunkt aus zwei Curven der dritten Klasse zusammengesetzt, nämlich aus den Curven $G^3{}_1$, die zu L und L_1 gehören.

Ziehen wir von p_0 an alle Kegelschnitte der Schaar die Tangenten, so bilden diese ein involutorisches Büschel mit den Geraden L und L_1. Irgend ein solches Tangentenpaar bildet mit einer Seite s_1 des Vierseits ein Dreieck, das einem Kegelschnitt umschrieben ist. Da aber auch das Dreieck aus den übrigen Seiten s_2, s_3, s_4 des Vierseits demselben Kegelschnitt umschrieben ist, so geht durch die sechs Ecken beider Dreiecke stets ein Kegelschnitt. Alle auf diese Art erhaltenen Kegelschnitte haben aber vier Punkte, den Punkt p_0 und die drei Ecken des zweiten Dreiecks aus s_2, s_3, s_4, gemein, bilden also ein Büschel von Kegelschnitten.

Diese Kegelschnitte bestimmen aber auf der ersten Seite s_1 eine Involution von Punkten, die von p_0 durch das obige Strahlenbüschel projicirt werden. Die Doppelpunkte dieser Involution sind aber die Punkte, in denen s_1 von Kegelschnitten des Büschels berührt wird, oder:

Legen wir durch einen Punkt p_0 und die Ecken jeden Dreiecks, das drei der vier Seiten eines Vierseits bilden, die zwei Kegelschnitte, welche die vierte Seite berühren, so liegen die so erhaltenen acht Berührungspunkte auf zwei Geraden, nämlich auf den Geraden L und L_1.

V.

1. Kehren wir wieder zu der in I. erhaltenen Curve K^3 zurück und halten wir eine der Geraden, etwa G, und irgend einen Punkt q fest, so

finden wir, da für jede beliebige Gerade H durch den Punkt q drei Tangenten der zu G und H gehörigen Curve K^3 gehen, und wir erhalten:

Verbinden wir die Schnittpunkte eines veränderlichen Kegelschnitts C^2 durch vier Grundpunkte p und einer festen Geraden G mit einem Punkte q, so ist der Ort der zweiten Schnitte r dieser Verbindungslinien mit dem zugehörigen Kegelschnitte C^2 eine Curve des dritten Grades Q^3.

Der Punkt r fällt auch in den Punkt q und zwar für die zwei Schnittpunkte des Kegelschnitts C^2 durch q mit der Geraden G; der Punkt q ist also Doppelpunkt der Curve Q^3. Ausserdem geht die Ortscurve durch die vier Grundpunkte p und die sechs Punkte auf den Verbindungslinien der vier Punkte p, die sich aus den drei zerfallenden Kegelschnitten C^2 ableiten lassen. Die Verbindungslinie der zwei Punkte r geht weiter — nach einem bekannten Satz über die Curven dritten Grades — durch einen festen Punkt s auf der Curve Q^3.

2. Geht eine beliebige Curve des dritten Grades durch sechs Punkte ($4p$ und $2r$) und hat in einem siebenten Punkte q einen Doppelpunkt, so kann aus dem Obigen folgende Construction der Tangenten im Doppelpunkte abgeleitet werden.

Durch vier der gegebenen Punkte und je einen der übrigen zwei (durch die $4p$ und je einen r) legen wir einen Kegelschnitt und verbinden jeden der letzten zwei Punkte (r) mit dem Doppelpunkt q, so schneidet jede dieser Verbindungslinien den zugehörigen Kegelschnitt nochmals in einem zweiten Punkt, wodurch wir zwei neue Punkte (x und x_1) erhalten. Die Verbindungslinie dieser letzten Punkte (xx_1) ist die oben auftretende Gerade G. Der Kegelschnitt durch die vier gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kegelschnitte und den Punkt q schneidet dann die Verbindungslinie (xx_1) in zwei Punkten, die auf den Tangenten der Curve dritten Grades im Doppelpunkt liegen. Die Construction der Curve selbst ist damit ebenfalls gegeben.

3. Es ist nur eine Folgerung aus Obigem, wenn wir sagen:

Soll eine Curve C^3 durch die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits gehen und einen siebenten Punkt p_0 zum Doppelpunkte haben, so liegen auch die Projectionen der drei Diagonalschnitte von p_0 auf die Gegenseiten des Dreiecks der drei Diagonalen auf der Curve C^3.

Es ist hierbei eine Diagonale zur Geraden G und der Punkte p_0 zum Punkt q gewählt worden.

4. Aus den hier allgemein entwickelten Eigenschaften können wir folgende Sätze als specielle Fälle ableiten:

a) Projicirt man jeden Schnittpunkt der sechs Seiten eines vollständigen Vierecks mit einer Geraden G von einem Punkt q auf die Gegenseite des Vierecks, so liegen die sechs Pro-

jectionen mit den vier Ecken des Vierecks auf einer Curve des dritten Grades mit dem Punkte q als Doppelpunkt, und ist umgekehrt irgend einer Curve des dritten Grades mit Doppelpunkt irgend ein Viereck einbeschrieben, so liegen allemal die Projectionen der weiteren Schnitte der Vierecksseiten mit der Curve vom Doppelpunkte auf die Gegenseiten des Vierecks in einer Geraden. Die Verbindungslinien der ersteren Projectionen von q auf den Gegenseitenpaaren schneiden sich zudem in einem Punkte, der gleichfalls auf der Curve liegt.

Liegt der Punkt q auf einer Seite ab des Vierecks $abcd$, so zerfällt die Curve dritten Grades in eine Curve des zweiten Grades und die Seite ab des Vierecks und es folgt daraus:

b) Projicirt man von einem beliebigen Punkt q auf eine Seite eines Vierecks die Schnitte der übrigen fünf Seiten desselben mit einer Geraden auf die Gegenseiten des Vierecks, so liegen die fünf Projectionen mit den beiden Ecken des Vierecks, die mit dem angenommenen Punkt nicht in einer Geraden liegen, auf einem Kegelschnitt und die Verbindungslinien der zwei Paare der fünf Projectionen, die auf Paaren von Gegenseiten liegen, schneiden sich allemal auf der angenommenen Seite des Vierecks. Der Kegelschnitt berührt ausserdem die Gerade, welche q mit dem Schnittpunkt der Gegenseite der angenommenen Seite mit der Geraden verbindet und zwar in q.

Hierbei ist q als eine der obigen fünf Projectionen angesehen.

Ist der Punkt q der Schnittpunkt zweier Gegenseiten ab und cd des Vierecks, so zerfällt die Curve dritten Grades in drei Geraden und man erhält:

c) Projicirt man von dem Schnittpunkt q zweier Gegenseiten eines Vierecks die vier Schnitte der übrigen vier Vierecksseiten mit einer Geraden G auf die Gegenseiten, so liegen die vier Projectionen auf einer Geraden H, welche ausserdem durch den Schnittpunkt der Geraden G mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare des Vierecks, die nicht durch q gehen, geht.

5. Geht eine Curve des dritten Grades durch fünf Punkte p und hat dieselbe einen sechsten Punkt q zum Doppelpunkt, so können wir durch die fünf Punkte p einen Kegelschnitt C^2 legen und ebenso durch vier Punkte p und den Punkt q einen zweiten Kegelschnitt D^2; schneidet die Verbindungslinie von q mit dem fünften Punkt p, der nicht auf D^2 liegt, in einem Punkt r, so bestimmt eine beliebige durch r gehende Gerade (als Gerade G) auf D^2 zwei Punkte y und y_1, so dass qy und qy_1 Tangenten

im Doppelpunkt an eine der möglichen Curven C^3 sind. Da unter den Geradenpaaren qy und qy_1 auch zwei solche sind, die zusammenfallen, so finden wir:

Durch fünf Punkte p gehen unendlich viele Curven C^3, die einen sechsten Punkt q zum Doppelpunkt haben und die Tangentenpaare an diesem Doppelpunkt an alle Curven C^3 bilden eine Involution und unter den Curven sind auch immer zwei, die den Punkt q zum Rückkehrpunkt haben.

VI.

1. Sind irgend zwei Büschel von Kegelschnitten $B(C^2)$ und $B(D^2)$ gegeben, die auf einer Geraden G dieselbe Involution von Punkten bestimmen, giebt es also unter den Kegelschnitten C^2 und D^2 dieser Büschel unendlich viele solche, die die Gerade G zur Sehne haben, so erhalten wir für die letzten zwei Schnittpunkte x und x_1 zweier Kegelschnitte C^2 und D^2, die auf G dieselben Punkte bestimmen, einen Ort, den wir wie folgt ableiten können: Zu jedem der Büschel gehört in Bezug auf die Gerade G und eine zweite Gerade H (nach I.) eine Curve K^3. Diese beiden Curven K^3 haben die Geraden G und H zu Tangenten und zwar berühren sie die Gerade G in demselben Punkte, in dem die beiden Kegelschnitte beider Büschel durch den Schnittpunkt a von H und G auf G noch denselben zweiten Punkt bestimmen. Die Gerade G ist also zweifach als gemeinsame Tangente und die Gerade H einfach als solche zu rechnen. Die übrigen sechs gemeinsamen Tangenten ordnen sich zu drei Paaren von Geraden, die von gemeinsamen Punkten von Kegelschnitten C^2 und D^2 auf nach den gemeinschaftlichen Punkten dieser Kegelschnitte auf G gehen. Der Ort der letzten Punkte x und x_1 der Kegelschnitte C^2 und D^2 ist also eine Curve des dritten Grades X^3. Diese Curve geht ferner durch die Grundpunkte beider Büschel und die Gerade xx_1 dreht sich — nach einem bekannten Satz über die Curven dritten Grades — um einen festen Punkt auf X^3; das heisst wir erhalten:

Bestimmen die Kegelschnitte zweier Büschel auf einer Geraden G dieselbe Involution von Punkten, so ist der Ort der letzten gemeinsamen Punkte x und x_1 zweier Kegelschnitte der Büschel, die auf G dieselben Punkte bestimmen, eine Curve des dritten Grades, X^3, die durch die Grundpunkte beider Büschel geht und die Verbindungslinie xx_1 dreht sich um einen festen Punkt dieses Ortes.

2. Insbesondere folgt daraus:

Sind $abcd$ und $a_1b_1c_1d_1$ zwei Vierecke, deren Seiten sich paarweise auf einer Geraden G schneiden, so liegen die Schnittpunkte:

x von ab mit c_1d_1, x_1 von a_1b_1 mit cd,
y „ ac „ b_1d_1, y_1 „ a_1c_1 „ bd,
z „ ad „ b_1c_1, z_1 „ a_1d_1 „ bc

mit den Ecken der beiden Vierecke auf derselben Curve dritten Grades und die Geraden xx_1, yy_1 und zz_1 schneiden sich in einem Punkte dieser Curve.

Und:

Haben zwei Vierecke $abcd$, $a_1b_1c_1d_1$ zwei Seiten, etwa ad und a_1d_1 auf einer Geraden liegend, so liegen die übrigen Ecken b, c, b_1 und d_1 mit den Schnitten x und x_1 von ab mit c_1d_1, a_1b_1 mit cd, y und y_1 von ac und b_1d_1, a_1c_1 und bd auf einem Kegelschnitt und xx_1 und yy_1 schneiden sich auf ad.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ein neuer Satz über die Determinanten einer Matrix.

Es sei gegeben eine Matrix

$$1)\qquad M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (n > m).$$

Unter $|i_1, i_2 \dots i_m|$ werde, wenn die i irgend welche Indices aus der Reihe $1 \dots n$ sind, die aus den Colonnen $i_1, i_2 \dots i_m$ gebildete Determinante m^{ten} Grades verstanden. Wir wollen nun voraussetzen, dass von allen $\binom{n}{m}$ Determinanten m^{ten} Grades $n - m + 1$ verschwinden, so zwar, dass, wenn wir dieselben in der oben angegebenen Bezeichnung schreiben und etwa

$$2)\qquad \begin{cases} |i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}| = 0 \\ |i_{21}, i_{22} \dots i_{2m}| = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |i_{s1}, i_{s2} \dots i_{sm}| = 0 \end{cases}$$

haben, wo s zur Abkürzung für $n - m + 1$ gesetzt ist, sich eine solche Anordnung treffen lässt, dass von den Indices jeder Zeile in 2) gerade $m - 1$ in den vorhergehenden Zeilen schon vorkommen. Wir wollen annehmen, dass in dem obigen Schema diese Anordnung bereits getroffen ist und ferner, dass die neu hinzutretenden Indices in jeder Zeile an erster Stelle stehen. Man sieht, dass alsdann in der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe von 2) alle n Indices vorkommen.

Wenn wir nun noch die weitere Voraussetzung machen, dass in jeder der s Matrices, welche von den Colonnen $i_{k2}, i_{k3} \dots i_{km}$ $(k = 1 \dots s)$ gebildet werden, unter den je m Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades wenigstens eine von 0 verschiedene ist, so müssen alle Determinanten m^{ten} Grades der Matrix M verschwinden. — Der Beweis hierfür ergiebt sich leicht folgendermassen:

Der Relation

$$3)\qquad |x, i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}| = 0$$

wird offenbar genügt durch $x = i_{11}, i_{21}, i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}$, also durch alle in den beiden ersten Zeilen von 2) vorkommenden Indices, und zwar folgt dies für die Indices i_{11} und i_{21} aus den beiden ersten Gleichungen von 2), während für die anderen Indices die Relation 3) eine Identität ist. Wählen wir von diesen $m+1$ Werthen für x irgend m Werthe aus, welche wir mit $i_1, i_2 \dots i_m$ bezeichnen wollen, stellen für diese die m Determinantengleichungen von der Form 3) auf und entwickeln jede derselben nach den Unterdeterminanten der ersten Colonne, so haben wir offenbar ein System von m linearen homogenen Gleichungen in Bezug auf die m Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades der aus den Colonnen $i_{12}, i_{13} \dots i_{1m}$ gebildeten Matrix. Da nun wenigstens eine dieser Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nach unserer Voraussetzung von 0 verschieden ist, so muss also die Determinante des Systems linearer Gleichungen verschwinden; dies ist aber nichts Anderes als:

$$|i_1, i_2 \dots i_m| = 0.$$

Bilden wir also irgend eine Combination zu m Elementen von den in den beiden ersten Zeilen von 2) vorkommenden Indices, so verschwindet die aus den durch diese Indices bezeichneten Colonnen gebildete Determinante m^{ten} Grades. Es verschwindet daher auch die Determinante $|y, i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}|$ für jedes y, welches in den beiden ersten Zeilen von 2) bereits vorkommt, da ja $i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}$ dort auch schon vorkommen. Hiernach und nach der dritten Gleichung von 2) folgt, dass der Gleichung

$$4)\qquad |y, i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}| = 0$$

Genüge geleistet wird durch die Werthe $y = i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}, i_{21}, i_{31}$. Wählen wir also irgend m dieser $m+2$ Indices aus und bilden für sie die Determinantengleichungen von der Form 4), so erhalten wir offenbar wieder ein solches System von m linearen homogenen Gleichungen in Bezug auf die m Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades der aus den Colonnen $i_{32}, i_{33} \dots i_{3m}$ bestehenden Matrix. Da nun von diesen Determinanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nach unserer Voraussetzung wenigstens eine von 0 verschieden ist, so muss die Determinante des Gleichungssystems verschwinden, d. h. also: jede aus m der Colonnen $i_{11}, i_{12} \dots i_{1m}, i_{21}, i_{31}$ gebildete Determinante ist $= 0$. Dies geht offenbar so fort und es folgt, dass jede Determinante m^{ten} Grades der Matrix M verschwindet.

Dieser Satz lässt nun eine Reihe geometrischer Anwendungen zu, von denen wir einige anführen wollen. Wenn nämlich die Grössen x_i, y_i, z_i, w_i, $i = 1, 2, 3$ die homogenen Coordinaten von drei Raumpunkten sind, so sind in der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

die drei Determinanten dritten Grades, welche die letzte Colonne enthalten, im Wesentlichen die Projectionen des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks auf die Coordinatenebenen, und wir erhalten durch Anwendung unseres Determinantensatzes das bekannte Resultat, dass, wenn zwei der Projectionen eines Dreiecks auf die Coordinatenebenen verschwinden, die dritte auch verschwinden muss.* Sehen wir dagegen in dieser Matrix die Elemente der einzelnen Colonnen als Richtungscosinus von Geraden an, welche durch einen Punkt gehen, so kommen wir zu dem Satz, dass, wenn drei durch einen Punkt gehende Gerade x, y, z in einer Ebene liegen und eine vierte Gerade w mit zwei der früheren x, y gleichfalls in einer Ebene gelegen ist, alsdann alle vier Geraden in derselben Ebene liegen müssen, ausser wenn die beiden Geraden x, y coincidiren.

Gehen wir von dieser Matrix von drei Zeilen und vier Colonnen zu einer solchen von vier Zeilen und fünf Colonnen über:

$$\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix}\right|$$

und verstehen unter den x_i, y_i, z_i, w_i homogene Punktcoordinaten, so liefert unser Determinantensatz das Resultat, dass, wenn vier Punkte (1, 2, 3, 4) in einer Ebene liegen und ein fünfter (5) mit drei (1, 2, 3) dieser vier wieder in einer Ebene liegt, alle fünf Punkte in derselben Ebene gelegen sind, ausser wenn die drei Punkte (1, 2, 3) auf der Schnittcurve zweier Ebenen, einer Geraden, liegen. Ein entsprechender Satz lässt sich natürlich für Flächen zweiter Ordnung aus der Matrix

$$\left|\begin{matrix} x_1^2 & x_2^2 & \ldots\ldots & x_{11}^2 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \ldots\ldots & x_{11} y_{11} \\ x_1 z_1 & x_2 z_2 & \ldots\ldots & x_{11} z_{11} \\ x_1 w_1 & x_2 w_2 & \ldots\ldots & x_{11} w_{11} \\ y_1^2 & y_2^2 & \ldots\ldots & y_{11}^2 \\ y_1 z_1 & y_2 z_2 & \ldots\ldots & y_{11} z_{11} \\ y_1 w_1 & y_2 w_2 & \ldots\ldots & y_{11} w_{11} \\ z_1^2 & z_2^2 & \ldots\ldots & z_{11}^2 \\ z_1 w_1 & z_2 w_2 & \ldots\ldots & z_{11} w_{11} \\ w_1^2 & w_2^2 & \ldots\ldots & w_{11}^2 \end{matrix}\right|$$

herleiten, und man erhält so:

* Auf diese geometrische Anwendung machte mich Herr Prof. Staude bereits im Sommer 1894 gütigst aufmerksam.

Wenn zehn Punkte (1, 2...10) auf einer Fläche zweiter Ordnung gelegen sind und ein elfter Punkt (11) mit 9 (1...9) der zehn Punkte gleichfalls auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt, so liegen alle elf Punkte auf derselben Fläche zweiter Ordnung, ausser wenn die neun Punkte (1...9) auf der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiter Ordnung liegen.

Allgemein ergiebt sich natürlich der Satz: Wenn

$$N(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

Punkte auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liegen und ein weiterer Punkt liegt mit $N(n)-1$ dieser Punkte auf einer Fläche n^{ter} Ordnung, so liegen alle $N(n)+1$ Punkte auf derselben Fläche n^{ter} Ordnung, ausser wenn die $N(n)-1$ ausgezeichneten Punkte auf der Schnittcurve zweier Flächen n^{ter} Ordnung (resp. auf ein- oder mehrfach unendlich vielen solchen Schnittcurven) liegen.

Rostock. W. Ahrens.

XII. Beiträge zur Integralrechnung.

1. Ueber den zweiten Mittelwerthsatz.

Im Folgenden will ich einen neuen Beweis für den zweiten Mittelwerthsatz der Integralrechnung geben, der ihn als Consequenz des ersten erscheinen lässt, sobald noch die Stetigkeit des bestimmten Integrals, als Function seiner oberen Grenze angesehen, zu den Voraussetzungen tritt. Die gebräuchliche Form des Satzes lässt sich (vergl. Harnack: Differential- und Integralrechnung S. 270) sofort aus der besonderen Form

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\varphi(x)dx = f(a_0)\int_{a_0}^{x'}\varphi(x)dx \qquad (a_0 \leqq x' \leqq x)$$

ableiten, wie sie zuerst O. Bonnet (Liouv. Journ. XIV) aufgestellt hat; und diese Form wollen wir beweisen.

Wir setzen voraus, dass $f(x)$ von a_0 bis b stets positiv und abnehmend und (was keine Beschränkung involvirt) für $x = a_0$ gleich 1 sei. Die Integrale

$$\int_{a_0}^{x}\varphi(x)dx, \quad \int_{a_0}^{x} f(x)\varphi(x)dx \qquad (a_0 \leqq x \leqq b)$$

sollen eine Bedeutung haben.

Wir bezeichnen mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Punkte, in denen $\varphi(x)$ zwischen a_0 und b verschwindet, in denen also die Curve $y = \varphi(x)$ die x-Achse schneidet. Zur Abkürzung sei ferner:

$$1)\quad \begin{cases} \int\limits_{a_0}^{x} f(x)\varphi(x)dx = K(x); \quad \int\limits_{a_0}^{x}\varphi(x)dx = L(x); \\ \left|\int\limits_{a_\lambda}^{x}\varphi(x)dx\right| = J_\lambda(x), \quad (a_\lambda < x \leq a_{\lambda+1}); \quad J_\lambda(a_{\lambda+1}) = J_\lambda \end{cases}$$

gesetzt. Um die Anschauungen zu fixiren, nehmen wir an, dass $\varphi(x)$ zwischen a_0 und a_1 positiv sei. Dann ist:

$$2)\quad \begin{cases} L(a_{2k+1}) - L(a_{2k}) = J_{2k}, \\ L(a_{2k+2}) - L(a_{2k+1}) = -J_{2k+1}, \\ \quad L(a_k) = J_0 - J_1 + J_2 - \cdots + (-1)^{k-1}J_{k-1}. \end{cases}$$

Der erste Mittelwerthsatz gilt dann für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ in der Ausdehnung:

$$3)\quad \begin{cases} \int\limits_{a_\lambda}^{x} f(x)\varphi(x)dx = \varepsilon_\lambda(x)\int\limits_{a_\lambda}^{x}\varphi(x)dx \qquad (a_\lambda \leq x \leq a_{\lambda+1}) \\ \qquad \varepsilon_\lambda(x) = f[a_\lambda + \vartheta(x - a_\lambda)] \quad (0 \leq \vartheta \leq 1). \end{cases}$$

Der Abkürzung halber setzen wir

$$4)\qquad \varepsilon_\lambda(a_{\lambda+1}) = \varepsilon_\lambda$$

und können aus der Annahme, f sei positiv und abnehmend, den Schluss ziehen, dass

$$5)\quad \begin{cases} \varepsilon_\lambda(x_1) > \varepsilon_{\lambda+1}(x_2) \quad (a_\lambda \leq x_1 \leq a_{\lambda+1} \leq x_2 \leq a_{\lambda+2}) \\ \quad \varepsilon_\lambda > \varepsilon_{\lambda+1} \end{cases}$$

sei.

Gesetzt nun, die den zweiten Mittelwerthsatz darstellende Gleichung

$$6)\qquad K(x) = L(x') \qquad (a_0 \leq x' \leq x \leq b)$$

wäre für alle x von a_0 ab bis zu einer Grenze $x = \xi$, zu der $x' = \xi'$ gehört, richtig, dann würde sie im Allgemeinen auch noch weiter über $x = \xi$ hinaus richtig sein. Denn, wenn für wachsende x die linke Seite von 6) zu- oder abnimmt, kann man bei hinlänglich kleinen Aenderungen auch x' nach der einen oder der anderen Seite sich so ändern lassen, dass $L(x')$ ebensoviel zu- oder abnimmt.

Nur in folgenden Fällen könnte die Fortsetzbarkeit durch stetige Aenderung des x' unterbrochen sein:

I. ξ liegt zwischen $a_{2\lambda-1}$ und $a_{2\lambda}$, $K(x)$ nimmt also mit wachsendem x ab; ξ' ist $= a_{2k}(k < \lambda)$, $L(x')$ wird also bei wachsendem und abnehmendem x' grösser.

II. ξ liegt zwischen $a_{2\lambda}$ und $a_{2\lambda+1}$, $K(x)$ nimmt also mit wachsendem x zu; ξ' ist $= a_{2k+1}(k < \lambda)$, $L(x')$ wird also bei wachsendem und abnehmendem x' kleiner.

Man erkennt, dass, wenn 6) überhaupt noch weiter gilt, der Werth x' sich in den beiden Fällen sprungweise ändern muss.

Wir behandeln den Fall I.; der zweite lässt sich genau ebenso durchführen. I. wird offenbar durch die Gleichung

$$7)\quad \varepsilon_0 J_0 - \varepsilon_1 J_1 + \cdots - \varepsilon_{2\lambda-1}(\xi) J_{2\lambda-1}(\xi) = J_0 - J_1 + \cdots - J_{2k-1} \quad (k < \lambda)$$

dargestellt.

Sind hier beide Seiten positiv, dann ist die rechte Seite

$$< J_0 - J_1 + \cdots + J_{2k-2} = L(a_{2k-1}).$$

Lässt man nun x' von a_{2k-1} abnehmend bis a_0 laufen, dann geht dabei $L(x')$ von $L(a_{2k-1})$ bis $L(a_0) = 0$ über, gelangt also einmal zu einem $L(\xi'')$, welches der linken Seite von 7) bei $\xi'' < \xi'$ gleich ist; ist dieses ξ'' das letzte, welches x' in der Richtung von a_{2k-1} bis a_0 passirt, so kann ξ'' nicht $= a_{2k}$ sein, weil sonst dieselbe Schlussweise noch auf ein $\xi''' < \xi''$ führen würde. Gleich a_0 kann aber ξ'' offenbar auch nicht werden. Wir haben also das ξ' in 6), welches eine stetige Fortsetzung nicht zulässt, durch ein kleineres ξ'' ersetzt, bei dem eine stetige Fortsetzung möglich ist.

Zweitens mögen in 7) beide Seiten negativ oder Null sein. Wenn dann eine der Ungleichungen

$$8)\quad \begin{cases} J_{2k} - J_{2k+1} < 0, \\ J_{2k} - J_{2k+1} + J_{2k+2} - J_{2k+3} < 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ J_{2k} - J_{2k+1} + \cdots + J_{2\lambda-2} - J_{2\lambda-1}(\xi) < 0 \end{cases}$$

erfüllt ist, so kann man x' in 6) von a_{2k} an wachsen lassen; zuerst ist dann die rechte Seite von 6) nach Hinzufügung von $+J_{2k}$ grösser als die linke von 7), dann einmal wegen 8) kleiner als die linke von 7), also giebt es ein ξ'', für welches 6) auch erfüllt ist, und welches zwischen ξ' und $x = \xi$ liegt. Nimmt man das in dieser Richtung zuletzt auftretende, so kann es nicht wieder ein a_{2k} sein, und also ist die Fortsetzung von ξ'' aus möglich; oder die Voraussetzung 8) ist ungiltig.

Es ist daher nur noch zu untersuchen, was eintritt, wenn keine der Ungleichungen 8) erfüllt ist. Dann folgt aus

$$J_{2k} - J_{2k+1} \geqq 0$$

dass, wegen 5),

$$\varepsilon_{2k} J_{2k} - \varepsilon_{2k+1} J_{2k+1} > 0$$

ist, ferner aus

$$J_{2k} - J_{2k+1} + J_{2k+2} - J_{2k+3} \geqq 0,$$

wiederum wegen 5), dass

$$\begin{cases} \varepsilon_{2k} J_{2k} - \varepsilon_{2k+1} J_{2k+1} + \varepsilon_{2k+2} J_{2k+2} - \varepsilon_{2k+3} J_{2k+3} \\ \qquad > \varepsilon_{2k+3}(J_{2k} - J_{2k+1} + J_{2k+2} - J_{2k+3}) \\ \qquad + (\varepsilon_{2k+2} - \varepsilon_{2k+3}) J_{2k+2} + (\varepsilon_{2k+1} - \varepsilon_{2k+3})(J_{2k} - J_{2k+1}) \\ \qquad > 0 \end{cases}$$

ist, und in derselben Weise weiter. Folglich ist:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 J_0 - \varepsilon_1 J_1 + \cdots - \varepsilon_{2k-1} J_{2k-1} < \varepsilon_0 J_0 - \varepsilon_1 J_1 + \cdots - \varepsilon_{2k-1} J_{2k-1} \\ \qquad + [\varepsilon_{2k} J_{2k} - \cdots - \varepsilon_{2\lambda-1}(\xi) J_{2\lambda-1}(\xi)], \end{cases}$$

das heisst, man bekommt für die linke Seite von 7)

$$9) \qquad K(a_k) < K(\xi) < 0.$$

Für dieses $a_k < \xi$ gilt aber der Voraussetzung gemäss der zweite Mittelwerthsatz, und da auf dem Wege von $x = a_0$ bis $x = a_k$ die Function K von Null bis $K(a_k)$ läuft, so giebt es dazwischen ein in der eingeschlagenen Richtung letztes ξ_1 mit zugehörigem ξ'_1, für welches

$$K(\xi) = K(\xi_1) = L(\xi'_1) \qquad (\xi'_1 \leqq \xi_1 < \xi)$$

wird. Da ferner $K(a_k)$ noch kleiner als $K(\xi)$ wird, so ist auch in diesem Falle die Fortsetzbarkeit der Gleichung 6) nachgewiesen, da ja $K(\xi_1 + d\xi_1)$, $L(\xi'_1 + d\xi'_1)$ noch geringere Werthe annehmen. Wir erkennen dabei, dass auch hier die Aenderung des Werthes ξ' sprungweise erfolgt.

Die Gleichung 6) gilt also in jedem Falle auch noch über den Punkt $x = \xi$ hinaus, und da sie zwischen a_0 und a_1 selbstverständlich ist, so hat sie für das ganze Intervall von a_0 bis b hin Giltigkeit. Ueber die Anzahl der Stellen $a_1, a_2, \ldots$ ist keine beschränkende Voraussetzung gemacht worden.

2. Berechnung bestimmter Integrale aus der Summen-Definition.

In den Lehrbüchern der Integralrechnung wird nach der Besprechung der bestimmten Integrale als Grenze von Summen meist nur als einziges Beispiel

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

dafür abgeleitet, dass die Definition auch zu wirklicher Berechnung des Integral-Werthes benutzt werden kann. Am Ausführlichsten ist noch das Werk von G. F. Meyer, welches ausser dem Angeführten auch die beiden Integrale

$$\int_a^b c^x dx, \quad \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

behandelt. Es ist deshalb vielleicht nicht ohne Interesse zu sehen, dass die Definition

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_a^b (x_{\lambda+1} - x_\lambda) f(\xi_\lambda), \quad (x_\lambda \leqq \xi_\lambda \leqq x_{\lambda+1})$$

zur Berechnung jedes Integrals verwendet werden kann, falls das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ bekannt ist.

Es sei

$$\begin{cases} \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a) = y, \\ x = \varphi(y), \quad a = \varphi(0), \end{cases}$$

dann ist:

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(y)} f(x)\,dx = y,$$

$$\int_{\varphi(\lambda\delta)}^{\varphi[(\lambda+1)\delta]} f(x)\,dx = \delta = [\varphi((\lambda+1)\delta) - \varphi(\lambda\delta)]\,.\,f(\lambda\delta + \theta_\lambda\delta), \quad (0 \leqq \theta_\lambda \leqq 1).$$

Nun setzen wir:

$$x_0 = \varphi(0) = a, \quad x_1 = \varphi(\delta), \ldots \quad x_\lambda = \varphi(\lambda\delta), \ldots \quad x_n = \varphi(n\delta) = b.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma [\varphi((\lambda+1)\delta) - \varphi(\lambda\delta)] f(\xi_\lambda);$$

nimmt man daher $\xi_\lambda = \lambda\delta + \theta_\lambda\delta$, so geht die Summe über in

$$\lim \Sigma\delta = n\delta = F(b) - F(a).$$

So hat man z. B. für

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (b < 1)$$

$$\varphi(x) = \arcsin x; \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \sin\delta, \ldots \quad x_\lambda = \sin\lambda\delta, \ldots \quad b = \sin n\delta,$$

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim \Sigma [\sin(\lambda+1)\delta - \sin\lambda\delta] \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2_\lambda}} \\ &= \lim \Sigma\, 2 \sin\frac{\delta}{2} \cos\frac{2\lambda+1}{2}\delta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2_\lambda}}. \end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\lambda\delta \leqq \xi_\lambda \leqq \sin(\lambda+1)\delta, \\ &\cos\lambda\delta \geqq \sqrt{1-\xi^2_\lambda} \geqq \cos(\lambda+1)\delta, \end{aligned}\right.$$

und da $\frac{2\lambda+1}{2}$ zwischen λ und $\lambda+1$ liegt, kann man ξ_λ so wählen, dass

$$\cos\frac{2\lambda+1}{2}\delta = \sqrt{1-\xi^2_\lambda}$$

wird. Dies ergiebt dann

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim \Sigma\, 2\sin\frac{\delta}{2} = \lim n\delta \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}} = \arcsin b \,.\, \lim \frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}. \\ &= \arcsin b. \end{aligned}\right.$$

In derselben Weise kann man viele Integrale behandeln, z. B.:

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}, \ldots$$

In anderen Fällen, in denen die inverse Function des unbestimmten Integrals nicht einfach genug ist, kann man mitunter auf folgende Weise zum Ziele gelangen.

Es sei $\psi(x)$ die inverse Function von $f(x)$ und $a = \psi(\alpha)$. Dann nehmen wir:

$$\begin{cases} x_0 = \psi(\alpha), & x_1 = \psi(\alpha+\delta), & x_2 = \psi(\alpha+2\delta),\ldots & x_n = \psi(\alpha+n\delta), \\ \xi_0 = x_0, & \xi_1 = x_1, & \xi_2 = x_2,\ldots & \xi_n = x_n, \\ f(\xi_0) = \alpha, & f(\xi_1) = \alpha+\delta, & f(\xi_2) = \alpha+2\delta,\ldots & f(\xi_n) = \alpha+n\delta \end{cases}$$

und erhalten:

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = \lim \Sigma[\psi(\alpha+(\lambda+1)\delta) - \psi(\alpha+\lambda\delta)](\alpha+\lambda\delta) \\ \qquad = \lim\left\{\alpha[\psi(\alpha+n\delta)-\psi(\alpha)]+(n-1)\delta\psi(\alpha+n\delta)-\delta\sum_{\lambda=1}^{n-1}\psi(\alpha+\lambda d)\right\} \\ \qquad = bf(b) - af(a) - \lim\delta\sum_{\lambda=1}^{n-1}\psi(\alpha+\lambda\delta). \end{cases}$$

Sobald also die Summe in dem letzten Ausdrucke sich bilden lässt, haben wir den Werth des bestimmten Integrals.

Beispielsweise sei gegeben: $\int_a^b \log x\,dx.$

Hier wird
$$x_\lambda = e^{\alpha+\lambda\delta},\quad f(\xi_\lambda) = \alpha+\lambda\delta,$$
$$a = e^\alpha,\qquad b = e^{\alpha+n\delta},$$

$$\begin{cases} \int_a^b \log x\,dx = b\log b - a\log a - \lim\delta(e^\delta + e^{2\delta} + \cdots + e^{(n-1)\delta})e^\alpha \\ \qquad = b\log b - a\log a - a\lim(e^{n\delta} - e^\delta)\frac{\delta}{e^\delta - 1} \\ \qquad = b\log b - a\log a - (b-a). \end{cases}$$

Ebenso ergiebt sich für

$$\begin{cases} \int_0^b \arcsin x\,dx = b\arcsin b - \lim\delta[\sin\delta + \cdots + \sin(n-1)\delta] \\ \qquad = b\arcsin b - 2\sin^2\frac{1}{2}(\arcsin b) \\ \qquad = b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1. \end{cases}$$

Giessen. Prof. E. Netto.

XIII. Zur Wärmeleitung in der Erde.

Im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift S. 124 flg., dann S. 192 und in diesem Jahrgange S. 60 flg. sind thermische Studien-Ergebnisse von mir mitgetheilt worden, welche ich jetzt, nach völliger Durchnahme der vorzüglichen Vorlesungen Kirchhoff's (herausgegeben durch Planck) noch fortsetze, aber auch unter den speciellen Titeln, die das spätere Wiederauffinden solcher Notate erleichtern sollen.

In der zweiten Vorlesung (§ 2) handelt Kirchhoff von der Anwendung der bekannten Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$$

auf das Erdinnere und vergleicht deren Ergebnisse mit Beobachtungen, welche Quetelet in Brüssel angestellt hat. Das Integral

$$\vartheta = e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} . \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{2a}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\right)$$

lässt ersehen, dass sich das Maximum oder Minimum der Periode τ in die Tiefe z fortpflanzt mit der Geschwindigkeit $2a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$.

Quetelet fand für die tägliche Periode ($\tau = 1$) diese Geschwindigkeit gleich 1 Meter und in der Tiefe $z = \frac{1}{5}$ Meter als Amplitudenverhältniss (verglichen mit der Erdoberfläche) 1 : 6. Aus

$$2a\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} = 1 \quad \text{oder} \quad a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\text{Meter}}{\text{Tag}^{\frac{1}{2}}}$$

wird also das genannte Verhältniss $e^{-2\pi z}$, oder $e^{-0{,}4\pi}$, oder $e^{-\frac{5}{4}}$, oder 1 : 3,5, das ist beinahe doppelt so gross als 1 : 6.

„Zuverlässiger sind die Beobachtungen der jährlichen Periode“ $\tau = 365$, wofür Quetelet die Geschwindigkeit 0,0464 Meter pro Tag fand. Die Theorie liefert demnach

$$2a\sqrt{\frac{\pi}{365}} = 0{,}0464 \quad \text{oder} \quad a = \frac{0{,}44}{\sqrt{\pi}},$$

was dem vorigen Werthe $a = \frac{0{,}5}{\sqrt{\pi}}$ nur um 12 Procente nachsteht.

Ich berechnete nun mit ersterem Werthe von a die Amplituden der obigen zweiten Gleichung für die jährliche Periode und für die von Kirchhoff nach Quetelet angegebenen Tiefen

Meter 0,188 0,75 1,95 3,90 7,80

und fand beziehungsweise

1 : 1,07 1 : 1,32 1 : 2,07 1 : 4,27 1 : 18.

Angegeben sind die jährlichen Schwankungen der Temperatur

Grade: 13,28 11,30 7,69 4,49 1,43.

Es muss also beispielsweise für das erste Paar der beiden letzten Zahlenreihen 1,32 : 1,07 = 13,28 : 11,30, oder überhaupt, es müssten die Quotienten je zweier Zahlen dieser Reihen gleich sein. Diese sind aber beziehungsweise 14,2 14,9 15,9 19,2! 25,7!

Man sieht, dass eine ziemlich gute Uebereinstimmung nur herrscht in den drei ersten dieser fünf Producte, aber nicht mehr hinsichtlich der beiden letzten. Kirchhoff hat vielleicht nur bei jenen eine Controle vorgenommen, da er diese Unterscheidung nicht macht.

Oder ich will einmal annehmen, dass statt der letzten Reihe ein und dieselbe Zahl

15

zutreffen würde; so würden statt der vorletzten Reihe durch Multiplication der 15 mit den betreffenden Zahlen der drittletzten Reihe kommen

Grade: 14,0 11,4 7,2 3,5 0,8.

Die im Buche erwähnten „wenigen Zehntel von 1°C." als Abweichung treffen also auch nur wenig zu.

XIV. Erwärmung des Wassers durch Zusammendrücken.

Geschieht diese Erwärmung adiabatisch, was bei genauer Betrachtung ohnehin vorausgesetzt werden muss, so findet die Thermodynamik

$$d\tau = \frac{\tau}{\varkappa . c_p} \cdot \frac{\partial v}{d\tau} \cdot dp,$$

wo $p v \tau$ den Druck auf die Fläche 1, das specifische Volum, die absolute Temperatur, c_p die specifische Wärme des Körpers bei constantem Druck und $\varkappa$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

Kirchhoff's Vorlesungen bringen diese Gleichung in VI § 7 kurz vor dessen Schluss, und in VII § 2, am Schlusse dieses Paragraphen, werden Joules Versuche mit Wasser angeführt, bei welchen $dp = 25$ Atmosphären war und beobachtet wurde

$$d\tau = -0{,}008 \text{ C.}, \quad +0{,}020, \quad +0{,}054$$

für

$$\tau = 274{,}2, \quad 284{,}7 \quad 303{,}0,$$

„in fast völliger Uebereinstimmung mit der Theorie".

Es interessirte mich, diese theoretische Rechnung anzustellen, und ich werde hierüber jetzt berichten.

Da sich bei diesen Resultaten Unterschiede von vier Promille als gegenstandslos erweisen, so nehme ich $c_p = 1$ in den drei Fällen. Und da auch ein Prozent nichts gilt, so sei auch das Volum von ein Kilogramm Wasser durchweg $v = 0{,}001$ Cubikmeter; dasselbe kommt durch

$$\left(\frac{\partial v}{v \partial \tau}\right) \cdot v$$

herein, worin ich für die eingeklammerte Grösse den aus der Volkmannschen Tabelle bei der Temperatur-Erhöhung um 1° von den drei fraglichen Temperaturen aus sich ergebenden Ausdehnungs-Coefficienten setze

$$\alpha = -0{,}00003, \quad +0{,}00011, \quad +0{,}00047.$$

Für eine Atmosphäre ist 10334 gesetzt und $\varkappa = 425$; das bei beiden herzusetzende g (Erdbeschleunigung) entfernt sich aus dem Ausdrucke. Der für die drei Fälle constante Factor

$$\frac{1}{\varkappa . c_p} \cdot v . dp \quad \text{oder} \quad \frac{1}{425} \cdot 0{,}001 . 25 . 10334$$

ergiebt den Logarithmus (mit unnöthig vielen Decimalen)

$$0{,}783819 - 1$$

und, das Product der je zwei sich ändernden Factoren $\tau . \alpha$ (siehe oben) hinzugefügt, es findet sich nach der Delogarithmirung beziehungsweise

$$d\tau \text{ berechnet} = -0{,}005, \quad +0{,}019, \quad +0{,}087.$$

Vergleicht man diese Zahlen mit den beobachteten, die oben angegeben sind, so findet man eine „fast völlige Uebereinstimmung" bei der mittleren, während die beiden anderen berechneten um fast gleichviel höher sind (60 Procent) als die beobachteten.

Gleichwohl kann man auch da noch von einer gewissen Uebereinstimmung sprechen (hinsichtlich der Vorzeichen und der Decimalstellen), und, dass die Beobachtung hinter der Berechnung zurückbleibt, ist bei der Schwierigkeit der anzustellenden Messungen nicht verwunderlich.

Interessant ist auch noch für den gegenwärtigen Betreff, was Kirchhoff sogleich im nächsten Paragraphen (VII § 3) folgen lässt über die Abkühlung von Drähten durch Zug und das durch Joule ziemlich bekannt gewordene Gegentheil beim Kautschuk, wovon ich unter besonderem Titel noch handeln will.

XV. Abkühlung von Drähten durch Zug.

Unmittelbar auf die Formel von der (adiabatischen) Erwärmung eines Körpers durch Druck folgt in Kirchhoff's Buch (herausgegeben von Planck) die Formel (VII § 3)

$$d\tau = -\frac{\tau}{\varkappa c_p} \cdot \frac{\partial l}{\partial \tau} \cdot dP,$$

wo $P l \tau$ den Zug (nicht auf die Fläche 1, sondern absolut), die specifische Länge, die absolute Temperatur, c_p die specifische Wärme des Körpers bei constantem Druck und $\varkappa$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeuten.

Clausius hat dieselbe Gleichung in VIII § 9 seiner „mechanischen Wärmetheorie" (2. Aufl. 1876) und sagt, dass „ihre Richtigkeit durch Versuche von Joule bestätigt" wurde (1859). Kirchhoff berichtet genauer, dass die Formel in „besonders auffallender Weise an Streifen vulkanisirten Kautschuks bestätigt" wurde. Hierbei kommen bekanntlich negative thermische Längsdehnungs-Coefficienten $\frac{\partial l}{l . \partial \tau}$ zum Vorschein, und die somit gemäss der Formel resultirende Erwärmung statt der Abkühlung durch Zug hat sich experimentell ergeben.

Aber Kirchhoff fährt fort: „Was die Grösse der beobachteten Temperaturänderungen betrifft, so stimmte diese, auch bei den Metallen, nicht ganz mit den theoretisch berechneten überein; ja bei den Versuchen mit Metalldrähten fand Edlund diese Temperaturänderungen nur etwa gleich zwei Drittel der theoretisch berechneten. Der Grund hierfür ist noch nicht aufgeklärt." Und nun folgen acht Zeilen Text über die muthmasslichen störenden Einflüsse.

Dazu kann ich nun Zweierlei hinzufügen.

Fürs Erste habe ich auch bei den von Kirchhoff erwähnten drei Messungen Joules über die Erwärmung des Wassers durch Druck nachgewiesen, dass zwei derselben ein Zurückbleiben der beobachteten Temperaturänderung hinter der berechneten ergeben haben und zwar zufällig auch gerade um denselben Betrag.

Zweitens kann man bei den gezogenen Drähten noch ganz bestimmt eine Ursache angeben, welche die beobachtete Temperatur-Minderung kleiner macht, als die nach obiger Formel berechnete. Durch den Zug nach der Länge des Drahtes werden nämlich die Querdimensionen desselben vermindert, also gewissermaassen zusammengedrückt und der Draht in Folge dessen auch erwärmt. Dieser Einfluss kommt von der durch die Formel berechneten Wirkung in Abzug.

Dürfte man für die zweite Elasticitätsconstante, die sogenannte Quercontraction, genauer deren Verhältniss zur Längsdilatation, die Zahl $\frac{1}{4}$ rechnen, so wäre das für den Querschnitt vom doppelten Erfolge, $\frac{1}{2}$, und es ergäbe sich als Resultat der Erkaltung und Erwärmung eine Erkaltung halb so gross als die oben genannte theoretische. Bei geringerer Quercontraction, wie sie an den schon mehrmals gezogenen Drähten nicht auffällig ist, wird der besprochene Abzug $\frac{1}{3}$ und noch weniger der theoretischen Erkaltung betragen. Abgesehen von den sonstigen Gründen, welche die Beobachtung hinter der Theorie zurückbleibend erwarten lassen.

Ich benutze diesen Anlass, um für die Aufnahme der zweiten Elasticitätsconstanten neben der ersten (dem Elasticitätsmodul) in die Physikbücher neuerdings das Wort zu nehmen (siehe die letzten Jahrgänge des im Jahre 1891 abgeschlossenen Repertoriums der Physik). So z. B. reproducirt u. A. auch der Leitfaden der Physik von Beetz-Henrici (11. Aufl. 1893) die Vergleichung der thermischen mit der mechanischen Längsdehnung (§ 161). Und doch haben beide nur diesen äusseren Schein, möchte ich mich ausdrücken, gemein. Denn thermisch ist mit der Längsdehnung auch die Vergrösserung, mechanisch dagegen die Verkleinerung der Querdimensionen verknüpft.

Wenn man einen solchen Vergleich anstellen will, wie er ja didaktisch ganz empfehlenswerth ist, so muss man die cubische thermische Ausdehnung mit der mechanischen bei dreiseitigem und gleichem Normalzug des isotrop und etwa würfelförmig gedachten Körpers vergleichen. Man erhält dann einerseits

$$a^3(1 + Kt) \quad \text{oder} \quad a^3(1 + 3kt),$$

wo K der cubische und k der lineare Ausdehnungs-Coefficient; andererseits

$$a^3\left[1 + \frac{3p}{\varepsilon}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right],$$

wenn p, wie der Elasticitätsmodul ε, beispielsweise Kilogramme durch Quadratmillimeter und $n > 2$ die zweite Elasticitätsconstante bedeutet.

Bei gleich gross gedachter Volumzunahme ist dann

$$p\left(1-\frac{2}{n}\right)=\varepsilon kt;$$

die Nichtberücksichtigung von n bedeutet die Annahme $n=\infty$, ausserdem, dass hier der Zug p auf alle drei Würfelseitenpaare ausgeübt wird. Bei blos einem dieser Züge würde der Factor 3 bei p wegfallen; aber wie schon gesagt sind dann der thermische und mechanische Vorgang wesentlich verschieden.

XVI. Nachtrag zur barometrischen Höhenmessungsformel (im vorigen Jahrgange der Zeitschrift).

Kohlrausch giebt in seinem Leitfaden der praktischen Physik als Annäherungsformel, bis zu 1000 Metern giltig,

$$h=16000\,\frac{b_0-b_1}{b_0+b_1}.$$

In einer Mittheilung über diesen Gegenstand (Rep. d. Phys. 1889) setzte ich einfacher statt des Nenners $2b_1$; dann wird im äussersten Falle

$$1000=8000\cdot\frac{b_0-b_1}{b_1}\quad\text{oder}\quad b_0-b_1=\frac{1}{8}b_1,\quad b_1=\frac{8}{9}b_0.$$

Setzt man dagegen $2b_0$ im Nenner, so wird

$$b_0-b_1=\frac{1}{8}b_0,\quad b_1=\frac{7}{8}b_0.$$

Der Unterschied dieser beiden Werthe von b_1 beträgt also höchstens 10 Millimeter, wenn b_0 über 700, also der Unterschied der obigen Formel von

$$h=8000\,\frac{b_0-b_1}{b_1},\quad\text{oder von}\quad h=8000\,\frac{b_0-b_1}{b_0}$$

höchstens 5 Millimeter.

In einer späteren Mittheilung (Rep. d. Phys. 1890) kam ich auf diese Annäherung nicht zu sprechen; desgleichen nicht in der letzten, die ich im vorigen Jahrgang dieser Zeitschrift veröffentlichte. Diesem Nachtrage füge ich heute noch den Temperaturfactor

$$(1+0{,}004t)$$

für die rechte Seite der Gleichung von h bei.

Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

XVII. Preisaufgaben der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft in Leipzig.

1. Für das Jahr 1895.

Die Gesellschaft wünscht

eine kritische Zusammenstellung der bisherigen Hauptergebnisse über die an Krystallen beobachteten künst-

lich erzeugten und natürlich vorkommenden Aetzerscheinungen, sowie die Ausführung weiterer Untersuchungen, welche geeignet sind, das Zustandekommen und die speciellere Ausbildungsweise derselben zu erläutern, und insbesondere die Beziehungen zwischen Aetzerscheinungen und Molecularstructur aufzuklären.

Preis 1000 Mark.

2. Für das Jahr 1896.

Wenn man sich heute — und es geschieht das mit Recht — einer besseren und tieferen Kenntniss der Entwickelungsgeschichte berühmt, als man sie früher besass, so gilt das doch zunächst nur in Bezug auf die äussere Erscheinung und die Reihenfolge der Vorgänge, welche den Aufbau des thierischen Organismus ermöglichen. Die physiologischen Bedingungen dieser Vorgänge sind bis bis jetzt erst wenig erforscht worden. Nur so viel steht fest, dass letztere nicht ausschliesslich durch gewisse Grundfunctionen bestimmt sind, sondern auch von äusseren Reizursachen abhängen, und durch Veränderung derselben in dieser oder jener Weise selbst abgeändert werden.

In der Hoffnung nun, die physiologische Morphologie zu fördern und zur Lösung ihrer Probleme anzuregen, wünscht die Gesellschaft

eine durch Darstellung der bisher gewonnenen Ergebnisse eingeleitete Experimentaluntersuchung über den Einfluss, den die verschiedentlich abgeänderten Lebensbedingungen auf die Entwickelungsvorgänge eines (höheren oder niederen) Thieres ausüben.

Preis 1000 Mark.

3. Für das Jahr 1897.

Die von Monge, Ampère und Darboux herrührenden Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung finden bekanntlich nur für solche Gleichungen Anwendung, die mit anderen Gleichungen Lösungen gemein haben, welche nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Es geht andererseits aus Lie's Untersuchungen über unendliche Gruppen hervor, dass Gleichungen, die eine unendliche Gruppe von Berührungs-Transformationen gestatten, im Allgemeinen zu anderen Gleichungen in der soeben besprochenen Beziehung (Involutionsbeziehung) stehen.* Die Gesellschaft wünscht,

dass die aus dieser Bemerkung fliessenden Integrationsmethoden entwickelt und an möglichst instructiven und vollständig durchgeführten Beispielen illustrirt werden.

Preis 1000 Mark.

---

* Vergl. Darboux: Journal de l'école normale 1870. — Lie: Berichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1891—1894.

4. Für das Jahr 1898.

Da die von Poisson, Green, Gauss, Dirichlet u. A. gegebene Theorie der dem Newton'schen Gesetze entsprechenden Kräfte einen der wichtigsten Theile der ganzen mathematischen Physik repräsentirt, andererseits aber die absolute Giltigkeit des Newton'schen Gesetzes (namentlich für sehr kleine und für sehr grosse Entfernungen) mancherlei Bedenken ausgesetzt ist, so liegt der Gedanke nahe, die Theorie der Fernwirkungen in grösserer Allgemeinheit zu entwickeln und dabei, neben dem Newton-schen auch andere Gesetze der Fernwirkung in Betracht zu ziehen.

Ein solcher Versuch ist schon im Jahre 1832 von Green gemacht worden in seinen Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid.* Statt der Newton'schen Kräfte vom Gesetze $\frac{1}{r^2}$ werden dort ganz allgemein Kräfte vom Gesetz $\frac{1}{r^n}$ in Betracht gezogen. Doch zeigen sich in jener ebenso wichtigen wie scharfsinnigen Abhandlung mancherlei Lücken und Unklarheiten, auf welche Green zum Theil schon selbst aufmerksam gemacht hat. Auch sind daselbst gewisse Aufgaben (wie z. B. die Aufgabe der elektrischen Vertheilung in einem Ellipsoid oder in einer Kreisscheibe) nur ganz beiläufig besprochen worden. Demgemäss wünscht die Gesellschaft

> eine wirkliche Lösung dieser von Green in seiner Abhandlung nur angedeuteten Aufgaben, sowie auch die Ausfüllung und Aufklärung der in der genannten Schrift vorhandenen Lücken und Dunkelheiten.

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Umschlage begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1895 Geh. Bergrath Professor Dr. F. Zirkel, Thalstrasse Nr. 33) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die „Leipziger Zeitung" im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Hofrath Prof. R. Leuckart, Präses.

---

* Transactions of de Cambridge Philos. Society 1833, wieder abgedruckt in den Mathematical Papers of G. Green p. 117—183.



XI.

Metrische Strahlencongruenzen bei einer cubischen Raumcurve.

Von

Dr. H. Krüger
in Pless O.-S.

Bei einem Kegelschnitt liegen bekanntlich die Mitten paralleler Sehnen auf einer Geraden, und die Gesammtheit dieser Geraden bildet das Strahlenbüschel der Durchmesser. In analoger Weise gelangt man zu gewissen Strahlencongruenzen, wenn man die singulären Punkte von Schnittpunktsdreiecken einer cubischen Raumcurve betrachtet, deren Ebenen einander parallel sind. Als ausgezeichnete Punkte eines Dreiecks bezeichnen wir dabei

1. den Schwerpunkt,
2. den Höhenpunkt (Schnittpunkt der drei Höhen),
3. den Mittelpunkt des Umkreises.

I. Schwerlinie, Höhenpunktslinie, Mittellinie einer cubischen Raumcurve.

1. Der Theorie der Kegelschnitte entnehmen wir folgende Sätze:

In einem System Poncelet'scher Dreiecke, die einem allgemeinen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ eingeschrieben und gleichzeitig einer Parabel $\mathfrak{P}^2$ umschrieben sind, beschreiben 1. die Höhenpunkte, 2. die Schwerpunkte, 3. die Mittelpunkte der Umkreise je eine Gerade.[1])

Im Fall 1 erhalten wir bekanntlich als Ort der Höhenpunkte die Leitlinie der Parabel. Um den Fall 2 zu beweisen, setzen wir vorerst als umschriebenen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ einen Kreis voraus. Nun theilt der Schwerpunkt jedes Dreiecks den Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Umkreises und dem Höhenpunkt im Verhältniss 1 : 2 (die drei singulären Punkte liegen auf der Euler'schen Geraden). Da also die Höhenpunkte auf einer Geraden liegen, so erfüllen auch die Schwerpunkte aller Poncelet'schen Dreiecke eine zweite Gerade, welche der Leitlinie parallel läuft und ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Umkreises im Verhältniss 1 : 2 theilt.

Projicirt man jetzt die ganze Figur in der Ebene ε_1 durch Parallelstrahlen auf eine andere Ebene ε_2, so geht der umschriebene Kreis in eine Ellipse, die Parabel in eine andere Parabel über, und jeder Schwerpunkt eines Dreiecks in ε_1 wird in den Schwerpunkt des entsprechenden Dreiecks in ε_2 projicirt. Folglich bleibt die Eigenschaft der Schwerpunkte, eine Gerade zu bilden, auch für eine umschriebene Ellipse erhalten, und wir können sie nach dem Princip der Continuität auf einen allgemeinen Kegelschnitt ausdehnen.

Der Höhenpunkt und der Schwerpunkt beschreiben weiter auf ihren bezüglichen Geraden zwei projectiv ähnliche Punktreihen, und die Euler-schen Geraden, welche je zwei entsprechende Punkte verbinden, umhüllen daher eine Parabel, zu deren Tangenten die Schwerpunktslinie und Höhenpunktslinie gehören. Die Mittelpunkte der Umkreise aller Dreiecke liegen aber derart auf den Euler'schen Geraden, dass der Schwerpunkt den Abstand zwischen Kreismittelpunkt und Höhenpunkt im Verhältniss 1 : 2 theilt. Folglich beschreiben diese Mittelpunkte eine dritte feste Tangente der Parabel, womit auch der Fall 3 bewiesen ist.

2. Die vorstehenden Sätze lassen sich jetzt unmittelbar auf eine cubische Raumcurve C^3 übertragen, als welche wir im Allgemeinen eine cubische Hyperbel mit drei reellen unendlich fernen Punkten $\mathfrak{a}_\infty$ $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ voraussetzen. Legt man zu einer beliebigen Ebene ε ein Büschel paralleler Ebenen, so schneidet dieses aus C^3 eine Schaar Dreiecke aus. Wir projiciren die letzteren von einem unendlich fernen Punkt $\mathfrak{a}_\infty$ der Raumcurve C^3 auf die feste Ebene ε, dann bilden die Projectionsstrahlen den einen (hyperbolischen) Cylinder, welcher sich durch C^3 legen lässt, oder die cubische Raumcurve wird in einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ (Hyperbel) in ε projicirt, die Schnittpunktsdreiecke auf C^3 aber in ein System von jenen bez. congruenten Dreiecken, welche dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ eingeschrieben sind. Die Seiten der Schnittpunktsdreiecke auf der Raumcurve C^3 sind Secanten derselben, welche zu der Ebene ε parallel laufen, das heisst ihre unendlich ferne Gerade g_∞ schneiden; die Seiten erzeugen daher eine Regelfläche vierter Ordnung R^4 mit C^3 als Doppellinie.[*]) Diese Regelfläche R^4 wird aber von dem Doppelpunkte $\mathfrak{a}_\infty$ aus in einen parabolischen Cylinder zweiter Ordnung projicirt, das heisst, die Seiten der Schnittpunktsdreiecke umhüllen einen parabolischen Cylinder, ihre Projectionen in ε folglich eine Parabel $\mathfrak{P}^2$. Das räumliche System der Schnittpunktsdreiecke auf C^3 ist somit übertragen in ein congruentes ebenes System Poncelet'scher Dreiecke, die dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ eingeschrieben und der Parabel $\mathfrak{P}^2$ umschrieben sind. Mit den Dreiecken werden aber zugleich ihre singulären Punkte bezüglich projicirt, so dass wir für diese aus dem unter 1. bewiesenen Satze folgern: die Schwerpunkte, Höhenpunkte und Mittelpunkte der Umkreise in den Schnittpunktsdreiecken auf C^3 liegen in je einer Ebene durch $\mathfrak{a}_\infty$. Derselbe Schluss wiederholt sich für den zweiten un-

endlich fernen Punkt $\mathfrak{b}_\infty$ der Raumcurve C^3 als Projectionscentrum; die drei Linien, welche die drei ausgezeichneten Punkte der Schnittpunktsdreiecke erfüllen, gehören auch je einer Ebene durch $\mathfrak{b}_\infty$ an. Die so construirten drei Ebenenpaare durch $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$ schneiden sich bezüglich in drei Geraden, und wir erhalten den Satz:

Ein Büschel paralleler Ebenen schneidet aus einer cubischen Raumcurve C^3 ein System von Dreiecken aus. Die Schwerpunkte, die Höhenpunkte, die Mittelpunkte der Umkreise in den Schnittpunktsdreiecken beschreiben dabei je eine Gerade, die wir kurz bezüglich als Schwerlinie s, Höhenpunktslinie h und Mittellinie m bezeichnen.[3])

Diese drei Geraden bilden drei Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloids, dessen andere Regelschaar die Euler'schen Geraden der Schnittpunktsdreiecke darstellt, und die von jenen drei Geraden im Verhältniss 1:2 getheilt wird.

II. Das System der Schwerlinien einer cubischen Raumcurve.

1. Jedem Büschel von Parallelebenen oder auch jeder Achse x_∞ eines solchen in der unendlich fernen Ebene ε_∞ ist nach I, 2 eine Schwerlinie s der Raumcurve C^3 zugeordnet. Die Gesammtheit der Schwerlinien bildet daher eine ∞^2 Mannigfaltigkeit im Raume oder eine Strahlencongruenz. Um den Charakter derselben zu ermitteln, projiciren wir in der obigen Weise das veränderliche System der Schnittpunktsdreiecke, welches das beliebige Parallelebenenbüschel $[x_\infty]$ aus der Curve C^3 ausschneidet, sowohl von ihrem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, als auch von ihrem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{b}_\infty$ auf eine beliebige, aber feste Ebene ε. Das Projectionsbild in ε ist dann bez. $\mathfrak{a}_\infty$ eine Schaar Poncelet'scher Dreiecke, die einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2{}_a$ eingeschrieben und einer Parabel $\mathfrak{P}^2{}_a$ umschrieben sind, und deren Schwerpunkte eine Gerade $a_\mathfrak{x}$ beschreiben, anderseits bez. $\mathfrak{b}_\infty$ eine entsprechende Schaar von Dreiecken, die einem Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2{}_b$ eingeschrieben und einer Parabel $\mathfrak{P}^2{}_b$ umschrieben sind mit der Schwerpunktsgeraden $b_\mathfrak{x}$. Und zwar sind die Geraden $a_\mathfrak{x}$ und $b_\mathfrak{x}$ die Projectionen der Schwerlinie $s_\mathfrak{x}$, welche dem Ebenenbüschel $[x_\infty]$ zugeordnet ist, oder umgekehrt: die Schwerlinie $s_\mathfrak{x}$ ist die Schnittlinie der Verbindungsebenen $(\mathfrak{a}_\infty a_\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{b}_\infty b_\mathfrak{x})$.

Lassen wir jetzt die Achse x_∞ in der Ebene ε_∞ sich verändern, so bleiben die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{C}^2{}_a$ und $\mathfrak{C}^2{}_b$ fest als Durchschnittsfiguren der Ebene ε mit den beiden Cylindern, die von $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$ aus durch die Raumcurve C^3 gehen. Dagegen verändern sich die beiden Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ als Projectionen der veränderlichen Regelfläche R^4, die x_∞ zur Leitlinie hat (vergl. I, 2) und mit ihnen die beiden Schwerlinien $a_\mathfrak{x}$ und $b_\mathfrak{x}$. Dabei bleiben für jede Parabel $\mathfrak{P}_a$ einerseits und $\mathfrak{P}_b$ anderseits ausser der unendlich fernen Geraden g_∞ ihrer Ebene ε noch je zwei Tangenten unverändert:

die Asymptote der Raumcurve C^3 in $\mathfrak{a}_\infty$, t_a^∞ schneidet nämlich den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2_a$ in einem Punkte $\mathfrak{a}$, und die beiden Strahlen von $\mathfrak{a}$ aus nach den unendlich fernen Punkten des Kegelschnitts $\mathfrak{C}^2 a$ bilden mit g_∞ die Projection des Schnittpunktdreiecks $\mathfrak{a}_\infty \mathfrak{b}_\infty \mathfrak{c}_\infty$, berühren daher die Parabel $\mathfrak{P}_a$; das Analoge gilt für die Parabel $\mathfrak{P}_b$. Die einzelnen Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ sind also je einem festen Dreiseit eingeschrieben oder bilden je ein specielles Kegelschnittgewebe, so dass die Glieder der beiden Gewebe eindeutig auf einander bezogen sind. Ferner entspricht, wie leicht ersichtlich, jeder Schaar $(\mathfrak{P}_a)$ eine Schaar $(\mathfrak{P}_b)$; zwischen den beiden Parabelgeweben besteht daher eine collineare Verwandtschaft. Durch die beiden so definirten Parabelgewebe werden nun auch die den einzelnen Parabeln $\mathfrak{P}_a$ und $\mathfrak{P}_b$ zugeordneten Schwerlinien $a_\mathfrak{g}$ und $b_\mathfrak{g}$, welche das Strahlenfeld der Ebene ε erfüllen, projectiv auf einander bezogen, indem jeder Parabelschaar $(\mathfrak{P}_a)$ und $(\mathfrak{P}_b)$ ein Strahlenbüschel $(a_\mathfrak{g})$ und $(b_\mathfrak{g})$ entspricht. Das Letztere folgt daraus, dass zunächst die Leitlinien einer Parabelschaar (die einem Dreiseit eingeschrieben ist) ein zu ihr projectives Strahlenbüschel bilden, was dieselbe Eigenschaft für die Schwerlinien der umschriebenen Poncelet'schen Dreieckssysteme nach sich zieht. Die beiden Strahlenfelder $\varepsilon(a_\mathfrak{g})$ und $\varepsilon(b_\mathfrak{g})$ sind somit collinear verwandt; folglich gilt dasselbe für die sie projicirenden Ebenenbündel $\mathfrak{a}_\infty(a_\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{b}_\infty(b_\mathfrak{g})$. Für die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare der beiden collinearen Bündel, das heisst für die Schwerlinien $s_\mathfrak{g}$ der Raumcurve C^3, gilt daher der Satz:

Die Schwerlinien $s_\mathfrak{g}$ einer cubischen Raumcurve C^3 bilden eine Strahlencongruenz erster Ordnung und dritter Klasse oder das Secantensystem einer anderen cubischen Raumcurve S^3.

2. Die gefundene Leitcurve S^3 geht zunächst durch die Mittelpunkte $\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{b}_\infty$ der beiden collinearen Bündel, daher nach Analogie auch durch den dritten unendlich fernen Punkt $\mathfrak{c}_\infty$ von C^3. Ferner gehört zu ihren Secanten die singuläre Schwerlinie, welche die Schmiegungspunkte der beiden einzigen parallelen Schmiegungsebenen von C^3 verbindet, da eine Schmiegungsebene die Raumcurve C^3 in einem Null-Dreieck mit coincidentem Schwerpunkt schneidet. Diese besondere Schwerlinie ist also zugleich Secante der Raumcurve C^3; sie geht durch den Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ derselben und soll kurz als Mittelsecante von C^3 bezeichnet werden.

Für die Lage der Leitcurve S^3 ergiebt sich demnach:

Die Leitcurve S^3 hat mit der ursprünglichen Raumcurve C^3 die drei unendlich fernen Punkte und die Mittelsecante gemein.

Zur vollständigen Bestimmung der Curve S^3 genügt es, noch ihre Schnittpunkte mit der Mittelpunktsebene μ von C^3 aufzusuchen (Ort der Mittelpunkte aller der Raumcurve C^3 eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung). In der Ebene μ besteht folgende Configuration von Punkten[4]): Die Ebene μ schneidet die Raumcurve C^3 in drei Punkten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ und

ihre Asymptoten t_a, t_b, t_c bez. in drei Punkten a_1, b_1, c_1, so dass die beiden Dreiecke $a_0 b_0 c_0$ und $a_1 b_1 c_1$ in Bezug auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt m (den sogenannten Mittelpunkt von C_3) perspectiv liegen, und zwar verhält sich:

$$\overline{m a_1} : \overline{m a_0} = \overline{m b_1} : \overline{m b_0} = \overline{m c_1} : \overline{m c_0} = 1 : -3.$$

Die Gerade $a_0 a_1$ ferner (ebenso $b_0 b_1$ und $c_0 c_1$), von Schröter als „Durchmesser" von C^3 bezeichnet, ist der Schnittlinie der entsprechenden Asymptotenebene τ_a mit ε_∞, $|\tau_a \varepsilon_\infty|$ conjugirt und enthält die Mittelpunkte aller zu τ_a paralleler Sehnen der Raumcurve C^3. Jede Ebene ξ durch einen solchen Durchmesser $a_0 a_1$ trifft daher die Curve C^3 in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt auf dem Durchmesser $a_0 a_1$ liegt, das heisst, dem zur Ebene ξ parallelen Ebenenbüschel ist eine Schwerlinie s_ξ zugeordnet, welche den Durchmesser $a_0 a_1$ schneidet. Anderseits muss eine derartige Schwerlinie s_ξ in ε_∞ der zu $a_0 a_1$ conjugirten Geraden $|\tau_a \varepsilon_\infty|$ begegnen, auf welcher der harmonische Pol der unendlich fernen Geraden von ξ in Bezug auf das Dreieck $a_\infty b_\infty c_\infty$ liegt (der Grenzfall des Schwerpunktes). Dreht man jetzt die Ebene ξ um den Durchmesser $a_0 a_1$ als Achse, so durchbohren die entsprechenden Schwerlinien s_ξ die beiden Geraden $a_0 a_1$ und $|\tau_a \varepsilon_\infty|$ in zwei projectiven Punktreihen und beschreiben daher die eine, zweifach schneidende Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids, welches durch die Leitcurve S^3 der Schwerlinien geht.

Folglich gehört $a_0 a_1$ und analog $b_0 b_1$, ebenso wie $c_0 c_1$, zu den Geraden, welche die cubische Raumcurve S^3 in je Einem Punkte treffen, das heisst, die drei Durchmesser enthalten die gesuchten Schnittpunkte der letzteren mit der Ebene μ.

Weiter ist jede Asymptote t_a der Raumcurve C^3 als eine besondere Schwerlinie derselben zu betrachten: eine beliebige Ebene π durch t_a schneidet nämlich die Curve C^3 noch in einem endlichen Punkte p, und für das singuläre Schnittpunktsdreieck $a_\infty a_\infty p$ stellt jeder Punkt auf t_a den Schwerpunkt dar, während die zur Ebene π planparallelen Schnittpunktsdreiecke sämmtlich ihren Schwerpunkt in a_∞ besitzen. Die Asymptote t_a von C^3 ist daher eine Bisecante der Raumcurve S^3, und da diese Secante die einfach schneidende Gerade $a_0 a_1$ in dem Punkte a_1 trifft, so liegt a_1 auf der Curve S^3, und nach Analogie gilt dasselbe von den Punkten b_1 und c_1, das heisst:

Die Leitcurve S^3 schneidet die Mittelpunktsebene μ von C^3 in den drei Punkten a_1, b_1, c_1, worin die drei Asymptoten der Raumcurve C^3 der Ebene μ begegnen.

Durch diese drei Punkte, in Verbindung mit den drei unendlich fernen a_∞, b_∞, c_∞ ist somit die cubische Raumcurve S^3 eindeutig bestimmt, und zwar ergiebt sich aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ und $a_0 b_0 c_0$ folgender einfache Zusammenhang der beiden Raumcurven S^3 und C^3:

Die Leitcurve S^3 und die ursprüngliche Raumcurve C^3 werden von ihrem gemeinsamen Mittelpunkt m aus durch ein und denselben Kegel dritter Ordnung K^3 projicirt, so dass die Projectionsstrahlen in m nach dem constanten Verhältniss $1 : -3$ getheilt werden, oder, anders ausgedrückt:

Die beiden Raumcurven S^3 und C^3 sind ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt m, so dass sich entsprechende Strecken wie $1 : -3$ verhalten.

3. Noch von anderer Seite her gelangt man zu der Leitcurve S^3, wenn man von den drei Asymptoten der Raumcurve C^3 ausgeht. Ein Büschel von parallelen Ebenen schneidet die letzteren in Dreiecken, deren Ecken drei projective, und zwar ähnliche Punktreihen durchlaufen. Daraus folgt ohne Weiteres: die Schwerpunkte dieser Schnittpunktsdreiecke beschreiben ebenfalls eine Gerade, eine Schwerlinie in Bezug auf die drei Asymptoten t_a, t_b, t_c. Die so definirte Gerade hat aber mit der entsprechenden Schwerlinie bezüglich der cubischen Raumcurve C^3 den unendlich fernen Punkt und ausserdem den diesem unendlich nahen Punkt auf der Geraden gemeinsam; die beiden Schwerlinien sind daher identisch, oder:

Das System der Schwerlinien in Bezug auf die cubische Raumcurve C^3 ist identisch mit demjenigen bezüglich ihrer drei Asymptoten t_a, t_b, t_c.[6])

Im Anschluss daran ergeben sich noch die Sätze:

Eine beliebige Ebene schneidet eine cubische Raumcurve und ihre drei Asymptoten in zwei cobarycentrischen Dreiecken, das heisst mit gemeinsamen Schwerpunkt.

Jede Schmiegungsebene einer cubischen Raumcurve schneidet die drei Asymptoten derselben in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt der zugehörige Schmiegungspunkt auf der Raumcurve ist.

Legt man jetzt eine Gerade g, welche die drei Asymptoten t_a, t_b, t_c bez. in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ trifft, so stellt die Punktgruppe $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ mit ihrem Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ ein in eine Gerade degenerirtes Schnittpunktsdreieck der drei Asymptoten vor. Jede Ebene durch g begegnet daher nach vorigem Satze der Raumcurve C^3 in einem Dreieck, dessen Schwerpunkt mit $\mathfrak{s}$ zusammenfällt, oder auch: Die ∞^1 Schwerlinien, welche dem Ebenenbüschel $g(\xi)$ durch eine solche Gerade g zugeordnet sind, gehen sämmtlich durch $\mathfrak{s}$. Der Punkt $\mathfrak{s}$ ist hiernach ein singulärer Punkt der durch die Schwerlinie von C^3 gebildeten Strahlencongruenz und liegt auf der Leitcurve S^3 derselben.

Dies führt zu dem Satze:

Die Geraden g, welche die drei Asymptoten einer cubischen Raumcurve C^3 schneiden, bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloids A^2. Dabei beschreibt der Schwerpunkt $\mathfrak{s}$ zu je drei Schnittpunkten einer Erzeugenden g mit den Asymptoten

eine zweite cubische Raumcurve S^3, die Leitcurve zu dem System der Schwerlinien von C^3.

Die Leitcurve S^3 liegt also auf dem Asymptoten-Hyperboloid A^2, und zwar trifft sie die Erzeugenden g einfach, dagegen die drei Asymptoten bez. ausser in ihren unendlich fernen Punkten in den drei Durchbohrungspunkten der Mittelpunktsebene μ. Die letzteren sind daher zugleich die Mitten der drei Strecken, welche durch je einen dieser Punkte gehen und die betreffenden beiden anderen Asymptoten schneiden.

Damit ist zugleich eine neue Construction einer cubischen Raumcurve (Hyperbel) gewonnen: als barycentrische Curve einer Regelschaar mit drei festen Leitlinien.

Das erhaltene Resultat lässt sich noch in anderer Weise ausdrücken, wie folgt:

Durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ im Raume lässt sich im Allgemeinen Eine und nur Eine Ebene legen, die aus der cubischen Raumcurve C^3 ein Dreieck mit $\mathfrak{p}$ als Schwerpunkt ausschneidet.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{s}$ dagegen auf der Leitcurve S^3 der Schwerlinien gehen die Ebenen von ∞^1 cobarycentrischen Schnittpunktsdreiecken, die alle ihren Schwerpunkt in $\mathfrak{s}$ haben, und zwar bilden diese Ebenen ein Büschel um eine Achse g, welche die drei Asymptoten von C^3 schneidet.

4. Wir können jetzt auch die projective Verwandtschaft der Strahlencongruenz der Schwerlinien von C^3 mit dem Strahlenfelde der unendlich fernen Ebene ε_∞ näher begründen. Die Schwerlinie $s_\mathfrak{x}$, welche nach 1. der Achse x_∞ zugeordnet ist, schneidet die Ebene ε_∞ in dem harmonischen Pole $\mathfrak{x}_\infty$ der Geraden x_∞ in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$. Die Beziehung zwischen Pol $\mathfrak{x}_\infty$ und Polare x_∞ ist dabei quadratisch, das heisst, wenn die Gerade x_∞ sich um einen festen Punkt in ε_∞ dreht, so beschreibt der zugehörige Pol $\mathfrak{x}_\infty$ einen Kegelschnitt X^2, der dem Fundamental-Dreieck $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ umschrieben ist.[7]) Die entsprechenden Schwerlinien gehen mithin durch die Punkte des Kegelschnitts X^2, und da sie anderseits Secanten der Leitcurve S^3 sind, so folgt daraus:

Jedem Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene ε_∞ ist im Allgemeinen eine Regelschaar zweiter Ordnung von Schwerlinien zugeordnet.

Liegt insbesondere der Mittelpunkt eines solchen Strahlenbüschels in dem unendlich fernen Kegelschnitt des Asymptoten-Hyperboloids A^2, so degenerirt die entsprechende Regelschaar in einen durch die Leitcurve S^3 gelegten Kegel zweiter Ordnung.

Die Ebenen eines beliebigen Ebenenbüschels sind dadurch projectiv bezogen auf die Erzeugenden einer Regelschaar zweiter Ordnung als conjugirte Schwerlinien, und das Erzeugniss beider Gebilde ist somit eine Raumcurve dritter Ordnung, oder:

Die Schwerpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3, deren Ebenen durch eine endliche Gerade l gehen, erfüllen eine andere cubische Raumcurve, welche mit der ersteren die drei unendlich fernen Punkte gemein hat und die Gerade l zweifach schneidet.

Ebenso ergiebt sich als Erzeugniss eines Ebenenbündels und der dazu projectiven Congruenz der Schwerlinien von C^3 eine Fläche dritter Ordnung, oder:

Die Schwerpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3, deren Ebenen durch einen festen endlichen Punkt $\mathfrak{p}$ laufen, beschreiben eine Fläche dritter Ordnung, welche durch den Punkt $\mathfrak{p}$ geht und die drei unendich fernen Punkte von C^3 zu Knotenpunkten hat.

Es mögen noch die beiden dualen Sätze dazu hier Platz finden:

Die Ebenen aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3, deren Schwerpunkte auf einer Geraden l liegen, osculiren eine cubische Parabel, welche l zum Schmiegungsstrahl hat.

Die Ebenen aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3, deren Schwerpunkte in einer Ebene ε gelegen sind, umhüllen eine Fläche dritter Klasse, welche die Ebene ε berührt und die unendlich ferne Ebene ε_∞ zur Doppelebene hat.

III. Das System der Höhenpunktslinien einer cubischen Raumcurve.

1. Projiciren wir in der obigen Weise unter I 2. ein System von Schnittpunktsdreiecken, das ein Parallelebenenbüschel aus C^3 ausschneidet, von $\mathfrak{a}_\infty$ auf eine Ebene ε des Büschels, so wird die entsprechende Höhenpunktslinie h von C^3 in die Directrix d der dort gefundenen Parabel $\mathfrak{P}^2$ projicirt. Die Directrix d trifft nun den Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$, das Projectionsbild der Raumcurve C^3, in zwei Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, die zugleich Höhenpunkt und Ecke von zwei Poncelet'schen Dreiecken vorstellen; das heisst, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind die Spitzen der beiden einzigen rechtwinkligen Dreiecke in der Poncelet'schen Figur. Die beiden Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind aber entstanden durch Projection von zwei entsprechenden Punkten $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ auf der Raumcurve C^3, die daher ebenfalls die Spitzen von zwei rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken von C^3 ergeben. Jede Höhenpunktslinie einer Raumcurve C^3 ist folglich gleichzeitig Secante derselben, oder:

Die Höhenpunkte einer Schaar planparalleler Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3 erfüllen eine Secante derselben. Die Schnittpunkte der letzteren mit C^3 sind die Spitzen der beiden einzigen rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke in der Schaar.

2. Sei jetzt g eine beliebige Secante der Raumcurve C^3, welche der letzteren in den Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ begegnet, so wird C^3 von den beiden Punkten aus bez. durch zwei quadratische Kegel $\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q}^2$ projicirt. Die Ebenen, welche diese beiden Kegel in rechten Winkeln oder aus der Raumcurve C^3 rechtwinklige Dreiecke schneiden, umhüllen daher je einen Kegel zweiter Klasse $\bar{\mathfrak{p}}^2$ und $\bar{\mathfrak{q}}^2$, welche ihrerseits die unendlich ferne Ebene ε_∞ in je einem Kegelschnitt $\mathfrak{s}_\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{q}^2$ treffen.[8]) Den vier gemeinsamen Tangenten der letzteren entsprechen folglich vier Paar parallele Tangentialebenen der Kegel $\bar{\mathfrak{p}}^2$ und $\bar{\mathfrak{q}}^2$, oder:

Jede Secante der Raumcurve C^3 ist gemeinsame Höhenpunktslinie zu vier Schaaren planparalleler Schnittpunktsdreiecke von C^3.

Da durch jeden Punkt im Raume Eine und nur Eine Secante an die cubische Raumcurve C^3 geht, so folgt daraus:

Durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ lassen sich im Allgemeinen vier Ebenen legen, deren Schnittpunktsdreiecke mit einer cubischen Raumcurve ihren gemeinsamen Höhenpunkt in $\mathfrak{x}$ besitzen.

Durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Raumcurve C^3 gehen ∞^1 rechtwinklige Schnittpunktsdreiecke (deren Höhenpunkt in $\mathfrak{p}$ liegt), deren Ebenen einen Kegel zweiter Klasse $\bar{\mathfrak{p}}^2$ umhüllen.

3. Die Congruenz der Höhenpunktslinien einer C^3 ist mithin identisch mit dem Secantensystem derselben und den Geraden der Ebene ε_∞ derart zugeordnet, dass jedem Strahl x_∞ in ε_∞ als Achse eines Parallelebenenbüschels Eine Secante h von C^3 als Höhenpunktslinie entspricht, dagegen umgekehrt zu jeder Secante h vier Geraden in ε_∞ gehören, das heisst, die Höhenpunktslinien h von C^3 sind ein-vierdeutig auf das Strahlenfeld der Ebene ε_∞ bezogen, oder bilden mit diesem eine Correspondenz [1,4].[9] Um den Grad dieser ein-vierdeutigen Verwandtschaft zu ermitteln, betrachten wir ein Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$ in der Ebene ε_∞. Jeder Geraden x_∞ entspricht als Höhenpunkt bez. des unendlich fernen Schnittpunktsdreiecks $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ von C^3 ein Punkt $\mathfrak{x}_\infty$ von folgender Construction:

Die Gerade x_∞ mag die Seiten $\mathfrak{c}_\infty\mathfrak{a}_\infty$ und $\mathfrak{c}_\infty\mathfrak{b}_\infty$ bez. in $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{v}$ treffen. Zu jedem dieser beiden Punkte ist dann auf x_∞ bez. des imaginären Kreises $\mathfrak{K}_\infty^2$ je ein Punkt $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{v}'$ conjugirt, und die beiden Verbindungslinien $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{w}'$ treffen sich in dem zu x_∞ zugeordneten Höhenpunkte $\mathfrak{x}_\infty$. Dreht sich jetzt der Strahl x_∞ um $\mathfrak{p}_\infty$, so beschreiben die Punkte $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{w}'$ je einen Kegelschnitt $\mathfrak{V}^2$ und $\mathfrak{W}^2$, deren Punkte projectiv auf einander bezogen sind. Der Strahl x_∞ geht nämlich durch den, beiden Kegelschnitten gemeinsamen Punkt $\mathfrak{p}_\infty$ und schneidet daher beide Curven in projectiven Punktreihen. Die Geraden $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{w}'$, welche bez. nach den entsprechenden Punkten der beiden projectiven

krummlinigen Punktreihen $\mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{W}^2$ gehen, beschreiben daher bei der Bewegung des Strahles x_∞ zwei Strahlenbüschel von der Correspondenz [2,2]. Das Erzeugniss derselben oder der Ort des Höhenpunktes $\mathfrak{x}_\infty$ ist folglich eine Curve von der Ordnung $2+2=4$, $\mathfrak{P}^4$, welche ersichtlich die drei Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ zu Doppelpunkten hat:

Jedem Strahlenbüschel in der unendlich fernen Ebene ε_∞ ist als Ort der zugehörigen Höhenpunkte in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ der Raumcurve C^3 eine Curve vierter Ordnung (sechster Klasse) $\mathfrak{P}^4{}_6$ mit drei Doppelpunkten in $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ zugeordnet, oder auch:

Die Geraden der unendlich fernen Ebene ε_∞ bilden mit den Punkten derselben als entsprechenden Höhenpunkten bez. des Dreiecks $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ eine vier-eindeutige Verwandtschaft vierten Grades, in der $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ ein Fundamentaldreieck vorstellt.

In dieser Verwandtschaft ist insbesondere der imaginäre Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ sich selbst zugeordnet, so dass jeder Tangente desselben ihr Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^2_\infty$ entspricht.

Die entsprechenden Höhenpunktslinien der Raumcurve C^3 erhalten wir jetzt, indem wir an diese von den Punkten einer derart ermittelten Curve $\mathfrak{P}^4$ bezüglich die Secanten legen. Letztere erfüllen als Gerade, die einer Curve vierter Ordnung $\mathfrak{P}^4$ einfach und einer Raumcurve dritter Ordnung C^3 zweifach begegnen, eine Regelfläche vom Grade $4.4=16$; indessen erniedrigt sich der Grad durch die drei Doppelpunkte der Curve $\mathfrak{P}_4$: $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$, die auf C^3 liegen, um $3.2.2=12$, das heisst:

Die Höhenpunktslinien der Raumcurve C^3, die einem Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$ in der unendlich fernen Ebene ε_∞ zugeordnet sind, beschreiben eine Regelfläche vierten Grades $R^4(h)$ mit der Raumcurve C^3 als Doppellinie.

Die so erhaltene Regelfläche $R^4(h)$ ist zugleich der Ort der Höhenpunkte in den Schnittpunktsdreiecken von C^3, deren Ebenen durch den Punkt $\mathfrak{p}_\infty$ gehen, oder:

Die Höhenpunkte aller Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3, deren Ebenen einer festen Geraden parallel laufen, erfüllen eine Regelfläche vierten Grades mit der Raumcurve C^3 als Doppellinie.

Anderseits schneidet jedes Ebenenbüschel durch eine Gerade g die unendlich ferne Ebene ε_∞ in einem Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$, welchem als Höhenpunktslinien bezüglich der Raumcurve C^3 die Erzeugenden einer solchen Regelfläche $R^4(h)$ zugeordnet sind. Jeder Ebene ε durch g entspricht daher eindeutig eine Erzeugende h der Fläche $R^4(h)$ als Höhenpunktslinie, welche die Ebene ε in dem Höhenpunkt ihres Schnittpunktsdreiecks mit der Raumcurve C^3 trifft. Das Erzeugniss des Ebenenbüschels $g(\varepsilon)$ mit der eindeutig darauf bezogenen Regelschaar $R^4(h)$ ist aber eine Raumcurve von der Ordnung $1+4=5$, H^5, so dass sich ergiebt:

Die Höhenpunkte der Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3, deren Ebenen durch eine feste, endliche Gerade g gehen, beschreiben eine Raumcurve fünfter Ordnung, H^5.

Dieselbe schneidet die unendlich ferne Ebene ε_∞ in den beiden Punkten, in welchen die beiden Berührungsebenen durch die Gerade g an den imaginären Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ diesen berühren und ferner in den drei unendlich fernen Punkten der Normalen zu den drei Ebenen, welche die Gerade g mit den drei unendlich fernen Punkten $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ von C^3 verbinden.

4. Insbesondere muss auch die Raumcurve H^5 der Raumcurve C^3 begegnen, da sie mit dieser auf derselben Regelfläche $R^4(h)$ liegt. Um die Schnittpunkte beider Curven zu ermitteln, projiciren wir die Raumcurve C^3 von einem ihrer Punkte $\mathfrak{x}$ durch einen Kegel zweiter Ordnung $\mathfrak{x}^2$. Dieser Kegel $\mathfrak{x}^2$ trifft die Raumcurve H^5 in $2.5 = 10$ Punkten, von denen zwei auf den beiden Erzeugenden der Regelfläche $R^4(h)$ liegen, die von dem Punkte $\mathfrak{x}$ auf C^3 ausgehen. Die übrigen $10 - 2 = 8$ Punkte stellen dagegen die den beiden Curven C^3 und H^5 gemeinsamen Punkte vor (als Schnittpunkte von je zwei Secanten der Raumcurve C^3). Das einem solchen Punkte entsprechende Schnittpunktsdreieck von C^3 hat folglich seinen Höhenpunkt in einer Ecke oder ist rechtwinklig, das heisst:

Durch eine Gerade g gehen die Ebenen von acht rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken der Raumcurve C^3, was zu dem Satze führt:

Alle Ebenen, welche aus einer cubischen Raumcurve C^3 rechtwinklige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Fläche achter Klasse, Φ^8.

Dieselbe enthält die drei unendlich fernen Secanten der Raumcurve C^3 als zweifache Gerade, die unendlich ferne Ebene als sechsfache Berührungsebene (durch eine unendlich ferne Gerade gehen die Ebenen von zwei rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecken, vergl. III, 1).

In dieser Fläche Φ^8 stellt ferner die zugehörige Raumcurve C^3 eine singuläre Curve vor, indem der Tangentialkegel von jedem Punkte der Raumcurve C^3 an die Fläche Φ^8 in einen Kegel zweiter Klasse und einen solchen sechster Klasse zerfällt (vergl. III, 2). Insbesondere osculirt die Raumcurve C^3 die Fläche Φ^8 in den acht imaginären Punkten auf C^3, deren Tangenten den imaginären Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ treffen (gleichwerthig mit $8.3 = 24$ gemeinsamen Ebenen): Denn die Schmiegungsebene in einem solchen ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{k}$ von C^3, als Null-Dreieck derselben aufgefasst, hat ihren entsprechenden Höhenpunkt in dem Schmiegungspunkte $\mathfrak{k}$ selber.

5. Wir gelangen damit zu einem Grenzfall des Höhenpunktes, der, so viel ich weiss, noch nirgends behandelt worden ist und der auch bei jeder anderen Curve sich darbietet. Drei unendlich nahe Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ einer (ebenen oder räumlichen) Curve bilden nämlich ein Null-Dreieck derselben, für das der Mittelpunkt des Umkreises bekanntlich in das Krümmungscentrum $\mathfrak{m}$ übergeht (Schnittpunkt von zwei sich folgenden Normalen der

Curve). In analoger Weise gehört aber auch zu jedem Null-Dreieck $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ ein Höhenpunkt $\mathfrak{h}$, den wir kurz als „Krümmungshöhenpunkt“ bezeichnen wollen: der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Lothe bez. von $\mathfrak{p}_1$ auf die benachbarte Tangente $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ und von $\mathfrak{p}_2$ auf die unendlich nahe Secante $\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_1$. Da ferner der Schwerpunkt eines solchen Null-Dreiecks mit dem betreffenden Curvenpunkt $\mathfrak{p}$ zusammenfällt, so führt der Euler-sche Satz über die drei singulären Punkte eines Dreiecks zu folgendem Ergebniss:

Jedem Punkte $\mathfrak{p}$ einer Raumcurve ist in seiner Schmiegungsebene ein Krümmungshöhenpunkt $\mathfrak{h}$ zugeordnet (als Höhenpunkt des entsprechenden Null-Dreiecks). Derselbe liegt auf der Hauptnormalen der Curve in $\mathfrak{p}$, und zwar in entgegengesetzter Richtung vom Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{m}$, so dass sich verhält

$$\mathfrak{p}\mathfrak{m} : \mathfrak{p}\mathfrak{h} = 1 : -2.$$

Eine Schmiegungsebene einer cubischen Raumcurve C^3 wird hiernach von der ihrer unendlich fernen Geraden conjugirten Höhenpunktslinie in dem zugehörigen Krümmungshöhenpunkt geschnitten, und wir erhalten folgende einfache Construction des letzteren, sowie des Krümmungsmittelpunktes:

Sei π die Schmiegungsebene einer cubischen Raumcurve C^3 im Punkte $\mathfrak{p}$, so legt man eine Parallelebene zu π und sucht den Höhenpunkt $\mathfrak{x}$ des Schnittpunktsdreiecks mit C^3. Die Secante von $\mathfrak{x}$ an die Raumcurve C^3 trifft dann die Schmiegungsebene π in dem gesuchten Krümmungshöhenpunkt $\mathfrak{h}$, und die Verlängerung von $\mathfrak{h}\mathfrak{p}$ um die Hälfte dieser Strecke ergiebt den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{m}$. Diese Construction lässt sich noch vereinfachen, wenn man die drei Asymptotenrichtungen von C^3 als bekannt voraussetzt.

Die Krümmungshöhenpunkte der Raumcurve C^3 erfüllen eine gewisse Curve, deren Ordnung sich wie folgt ermitteln lässt. Die Schmiegungsebenen der Raumcurve C^3 treffen die unendlich ferne Ebene ε_∞ in den Tangenten einer Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^3$, denen als Höhenpunkte in Bezug auf das Schnittpunktsdreieck $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ von C^3 in der oben behandelten Verwandtschaft vierten Grades die Punkte einer Curve $3.4 = 12$. Ordnung, $\mathfrak{C}^{12}$, zugeordnet sind mit $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ als sechsfachen Punkten. Daher beschreiben die entsprechenden Höhenpunktslinien, das heisst die Secanten von den Punkten der Curve $\mathfrak{C}^{12}$ an die Raumcurve C^3 eine Regelfläche, deren Grad in Folge der drei sechsfachen Punkte von $\mathfrak{C}^{12}$ auf C^3 sich auf $4.12 - 3.6.2 = 12$ erniedrigt. Jede Erzeugende dieser Regelfläche zwölften Grades R^{12} ist als Höhenpunktslinie auf eine Schmiegungsebene von C^3 eindeutig bezogen und trifft sie in dem zugehörigen Krümmungshöhenpunkt; der geometrische Ort der letzteren ist somit eine Raumcurve von der Ordnung $12 + 3 = 15$, das heisst:

Die Krümmungshöhenpunkte einer cubischen Raumcurve C^3 erfüllen eine Raumcurve fünfzehnter Ordnung, C^{15}.

Die so erhaltene Curve C^{15} begegnet offenbar der unendlich fernen Ebene ε_∞ in denselben $6 + 3.3$ Punkten, in denen diese von der Curve der Krümmungsmittelpunkte geschnitten wird, und beide Curven haben überdies noch mit der Raumcurve C^3 die nämlichen acht Punkte $\mathfrak{k}$ gemein, deren Tangenten den imaginären Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ treffen.[10])

6. Wir bestimmen endlich noch den Ort der Höhenpunkte eines Bündels von Schnittpunktsdreiecken. Die Ebenen durch einen festen endlichen Punkt $\mathfrak{p}$ schneiden die Raumcurve C^3 in Dreiecken, deren Höhenpunkte eine Fläche erfüllen, welche die Raumcurve C^3 als Doppellinie enthält; denn durch jede Gerade, die $\mathfrak{p}$ mit einem Punkte $\mathfrak{x}$ von C^3 verbindet, gehen zwei rechtwinklige Schnittpunktsdreiecke mit $\mathfrak{x}$ als Spitzen. Anderseits ist jede Secante von C^3 der Ort der Höhenpunkte für vier Büschel bezüglich einander paralleler Schnittpunktsdreiecke, das heisst, jede Secante von C^3 trifft die fragliche Fläche der Höhenpunkte ausser in den beiden als Doppelpunkten zu zählenden Schnittpunkten mit C^3 noch in vier anderen Punkten. Wir schliessen daraus:

Die Höhenpunkte aller Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve C^3, deren Ebenen durch einen festen endlichen Punkt $\mathfrak{p}$ laufen, erfüllen eine Fläche achter Ordnung, F^8.

Dieselbe hat den Punkt $\mathfrak{p}$ zum vierfachen Punkt, enthält die Raumcurve C^3 als Doppellinie und schneidet die unendlich ferne Ebene ausser dem imaginären Kreise $\mathfrak{K}^2_\infty$ einmal in dem unendlich fernen Schnittpunktsdreiseit von C^3 und ferner in dem Polardreiseit des letzteren in Bezug auf $\mathfrak{K}^2_\infty$.

IV. Das System der Mittellinien einer cubischen Raumcurve.

1. Die Mittelpunkte der Umkreise von einer Schaar planparalleler Schnittpunktsdreiecke der Raumcurve C^3 erfüllen nach I, 2 eine Gerade, die als Mittellinie bezeichnet wurde. Die umschriebenen Kreise selber aber beschreiben dabei eine durch die Raumcurve C^3 gehende Regelfläche zweiter Ordnung F^2, oder ihre Ebenen bilden das eine System cyklischer Ebenen von F^2. Denn die unendlich ferne Achse des entsprechenden Büschels von Parallelebenen schneidet den imaginären Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ in zwei Punkten, und durch diese geht Eine Regelfläche F^2, welche die Raumcurve C^3 enthält, und die von den Parallelebenen in Kreisen geschnitten wird. Wir gelangen damit zu folgender neuer Definition der Mittellinie:

Die Mittellinien der Raumcurve C^3 sind identisch mit dem System von Durchmessern, die den cyklischen Ebenen aller durch C^3 gelegten Flächen zweiter Ordnung in Bezug auf diese conjugirt sind.[11])

Die Verhältnisse der dadurch bestimmten Strahlencongruenz sind demnach wesentlich complicirter, als die oben abgeleiteten, und wir begnügen uns damit, blos Ordnung und Klasse der Congruenz festzustellen.

2. Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{p}$ des Raumes ist Mittelpunkt eines concentrischen Kugelbüschels, das auf einer Raumcurve C^3 eine Involution sechsten Grades erster Stufe einschneidet.[12]) Die Ebenen, welche je drei Punkte einer Gruppe von sechs Punkten verbinden, umhüllen daher (nach dem Princip von der Erhaltung der Anzahl) eine Curve von der Klasse $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. Folglich gehen durch den Punkt $\mathfrak{p}$ zehn Durchmesserebenen von Kugeln des Büschels, das heisst:

Ein Punkt $\mathfrak{p}$ ist im Allgemeinen gemeinsamer Mittelpunkt von zehn Kreisen, welche bezüglich eine cubische Raumcurve C^3 in je drei Punkten schneiden.

Zu jedem dieser zehn Kreise ist aber eine Mittellinie durch $\mathfrak{p}$ conjugirt, woraus folgt:

Die Congruenz der Mittellinien einer cubischen Raumcurve ist zehnter Ordnung.

3. Um auch die Klasse derselben zu ermitteln, beschränken wir uns auf die Untersuchung der Mittelpunktsebene μ von der Raumcurve C^3. Die Ebene μ enthält die drei Durchmesser $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1$ von C^3, die sich im Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ der Raumcurve begegnen. Ein solcher Durchmesser $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ ist der Ort für die Mittelpunkte aller zu der entsprechenden Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ parallelen Sehnen an die Raumcurve C^3; jeder Punkt auf $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ ist aber zugleich Mittelpunkt einer durch die Raumcurve C^3 gelegten Fläche zweiter Ordnung. Das Strahlentripel der drei Durchmesser in der Ebene μ stellt daher den vollständigen Schnitt der letzteren mit der Fläche dritter Ordnung F^3 vor, welche die Mittelpunkte des durch die Raumcurve C^3 gelegten Flächenbündels zweiter Ordnung enthält.

Und zwar ist jeder Durchmesser $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ Mittelpunktslinie eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung, die durch die Raumcurve C^3 gehen, da alle Flächen F^2 mit dem Mittelpunkt auf $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ die Secante $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_\infty$ an C^3 gemeinsam haben. In jeder Fläche F^2 des vorliegenden Büschels giebt es nun sechs cyklische Richtungsebenen und dementsprechend sechs dazu conjugirte Durchmesser oder Mittellinien, die sich in dem Mittelpunkte von F^2 auf $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ schneiden. Soll daher eine solche Mittellinie m in die Ebene μ fallen, so muss der unendlich ferne Punkt von m auf die unendlich ferne Gerade g_1^∞ der Ebene μ zu liegen kommen, oder die Ebene μ zu einer cyklischen Ebene in Bezug auf eine Fläche F^2 des Büschels conjugirt sein. Die Pole der Ebene μ bezüglich der Flächen des Büschels, das dem Durchmesser $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ zugeordnet ist, beschreiben nun in der unendlich fernen Ebene ε_∞ eine gerade Punktreihe a, nämlich die Durchschnittslinie der Schmiegungsebene $\tau_\mathfrak{a}$ (in $\mathfrak{a}_\infty$) mit der Ebene ε_∞. Anderseits schneiden die cyklischen

Ebenen des Flächenbüschels in ε_∞ eine Curve dritter Klasse $\mathfrak{K}^3$ ein: das Secantensystem, welches dem entsprechenden Kegelschnittbüschel in ε_∞ mit dem imaginären Kreis $\mathfrak{K}^2_\infty$ gemeinsam ist, sodass jeder Fläche F^2, bezüglich ihrem Kegelschnitt in ε_∞, sechs Secanten oder Tangenten von $\mathfrak{K}^3$ entsprechen. Da weiter von jedem Punkte auf a drei Tangenten an die Curve $\mathfrak{K}^3$ ausgehen, so wird dadurch eine Verwandtschaft [3,6] unter den Tangenten von $\mathfrak{K}^3$ begründet. In dieser Correspondenz giebt es $3+6=9$ Coincidenzen, das heisst, 9mal geht eine cyklische Ebene einer Fläche F^2 durch den Pol der Ebene μ in Bezug auf dieselbe Fläche. Davon sind indessen als illusorisch auszuschliessen die beiden Asymptotenebenen des hyperbolischen Cylinders $\mathfrak{a}^2_\infty$ durch die Raumcurve C^3, welche die Ebene ε_∞ in den beiden Secanten $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ treffen.

Dementsprechend bleiben $9-2=7$ Mittellinien, die von dem Durchmesser $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ ausgehen und in die Ebene μ fallen. Derselbe Schluss wiederholt sich für die beiden anderen Durchmesser $\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_0\mathfrak{c}_1$, so dass im Ganzen $3.7=21$ Mittellinien der Ebene μ angehören. Indem wir dies Ergebniss für eine beliebige Ebene verallgemeinern, gelangen wir zu dem Satz:

Die Congruenz der Mittellinien einer cubischen Raumcurve ist 21. Klasse.

V. Besondere Schnittpunktsdreiecke einer cubischen Raumcurve.

1. Die oben behandelten Strahlencongruenzen führen schliesslich dazu, die Gestalt der Schnittpunktsdreiecke auf der Raumcurve C^3 in ihrer Abhängigkeit von der Lage der Schnittebene zu ermitteln. So ergab sich unter III, 4 als Ort der rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke eine Fläche achter Klasse, Φ^8. Ebenso lässt sich die Enveloppe der Ebenen bestimmen, die gleichschenklige Dreiecke aus der Raumcurve C^3 ausschneiden, indem wir als Kriterium dafür feststellen: Die Euler'sche Gerade, das heisst die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Höhenpunkt, geht durch eine Ecke (die Spitze) des Dreiecks, ohne dass diese selber Höhenpunkt ist.

Betrachten wir zu dem Zwecke ein Ebenenbüschel durch eine beliebige Gerade l, so beschreiben die Schwerpunkte der betreffenden Schnittpunktsdreiecke mit der Raumcurve C^3 eine Raumcurve dritter Ordnung $S^3{}_l$; die mit C^3 die drei unendlich fernen Punkte $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ gemein hat (II, 4), dagegen die bezüglichen Höhenpunkte eine Raumcurve fünfter Ordnung H^5 (III, 3). Durch das Ebenenbüschel $l(\xi)$ sind die Punkte beider Raumcurven perspectiv auf einander bezogen, die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare auf $S^3{}_l$ und H^5, das heisst die Euler'schen Geraden der Schnittpunktsdreiecke, erzeugen daher eine Regelfläche vom Grade $3+5=8$, R^8, welche die Gerade l zur Leitlinie hat und drei unendlich ferne Erzeugende bezüglich durch $\mathfrak{a}_\infty$, $\mathfrak{b}_\infty$, $\mathfrak{c}_\infty$ besitzt. Die Regel-

fläche R^6 schneidet jetzt die Raumcurve C^3 ausser den drei gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkten in $8.3-3=21$ Punkten. Von diesen sind acht die Spitzen der acht rechtwinkligen Schnittpunktsdreiecke, deren Ebenen durch die Gerade l gehen, es bleiben also übrig: $21-8=13$ Punkte als Spitzen gleichschenkliger Schnittpunktsdreiecke, mit anderen Worten:

Alle Ebenen, die aus einer cubischen Raumcurve C^3 gleichschenklige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Fläche 13. Klasse, Φ^{13}. Dieselbe enthält die drei unendlich fernen Secanten von C^3 als dreifache Gerade, die unendlich ferne Ebene als neunfache Berührungsebene (in jedem Parallelebenenbüschel giebt es folglich vier gleichschenklige Schnittpunktsdreiecke mit der Raumcurve C^3). Endlich gehört die Raumcurve C^3 selber durch ihre Schmiegungsebenen der Fläche Φ^{13} an.

2. Von besonderem Interesse ist hierbei noch der Fall der gleichseitigen Schnittpunktsdreiecke, deren Ebenen ersichtlich eine dreifache Curve in der Fläche Φ^{13} bilden, da ein gleichseitiges Dreieck auf dreifache Art gleichschenklig ist. Ein gleichseitiges Dreieck ist dadurch gekennzeichnet, dass sein Schwerpunkt und Höhenpunkt zusammenfallen, und die vorliegende Frage lässt sich somit dahin formuliren: Den Ort der Ebenen zu finden, für welche die zugeordnete Schwerlinie und Höhenpunktslinie sich schneiden. In dem fraglichen Ort zählt zunächst die unendlich ferne Ebene ε_∞ vierfach, das heisst, es kommt viermal vor, dass für eine Gerade in ε_∞ der zugeordnete Schwerpunkt und Höhenpunkt in Bezug auf das unendlich ferne Schnittpunktsdreieck $\mathfrak{a}_\infty\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{c}_\infty$ coincidiren; denn aus einem Dreikant wird, wie leicht zu zeigen, durch eine Ebene in vier verschiedenen Stellungen ein gleichseitiges Dreieck ausgeschnitten.

Legen wir jetzt durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ der unendlich fernen Ebene ein Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$, so beschreiben die den Geraden x_∞ in Bezug auf die Raumcurve C^3 zugeordneten Schwerlinien eine Regelfläche zweiten Grades $R^2(s)$, dagegen die zugeordneten Höhenpunktslinien eine Regelfläche vierten Grades $R^4(h)$ (II, 4 und III, 3). Die beiden Regelflächen $R^2(s)$ und $R^4(h)$ schneiden sich dann in einer Curve von der Ordnung $2.4=8$, C^8, so dass jede Erzeugende s von $R^2(s)$ vier Punkte, jede Erzeugende h von $R^4(h)$ zwei Punkte mit der Curve C^8 gemein hat. Da nun die Erzeugenden s und h durch das Strahlenbüschel $\mathfrak{p}(x_\infty)$ eindeutig auf einander bezogen sind, so entsteht zwischen den entsprechenden Punkten auf der Raumcurve C^8 eine Correspondenz [4,2] mit $4+2=6$ Coincidenzen, das heisst, für sechs Strahlen durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ in der Ebene ε_∞ schneiden sich bezüglich die zugeordnete Schwerlinie und Höhenpunktslinie in einem Punkte auf der Raumcurve C^8. Eine Ebene, die einen solchen singulären Strahl mit dem entsprechenden Coincidenzpunkte auf C^8 verbindet, schneidet folglich die Raumcurve C^3 in einem gleichseitigen Dreieck.

Wir schliessen daraus:

Durch einen unendlich fernen Punkt gehen die Ebenen von sechs gleichseitigen endlichen Schnittpunktsdreiecken, und da die unendlich ferne Ebene selber als vierfache Schmiegungsebene der gesuchten Raumcurve gilt, so ergiebt sich als Endresultat:

Alle Ebenen, die aus einer cubischen Raumcurve gleichseitige Dreiecke ausschneiden, umhüllen eine Raumcurve zehnter Klasse, welche die unendlich ferne Ebene vierfach osculirt.

Der letzte Satz ist übrigens nur ein specieller Fall von der allgemeinsten Aufgabe dieser Art, deren Lösung aber andere Mittel als die oben angewandten erfordert, nämlich: „Den Ort der Ebenen zu finden, die aus einer cubischen Raumcurve Dreiecke von constanter Gestalt (die einem gegebenen Dreiecke ähnlich sind) ausschneiden".

Literatur.

1. Die angeführten Sätze sind zuerst von Weill in den Nouvelles annales de mathématiques, II[e] série, t. XIX, p. 367 analytisch bewiesen. Der nachfolgende synthetische Beweis dürfte sich durch Einfachheit empfehlen, wenn er auch zunächst nur für die umschriebene Ellipse gilt.
2. Reye: Geometrie der Lage II, 15. Vortrag.
3. Der erste Theil dieses Satzes von der Schwerlinie stammt in seiner allgemeinsten Form von Hurwitz (vergl. die bez. Mittheilung von Geisenheimer: „Die Erzeugung polarer Elemente" u. s. w. in der Zeitschrift für Mathematik und Physik XXXI, 4, S. 211); der Beweis von Hurwitz ist mir jedoch nicht zugänglich gewesen. — Einen besonderen Fall der Höhenpunktslinie ferner, nämlich wenn dieselbe senkrecht auf den Ebenen des betreffenden Parallelebenenbüschels steht, erwähnt schon Reye in der Abhandlung: „Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der cubischen Raumcurven" in der Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 1890. S. 56.
4. Geisenheimer a. a. O. S. 207.
5. Schröter: „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung" § 39. Die in diesem Werke durchgeführte Bezeichnung habe ich ebenfalls angenommen.
6. Dieser Satz ist ein besonderer Fall einer allgemeinen, für jede Raumcurve giltigen Beziehung, die Geisenheimer nach Analogie eines Satzes von Chasles abgeleitet hat, a. a. O. S. 205.
7. Vergl. Reye: „Geometrie der Lage" II, 16. Vortrag.

8. Der reciproke Fall zu einem bekannten Steiner'schen Satze aus der Theorie der Kegelschnitte; vergl. auch Reye: „Geometrie der Lage" I, 2. Aufl. S. 184.
9. Für die Untersuchung dieser und der weiterhin gebrauchten Correspondenzen war massgebend:
   R. Sturm: „Die Gebilde der Liniengeometrie" I, S. 16 flg.
10. Vergl. Sturm: „Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve", Zeitschrift für Mathematik und Physik, 40. Jahrgang, 1895, 1. Heft, § 6.
11. Den Zusammenhang der cyklischen Ebenen und ihrer Kreise betrachten von anderen Gesichtspunkten aus: Sturm, a. a. O. und Timerding: „Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren". Inaugural-Dissertation. Strassburg 1894.
12. Sturm a. a. O., § 14; vergl. auch Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie des Raumes" II, 3. Auflage, Literatur-Nachweisungen, Nr. 271.

Pless, 24. December 1894.

XII.

Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven.

Von

R. Mehmke

in Stuttgart.

Im 25. Bande der „Mathematischen Annalen" S. 293 (1885) hat H. Schröter eine grosse Anzahl von metrischen Eigenschaften derjenigen Raumcurven dritter Ordnung, für welche die unendlich ferne Ebene Schmiegungsebene ist, also der sogenannten cubischen Parabeln, abgeleitet. Da es bei diesen Eigenschaften sich wesentlich um die Rauminhalte von Tetraedern handelt, welche zu einer cubischen Parabel in bestimmter Beziehung stehen, der Inhalt eines Tetraeders aber bei projectiven Umformungen bis auf gewisse, von der Lage der Ecken des Tetraeders abhängende Factoren erhalten bleibt, so ist von vornherein klar, dass jene Schröter-schen Sätze projectiv verallgemeinert, das heisst auf eine Form gebracht werden können, in der sie für jede Raumcurve dritter Ordnung gelten, wobei an Stelle der unendlich fernen Ebene eine beliebige Schmiegungsebene der Curve tritt. Diese Verallgemeinerung könnte auf ziemlich mechanische Weise mit Hilfe der für jede Collineation bestehenden Transformationsformeln für projectiv-metrische Grössen vorgenommen werden. Ich ziehe jedoch eine directe Entwickelung vor, weil ich die fraglichen Sätze von Schröter nicht blos zu verallgemeinern, sondern durch eine Reihe neuer Sätze verwandter Art, in denen zum Theil ausser Rauminhalten bezw. Massen und Abständen auch noch andere metrische Grössen vorkommen, zu vermehren wünsche. Vielleicht darf ich auf die in den Paragraphen 7, 8 und 9 mitgetheilten Uebertragungsprincipien besonders hinweisen, durch deren Anwendung sich aus jeder Beziehung zwischen Strecken einer und derselben geraden Linie etliche metrische Eigenschaften einer beliebigen cubischen Raumcurve ergeben.* Das Princip der Reci-

* Nachdem ich (vor einigen Jahren) diese Uebertragungsprincipien gefunden hatte, wurde durch das „Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik" meine Aufmerksamkeit auf eine Abhandlung des Herrn Gino Loria: „Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito" (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Dicembre 1885) gelenkt. Herr Loria war so liebenswürdig, mir einen Abdruck derselben zu schicken, aus welchem ich ersah, dass ihm das dritte der fraglichen Uebertragungsprincipien, wenn auch in der speciellen Form, die es bei der cubischen Parabel annimmt, schon bekannt war.

procität oder Dualität, welches in Schröter's Arbeit nicht zum Ausdruck gekommen ist, wird hier volle Berücksichtigung finden. Aehnliche Untersuchungen, wie die folgenden, kann man schon bei den Kegelschnitten und weiterhin bei den Curven n^{ter} Ordnung im Raum von n-Dimensionen, dann auch bei den Flächen zweiten Grades u. s. w. anstellen, worauf ich anderwärts näher eingehen werde.

§ 1. Bezeichnungen.

Wir wollen Punkte immer mit kleinen lateinischen, Geraden mit grossen lateinischen, Ebenen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen.

Es bedeute — ich werde im Folgenden Grassmann's Rechnung mit Punkten, Geraden und Ebenen anwenden* — $|p|$, $|G|$, $|\varepsilon|$ den Coefficienten (metrischen Werth oder das Gewicht) des Punktes p bezw. der Geraden G, der Ebene ε, so dass

$$\frac{p}{|p|}, \quad \frac{G}{|G|}, \quad \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}$$

den Punkt p bezw. die Gerade G, die Ebene ε mit dem Gewicht Eins versehen vorstellt. Ferner bezeichne $\overline{p\varepsilon}$ die Entfernung des Punktes p von der Ebene ε; $mom\,\overline{GG_1}$ das Moment der beiden Geraden G und G_1**; $mom\,\overline{pp_1,\, G}$ das Moment der als Kraft aufgefassten Strecke pp_1 in Bezug auf die Gerade G als Achse; $mom\,\overline{\varepsilon\varepsilon_1,\, G}$ die zur vorhergehenden dualistische Grösse, nämlich das Product aus dem sin des von den Ebenen ε und ε_1 gebildeten Winkels und dem Moment ihrer Schnittlinie in Bezug auf die Gerade G, welche Grösse das Moment des Flächenwinkels $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$ in Bezug auf G genannt werden mag; $\overline{pp_1p_2p_3}$ den sechsfachen Rauminhalt des Tetraeders mit den Ecken p, p_1, p_2, p_3, und dualistisch dazu $sin\,\overline{\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ den „Sinus" des durch die vier Ebenen ε, ε_1, ε_2, ε_3 gebildeten Vierflachs, welcher u. A. gleich dem Product aus den sin der Flächenwinkel an irgend zwei gegenüberliegenden Kanten des Vierflachs und dem Moment dieser Kanten ist. Auf die Bestimmung der Vorzeichen dieser metrischen Grössen einzugehen, ist für das Folgende nicht nöthig. Wenn wir mit Grassmann bei äusseren Producten eckige Klammern benützen, so erhalten wir:

$$[p\varepsilon] = \overline{p\varepsilon}.|p|.|\varepsilon|,$$

$$[GG_1] = mom\,\overline{GG_1}.|G|.|G_1|,$$

$$[pp_1G] = mom\,\overline{pp_1,\, G}.|p|.|p_1|.|G|,$$

---

* Siehe Grassmann's „Ausdehnungslehre" von 1862 (Gesammelte Werke I. Bd. 2. Theil) 1. Abschnitt, Kapitel 5.

** A. Cayley, Comptes rendus de l'Academie des Sciences t. 61 p. 829, 1865: „Je nomme moment de deux droites la distance perpendiculaire de ces droites, multipliée par le sinus de leur inclinaison mutuelle."

$$[\varepsilon\varepsilon_1 G] = mom\, \overline{\varepsilon\varepsilon_1,\ G}\,.|\varepsilon|.|\varepsilon_1|.|G|,$$

$$[p p_1 p_2 p_3] = \overline{p p_1 p_2 p_3}\,.|p|.|p_1|.|p_2|.|p_3|,$$

$$[\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3] = sin\, \overline{\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\,.|\varepsilon|.|\varepsilon_1|.|\varepsilon_2|.|\varepsilon_3|.$$

Hat man irgend eine Gleichung zwischen äusseren Producten, welche in Bezug auf alle in ihr enthaltenen Punkte, Geraden und Ebenen homogen ist, und führt man statt der äusseren Producte die zugehörigen metrischen Grössen ein, so heben sich offenbar die als Factoren heraustretenden Gewichte jener Punkte, Geraden und Ebenen gegenseitig auf, das heisst, **man kann in jeder solchen Gleichung ohne Weiteres die äusseren Producte durch die entsprechenden metrischen Grössen ersetzen.** Hierauf beruhen alle Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung. Wie Grassmann schon in seiner „Ausdehnungslehre" von 1844 (Gesammelte Werke Band 1, Theil 1, § 165) bemerkt hat, bleibt jede Gleichung der besprochenen Art bestehen, wenn statt der darin vorkommenden Elemente die entsprechenden Elemente eines beliebigen collinear-verwandten Systems gesetzt werden. **Daher sind alle metrischen Eigenschaften der allgemeinsten cubischen Raumcurven, die ich im Folgenden ableiten werde, projectiv.***

§ 2. Darstellung der Curve, ihrer Tangenten und Schmiegungsebenen.

Eine beliebige Raumcurve dritter Ordnung lässt sich durch die Gleichung

$$x = a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d \tag{1}$$

darstellen, in welcher x einen mit dem Parameter λ veränderlichen Punkt der Curve bezeichnet. Die Punkte a und d gehören der Curve an — sie entsprechen den Werthen 0 und ∞ des Parameters — und können beliebig auf ihr gewählt werden. Es ist b der Punkt, in welchem die in a an die Curve gelegte Tangente ab die zum Punkt d gehörige Schmiegungsebene bcd der Curve schneidet, ebenso c der Schnittpunkt der zum Punkt a gehörigen Schmiegungsebene abc mit der Curventangente cd zum Berührungspunkt d, oder es bilden die Punkte a, b, c, d ein sogenanntes Schmiegungstetraeder der Curve (Schröter a. a. O. S. 294).**

* Ich verstehe hier unter projectiven Eigenschaften geometrischer Gebilde dasselbe, wie Poncelet, der Schöpfer dieses Begriffs, Möbius und Andere. Sehr mit Unrecht, wie mir scheint, wird gegenwärtig von vielen Geometern das Wort projectiv im Sinne von „descriptiv, graphisch, situell, lagengeometrisch" angewendet, also um das Gegentheil von metrisch auszudrücken, während man doch eine Unzahl projectiver Eigenschaften und Ausdrücke kennt — ich erinnere blos an das Verhältniss der Gauss'schen Krümmungsmaasse zweier sich berührenden Flächen im Berührungspunkt — die entschieden metrischer Natur sind.

** Vergl. Möbius: „Barycentrischer Calcul" (Gesammelte Werke Bd. 1) § 98.

Durch Ableitung der Gleichung 1) nach λ erhält man

$$\frac{dx}{d\lambda} = 3(b + 2\lambda c + \lambda^2 d),$$

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} = 6(c + \lambda d)$$

und durch äussere Multiplication dieser Gleichungen mit 1), wenn man noch

$$\frac{1}{3}\left[x\frac{dx}{d\lambda}\right] = X, \quad \frac{1}{18}\left[x\frac{dx}{d\lambda}\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right] = \xi$$

setzt:

2) $$X = [ab] + 2\lambda[ac] + \lambda^2[ad + 3bc] + 2\lambda^3[bd] + \lambda^4[cd],$$

3) $$\xi = [abc] + \lambda[abd] + \lambda^2[acd] + \lambda^3[bcd].$$

Offenbar ist X die Tangente, ξ die Schmiegungsebene, welche die Curve im Punkt x hat. Wir setzen nun

4) $$[abc] = \alpha, \quad [abd] = 3\beta, \quad [acd] = 3\gamma, \quad [bcd] = \delta.$$

Werden die Punkte a, b, c, d alle mit einer und derselben willkürlichen Zahl multiplicirt, so ändert sich die Lage dieser Punkte nicht, und ebenso wenig die Lage des durch die Gleichung 1) gelieferten Punktes x, seiner Tangente X und Schmiegungsebene ξ. Wir dürfen daher voraussetzen, die Gewichte der Punkte a, b, c, d, auf deren Verhältnisse es allein ankommt, seien so gewählt, dass das äussere Product $[abcd]$, welches nicht Null sein kann, irgend einen bestimmten Werth erhält. Wir machen die Annahme:

5) $$[abcd] = 3.$$

Unter Berücksichtigung derselben ergiebt sich aus den Gleichungen 4) durch äussere Multiplication:

6) $$\begin{cases} [\alpha\beta] = [ab], & [\alpha\gamma] = [ac], & [\alpha\delta] = 3[bc], \\ 3[\beta\gamma] = [ad], & [\beta\delta] = [bd], & [\gamma\delta] = [cd]; \end{cases}$$

ferner:

4') $$[\alpha\beta\gamma] = a, \quad [\alpha\beta\delta] = 3b, \quad [\alpha\gamma\delta] = 3c, \quad [\beta\gamma\delta] = d.$$

Die Gleichungen 3), 2), 1) können jetzt in der neuen Form geschrieben werden:

1') $$\xi = \alpha + 3\lambda\beta + 3\lambda^2\gamma + \lambda^3\delta,$$

2') $$X = [\alpha\beta] + 2\lambda[\alpha\gamma] + \lambda^2[\alpha\delta + 3\beta\gamma] + 2\lambda^3[\beta\delta] + \lambda^4[\gamma\delta],$$

3') $$x = [\alpha\beta\gamma] + \lambda[\alpha\beta\delta] + \lambda^2[\alpha\gamma\delta] + \lambda^3[\beta\gamma\delta].$$

Es stimmen die Gleichungen 1) und 1'), 2) und 2'), 3) und 3') der Gestalt nach vollständig überein, woraus wir schliessen, dass zu jeder, durch eine Gleichung zwischen äusseren Producten darstellbaren Beziehung zwischen irgend welchen Punkten, Tangenten und Schmiegungsebenen der cubischen Raumcurve — und dieser Art sind alle metrischen Eigenschaften der allgemeinsten cubischen Raumcurven, die später entwickelt werden

sollen — eine dualistische vorhanden ist, die dadurch aus der ersten abgeleitet werden kann, dass man statt eines jeden Punktes der Curve die zugehörige Schmiegungsebene, statt einer jeden Schmiegungsebene ihren Berührungs- oder Anschmiegungspunkt setzt, eine jede Tangente der Curve aber beibehält.* Natürlich muss zugleich statt der Entfernung zweier beliebigen Punkte der *sin* des Winkels der entsprechenden Ebenen, statt des sechsfachen Inhalts eines Tetraeders der *sin* des entsprechenden Vierflachs u. s. w. genommen und, falls in dem betreffenden Satz das Schmiegungstetraeder $abcd$ vorkommt, b mit β, c mit γ und umgekehrt vertauscht werden.

§ 3.

Da eine Raumcurve dritter Ordnung bestimmt ist, wenn von ihr ein beliebiges Schmiegungstetraeder $abcd$ und noch irgend ein Punkt x gegeben sind, so müssen sich beim Hinzutreten der Tangente X und der Schmiegungsebene ξ der Curve in diesem Punkt bereits Beziehungen ergeben. Um solche zu finden, multipliciren wir zunächst Gleichung 1) der Reihe nach mit den Seitenflächen, Gleichung 2) mit den Kanten, Gleichung 3) mit den Ecken des Schmiegungstetraeders $abcd$, wodurch wir erhalten:

$$7)\quad \begin{cases} [xbcd] = [abcd], & [axcd] = 3\lambda[abcd], \\ [abxd] = 3\lambda^2[abcd], & [abcx] = \lambda^3[abcd]; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} [abX] = \lambda^4[abcd], & [acX] = -2\lambda^3[abcd], \\ [adX] = 3\lambda^2[abcd], & [bcX] = \lambda^2[abcd], \\ [bdX] = -2\lambda[abcd], & [cdX] = [abcd]; \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} [a\xi] = \lambda^3[abcd], & [b\xi] = -\lambda^2[abcd], \\ [c\xi] = \lambda[abcd], & [d\xi] = -[abcd]. \end{cases}$$

Wir fügen noch die aus 4) und 7) folgenden Gleichungen

$$9')\quad \begin{cases} [x\alpha] = -\lambda^3[abcd], & [x\beta] = \lambda^2[abcd], \\ [x\gamma] = -\lambda[abcd], & [x\delta] = [abcd] \end{cases}$$

hinzu, sowie die aus 4) durch äussere Multiplication mit a, b, c, d hervorgehenden:

$$10)\quad [a\delta] = -3[b\gamma] = 3[c\beta] = -[d\alpha] = [abcd].$$

---

* Offenbar ist die Ebene π, welche aus den Ebenen α, β, γ, δ mittelst derselben Zahlen (Coordinaten) abgeleitet wird, wie ein beliebiger Punkt p aus den Punkten a, b, c, d die Nullebene des Punktes p in dem durch die betrachtete Raumcurve dritter Ordnung bestimmten Nullsystem. Es erweisen sich auch manche der später aufzustellenden Sätze bei näherer Betrachtung als besondere Fälle von metrischen Sätzen über Nullsysteme, worauf jedoch hier nicht eingegangen werden soll.

Aus den Gleichungen 7) bis 10) folgt:

$$3\frac{[x\alpha][d\xi]}{[d\alpha]} = -\frac{[x\beta][c\xi]}{[c\beta]} = \frac{[x\gamma][b\xi]}{[b\gamma]} = -3\frac{[x\delta][a\xi]}{[a\delta]}$$
$$(= -3\lambda^3[abcd]),$$
$$3[xbcd][a\xi] = -[axcd][b\xi] = [abxd][c\xi] = -3[abcx][d\xi]$$
$$(= 3\lambda^3[abcd]^2),$$
$$12[abX][cdX] = 3[acX][bdX] = 4[adX][bcX]$$
$$(= 12\lambda^4[abcd]^2),$$
$$6[abX][c\xi][d\xi] = 3[acX][b\xi][d\xi] = 2[adX][b\xi][c\xi]$$
$$= 6[bcX][a\xi][d\xi] = 3[bdX][a\xi][c\xi] = 6[cdX][a\xi][b\xi]$$
$$(= -6\lambda^5[abcd]^3).$$

Da diese Gleichungen alle homogen sind, so dürfen (nach § 1) die äusseren Producte darin durch die zugehörigen metrischen Grössen ersetzt werden; auch versteht es sich nach § 2 von selbst, dass die dualistischen Gleichungen ebenfalls gelten. Wir haben somit den Satz:

Bei jeder Raumcurve dritter Ordnung ist, wenn x einen beliebigen Punkt derselben, X die Tangente, ξ die Schmiegungsebene in diesem Punkt, $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder, von welchem die Ecken a und d auf der Curve liegen, und α, β, γ, δ beziehentlich die der Ecke d, c, b, a gegenüberliegende Seitenebene dieses Tetraeders bezeichnet:

$$3\frac{\overline{x\alpha}.\overline{d\xi}}{\overline{d\alpha}} = -\frac{\overline{x\beta}.\overline{c\xi}}{\overline{c\beta}} = \frac{\overline{x\gamma}.\overline{b\xi}}{\overline{b\gamma}} = -3\frac{\overline{x\delta}.\overline{a\xi}}{\overline{a\delta}};$$

$$3\,\overline{xbcd}.\overline{a\xi} = -\overline{axcd}.\overline{b\xi} = \overline{abxd}.\overline{c\xi} = -3\,\overline{abcx}.\overline{d\xi};$$

$$12\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,X} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{ac,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{bd,X} = 4\,\mathrm{mom}\,\overline{ad,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{bc,X};$$

$$12\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\beta,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{\gamma\delta,X} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\gamma,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{\beta\delta,X} = 4\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\delta,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{\beta\gamma,X};$$

$$6\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}.\overline{c\xi}.\overline{d\xi} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{ac,X}.\overline{b\xi}.\overline{d\xi} = 2\,\mathrm{mom}\,\overline{ad,X}.\overline{b\xi}.\overline{c\xi}$$
$$= 6\,\mathrm{mom}\,\overline{bc,X}.\overline{a\xi}.\overline{d\xi} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{bd,X}.\overline{a\xi}.\overline{c\xi} = 6\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,X}.\overline{a\xi}.\overline{b\xi};$$

$$6\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\beta,X}.\overline{\gamma x}.\overline{\delta x} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\gamma,X}.\overline{\beta x}.\overline{\delta x} = 2\,\mathrm{mom}\,\overline{\alpha\delta,X}.\overline{\beta x}.\overline{\gamma x}$$
$$= 6\,\mathrm{mom}\,\overline{\beta\gamma,X}.\overline{\alpha x}.\overline{\delta x} = 3\,\mathrm{mom}\,\overline{\beta\delta,X}.\overline{\alpha x}.\overline{\gamma x} = 6\,\mathrm{mom}\,\overline{\gamma\delta,X}.\overline{\alpha x}.\overline{\beta x}.$$

Anmerkung. Die erste der obigen Reihen von Gleichungen, welche übrigens dualistisch zu sich selbst und der folgenden gleichwerthig ist, kann dazu benützt werden, die Schmiegungsebene in einem gegebenen Punkt x der Curve oder den Berührungspunkt einer gegebenen Schmiegungsebene ξ zu construiren, da sie die Verhältnisse der Abstände der Ebene ξ von den Ecken des als bekannt angesehenen Schmiegungstetraeders $abcd$

bezw. die Verhältnisse der Abstände des Punktes x von den Seitenebenen jenes Schmiegungstetraeders, kennen lehrt. Aehnliches gilt für die übrigen Gleichungen.

§ 4.

In diesem und dem folgenden Paragraphen wollen wir eine Reihe metrischer Eigenschaften der cubischen Raumcurven zusammenstellen, in welchen ausser einem beliebigen Schmiegungstetraeder $abcd$ der Curve noch zwei willkürliche Punkte derselben mit den zugehörigen Tangenten und Schmiegungsebenen vorkommen. Einem beliebigen Werthe μ des Parameters entspreche auf der Curve der Punkt y, und es sei Y die Tangente, η die Schmiegungsebene in diesem Punkt. Schreibt man in den Gleichungen 1), 2), 3) μ statt λ und verbindet die neuen Gleichungen mit den ursprünglichen durch äussere Multiplication, so ergiebt sich:

$$11)\qquad [x\eta] = [\xi y] = (\mu-\lambda)^3[abcd],$$

$$12)\qquad [XY] = (\mu-\lambda)^4[abcd].$$

Mit Hilfe der Gleichungen 7) bis 12) und derjenigen, die aus 7) bis 10) durch Vertauschung von λ mit μ, x mit y u. s. w. entstehen, bilden wir folgende Proportionen:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{[x\alpha][d\eta]}{[d\alpha]} : \dfrac{[x\beta][c\eta]}{[c\beta]} : \dfrac{[x\gamma][b\eta]}{[b\gamma]} : \dfrac{[x\delta][a\eta]}{[a\delta]} : [x\eta] \\ = \dfrac{[y\delta][a\xi]}{[a\delta]} : \dfrac{[y\gamma][b\xi]}{[b\gamma]} : \dfrac{[y\beta][c\xi]}{[c\beta]} : \dfrac{[y\alpha][d\xi]}{[d\alpha]} : [y\xi] \\ = \lambda^3 : -3\lambda^2\mu : 3\lambda\mu^2 : -\mu^3 : (\lambda-\mu)^3; \end{cases}$$

$$14)\quad \begin{cases} [xbcd][a\eta] : [axcd][b\eta] : [abxd][c\eta] : [abcx][d\eta] : [abcd][x\eta] \\ = [abcy][d\xi] : [abyd][c\xi] : [aycd][b\xi] : [ybcd][a\xi] : [abcd][y\xi] \\ = \mu^3 : -3\mu^2\lambda : 3\mu\lambda^2 : -\lambda^3 : (\mu-\lambda)^3; \end{cases}$$

$$15)\quad \begin{cases} [abX][cdY] : [acX][bdY] : [adX][bcY] : [bcX][adY] \\ \qquad : [bdX][acY] : [cdX][abY] : [abcd][XY] \\ = \lambda^4 : 4\lambda^3\mu : 3\lambda^2\mu^2 : 3\lambda^2\mu^2 : 4\lambda\mu^3 : \mu^4 : (\lambda-\mu)^4; \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} [abX][c\eta][d\eta] : [acX][b\eta][d\eta] : [adX][b\eta][c\eta] \\ : [bcX][a\eta][d\eta] : [bdX][a\eta][c\eta] : [cdX][a\eta][b\eta] \\ = \lambda^4 : 2\lambda^3\mu : 3\lambda^2\mu^2 : \lambda^2\mu^2 : 2\lambda\mu^3 : \mu^4. \end{cases}$$

Man kann aus diesen Proportionen auf eine Anzahl verschiedener Arten λ und μ eliminiren, indem man die einzelnen Glieder lediglich durch Multiplication verbindet. Die sich ergebenden Gleichungen sind homogen, weshalb sofort metrische Grössen statt der äusseren Producte eingeführt werden können. Wo sich durch Anwendung des Princips der Reciprocität neue Gleichungen ergeben, fügen wir diese hinzu, lassen dagegen solche Gleichungen weg, die aus bereits vorhandenen entweder durch Vertauschung

von x, X, ξ mit y, Y, η, oder durch Vertauschung von a mit d und gleichzeitige Vertauschung von b mit c, α mit δ, β mit γ abgeleitet werden können. Wir erhalten so:

Ist $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer Raumcurve dritter Ordnung allgemeinster Art, wobei die Ecken a und d diejenigen sein mögen, welche auf der Curve selbst liegen, und die den Ecken d, c, b, a gegenüberliegenden Seitenebenen desselben beziehentlich mit α, β, γ, δ bezeichnet werden sollen; sind ferner x und y zwei beliebige Punkte dieser Curve, X und Y bezw. ξ und η die Tangenten bezw. Schmiegungsebenen der Curve in jenen Punkten, so hat man:

$$\overline{x\alpha}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{y\xi}\,.\,\overline{a\delta} = \overline{y\delta}\,.\,\overline{a\xi}\,.\,\overline{x\eta}\,.\,\overline{d\alpha},$$

$$\overline{x\beta}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{y\xi}\,.\,\overline{b\gamma} = \overline{y\gamma}\,.\,\overline{b\xi}\,.\,\overline{x\eta}\,.\,\overline{c\beta},$$

$$9\,\overline{x\alpha}\,.\,\overline{x\delta}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{b\gamma}\,.\,\overline{c\beta} = \overline{x\beta}\,.\,\overline{x\gamma}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{a\delta}\,.\,\overline{d\alpha},$$

$$3\,\overline{x\alpha}\,.\,\overline{x\gamma}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{c\beta}^2 = \overline{x\beta}^2.\,\overline{c\eta}^2.\,\overline{b\gamma}\,.\,\overline{d\alpha},$$

$$\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{y\xi} = \overline{abcy}\,.\,\overline{d\xi}\,.\,\overline{x\eta},$$

$$\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}\,.\,\overline{\eta x} = \sin\overline{\alpha\beta\gamma\eta}\,.\,\overline{\delta x}\,.\,\overline{\xi y},$$

$$\overline{axcd}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{y\xi} = \overline{abyd}\,.\,\overline{c\xi}\,.\,\overline{x\eta},$$

$$\sin\overline{\alpha\xi\gamma\delta}\,.\,\overline{\beta y}\,.\,\overline{\eta x} = \sin\overline{\alpha\beta\eta\delta}\,.\,\overline{\gamma x}\,.\,\overline{\xi y},$$

$$9\,\overline{xbcd}\,.\,\overline{abcx}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta} = \overline{axcd}\,.\,\overline{abxd}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{c\eta},$$

$$9\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\sin\overline{\alpha\beta\gamma\xi}\,.\,\overline{\alpha y}\,.\,\overline{\delta y} = \sin\overline{\alpha\xi\gamma\delta}\,.\,\sin\overline{\alpha\beta\xi\delta}\,.\,\overline{\beta y}\,.\,\overline{\gamma y},$$

$$3\,\overline{xbcd}\,.\,\overline{abxd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{c\eta} = \overline{axcd}^2\,\overline{b\eta}^2,$$

$$3\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\sin\overline{\alpha\beta\xi\delta}\,.\,\overline{\alpha y}\,.\,\overline{\gamma y} = \sin\overline{\alpha\xi\gamma\delta}^2\,\overline{\beta y}^2,$$

$$mom\,\overline{ad,\,X}\,mom\,\overline{bc,\,Y} = mom\,\overline{bc,\,X}\,mom\,\overline{ad,\,Y},$$

$$mom\,\overline{\alpha\delta,\,X}\,mom\,\overline{\beta\gamma,\,Y} = mom\,\overline{\beta\gamma,\,X}\,mom\,\overline{\alpha\delta,\,Y},$$

$$16\,mom\,\overline{ab,\,X}\,mom\,\overline{ad,\,X}\,mom\,\overline{bc,\,Y}\,mom\,\overline{cd,\,Y}$$
$$= 3(mom\,\overline{ac,\,X}\,mom\,\overline{bd,\,Y})^2,$$

$$16\,mom\,\overline{\alpha\beta,\,X}\,mom\,\overline{\alpha\delta,\,X}\,mom\,\overline{\beta\gamma,\,Y}\,mom\,\overline{\gamma\delta,\,Y}$$
$$= 3(mom\,\overline{\alpha\gamma,\,X}\,mom\,\overline{\beta\delta,\,Y})^2,$$

$$mom\,\overline{ad,\,X}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{c\eta} = 3\,mom\,\overline{bc,\,X}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta},$$

$$mom\,\overline{\alpha\delta,\,X}\,.\,\overline{\beta y}\,.\,\overline{\gamma y} = 3\,mom\,\overline{\beta\gamma,\,X}\,.\,\overline{\alpha y}\,.\,\overline{\delta y},$$

$$4\,mom\,\overline{ab,\,X}\,mom\,\overline{ad,\,X}\,.\,\overline{c\eta}^2 = 3\,mom\,\overline{ac,\,X}^2\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{d\eta},$$

$$4\,mom\,\overline{\alpha\beta,\,X}\,mom\,\overline{\alpha\delta,\,X}\,.\,\overline{\gamma y}^2 = 3\,mom\,\overline{\alpha\gamma,\,X}^2\,\overline{\beta y}\,.\,\overline{\delta y},$$

$$\left(\frac{\overline{x\alpha}\,.\,\overline{d\eta}}{\overline{x\eta}\,.\,\overline{d\alpha}}\right)^4=\left(\frac{mom\,\overline{ab,\,X}\,mom\,\overline{cd,\,Y}}{\overline{abcd}\,mom\,\overline{XY}}\right)^3=\left(\frac{mom\,\overline{\alpha\beta,\,X}\,mom\,\overline{\gamma\delta,\,Y}}{sin\,\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\,mom\,\overline{XY}}\right)^3,$$

$$27\left(\frac{\overline{x\alpha}\,.\,\overline{x\delta}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}}{\overline{x\eta}^2\,\overline{a\delta}\,.\,\overline{d\alpha}}\right)^2=\left(\frac{mom\,\overline{ad,\,X}\,mom\,\overline{bc,\,Y}}{\overline{abcd}\,mom\,\overline{XY}}\right)^3$$

$$=\left(\frac{mom\,\overline{\alpha\delta,\,X}\,mom\,\overline{\beta\gamma,\,Y}}{sin\,\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\,mom\,\overline{XY}}\right)^3.$$

Die gefundenen Sätze gelten natürlich auch für die cubische Parabel; einige besondere, dieser letzteren eigenthümliche Sätze ergeben sich aber, wenn man die Schmiegungsebene η ins Unendliche rücken lässt, was zur Folge hat, dass die Verhältnisse der Abstände $a\eta$, $b\eta$, $c\eta$, $d\eta$ den Grenzwerth 1 annehmen und daher diese Abstände in gewissen der obigen Gleichungen sich gegenseitig aufheben. Weitere Beziehungen erhält man durch Division der ursprünglichen Gleichungen mit den neuen. Die Ergebnisse sind folgende:

Bezeichnet $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer cubischen Parabel, von welchem die Ecken a und d der Curve angehören, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beziehentlich die der Ecke d, c, b, a gegenüberliegende Seitenebene dieses Tetraeders, x einen willkürlichen Punkt der Curve, η eine willkürliche Schmiegungsebene derselben, so ist:

$$9\overline{x\alpha}\,.\,\overline{x\delta}\,.\,\overline{b\gamma}\,.\,\overline{c\beta}=\overline{x\beta}\,.\,\overline{x\gamma}\,.\,\overline{a\delta}\,.\,\overline{d\alpha},$$

$$3\overline{x\alpha}\,.\,\overline{x\gamma}\,.\,\overline{c\beta}^2=\overline{x\beta}^2.\,\overline{b\gamma}\,.\,\overline{d\alpha},$$

$$9\overline{xbcd}\,.\,\overline{abcx}=\overline{axcd}\,.\,\overline{abxd},$$

$$3\,\overline{axcd}\,.\,\overline{abxd}=\overline{axcd}^2,$$

$$\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}=\overline{b\eta}\,.\,\overline{c\eta},$$

$$\overline{a\eta}\,.\,\overline{c\eta}=\overline{b\eta}^2,$$

$$mom\,\overline{ad,\,X}=3\,mom\,\overline{bc,\,X},$$

$$4\,mom\,\overline{ab,\,X}\,mom\,\overline{ad,\,X}=3\,mom\,\overline{ac,\,X}_2.$$

§ 5.

Auch durch Addition bestimmter Glieder der Proportionen 13), 14) und 15), oder gewisser Wurzeln aus denselben, können auf mannigfache Weise λ und μ eliminirt werden. So erhält man z. B. aus 14), wenn man gleich die betreffenden metrischen Grössen nimmt:

$$\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}}:\sqrt[3]{\overline{abcx}\,.\,\overline{d\eta}}=\sqrt[3]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x\eta}}=\mu:-\lambda:(\mu-\lambda),$$

also:

$$\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}}+\sqrt[3]{\overline{abcx}\,.\,\overline{d\eta}}=\sqrt[3]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x\eta}},$$

welches die projective Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter ist (siehe a. a. O. S. 298). Die Gleichungen 13) werden wir meistens unberücksichtigt lassen, weil sie doch nur eine andere Form von 14) darstellen. Im Uebrigen aber in der bisherigen Weise vorgehend, fassen wir die Ergebnisse zusammen wie folgt:

Bei jeder cubischen Raumcurve ist, wenn $abcd$ irgend eines ihrer Schmiegungstetraeder vorstellt, von welchem die den Ecken d, c, b, a gegenüberliegenden Seitenebenen beziehentlich α, β, γ, δ heissen und die Ecken a und d auf der Curve liegen mögen; wenn ferner x einen beliebigen Punkt der Curve, η eine beliebige Schmiegungsebene derselben, X die Curventangente in x, Y diejenige in η bezeichnet:

$$\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}}+\sqrt[3]{\overline{abcx}\,.\,\overline{d\eta}}=\sqrt[3]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 298),

$$\sqrt[3]{\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}}+\sqrt[3]{\sin\overline{\alpha\beta\gamma\xi}\,.\,\overline{dy}}=\sqrt[3]{\sin\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\xi y}},$$

$$3\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}+\overline{axcd}\,.\,\overline{b\eta}=3\sqrt[3]{\overline{xbcd}^2\,\overline{a\eta}^2\,\overline{abcd}\,.\,\overline{x\eta}},$$

$$3\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}+\sin\overline{\alpha\xi\gamma\delta}\,.\,\overline{\beta y}=3\sqrt[3]{\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}^2\,\overline{\alpha y}^2\sin\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\xi y}},$$

$$3\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}-\overline{abxd}\,.\,\overline{c\eta}=3\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{abcd}^2\,\overline{x\eta}^2}\;.\left(\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{a\eta}}-\sqrt[3]{\overline{abcx}\,.\,\overline{d\eta}}\right),$$

$$3\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}-\sin\overline{\alpha\beta\xi\delta}\,.\,\overline{\gamma y}=3\sqrt[3]{\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}\sin\overline{\alpha\beta\gamma\delta}^2\,\overline{\xi y}^2}\;.\left(\sqrt[3]{\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}}-\sqrt[3]{\sin\overline{\alpha\beta\gamma\xi}\,.\,\overline{\delta y}}\right),$$

$$\overline{axcd}\;\overline{b\eta}+\overline{abxd}\,.\,\overline{c\eta}=3\sqrt[3]{\overline{xbcd}\,.\,\overline{abcx}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{x\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 300),

$$\sin\overline{\alpha\xi\gamma\delta}\,.\,\overline{\beta y}+\sin\overline{\alpha\beta\xi\delta}\,.\,\overline{\gamma y}=\sqrt[3]{\sin\overline{\xi\beta\gamma\delta}\,.\,\sin\overline{\alpha\beta\gamma\xi}\,.\,\sin\overline{\alpha\beta\gamma\delta}\,.\,\overline{\alpha y}\,.\,\overline{\delta y}\,.\,\overline{\xi y}},$$

ferner

$$\sqrt[4]{\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}}-\sqrt[4]{\mathrm{mom}\,\overline{cd,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,Y}}=\sqrt[4]{\overline{abcd}\,\mathrm{mom}\,\overline{XY}},$$

$$4\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}-\mathrm{mom}\,\overline{ac,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{bd,Y}=4\sqrt[4]{\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}^3\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}^3\,\overline{abcd}\,\mathrm{mom}\,\overline{XY}},$$

$$3\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}-\mathrm{mom}\,\overline{ad,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{bc,Y}=3\sqrt{\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}}\,\sqrt[4]{\overline{abcd}\,\mathrm{mom}\,\overline{XY}}\;.\left(\sqrt[4]{\mathrm{mom}\,\overline{ab,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{cd,Y}}+\sqrt[4]{\mathrm{mom}\,\overline{cd,X}\,\mathrm{mom}\,\overline{ab,Y}}\right),$$

$$\begin{cases} 3\,mom\,\overline{ac,\ X}\,mom\,\overline{bd,\ Y} - 4\,mom\,\overline{ad,\ X}\,mom\,\overline{bc,\ Y} \\ = 12\sqrt{mom\,\overline{ab,\ X}\,mom\,\overline{cd,\ Y}}\sqrt[4]{mom\,\overline{cd,\ X}\,mom\,\overline{ab,\ Y}\,mom\,\overline{XY}.\overline{abcd}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(mom\,\overline{ac,\ X}\,mom\,\overline{bd,\ Y} - mom\,\overline{bd,\ X}\,mom\,\overline{ac,\ Y}) \\ = 4\sqrt{3\,mom\,\overline{ad,\ X}\,mom\,\overline{bc,\ Y}}\sqrt[4]{\overline{abcd}\,mom\,\overline{XY}} \\ .\left(\sqrt[4]{mom\,\overline{ab,\ X}\,mom\,\overline{cd,\ Y}} + \sqrt[4]{mom\,\overline{cd,\ X}\,mom\,\overline{ab,\ Y}}\right), \end{cases}$$

zu welch' letzteren fünf Beziehungen die reciproken durch Vertauschung von a, b, c, d mit α bezw. β, γ, δ erhalten werden können.

Es ist wieder zu bemerken, dass man specielle, nur für die cubische Parabel giltige Sätze erhält, wenn man die Schmiegungsebene η ins Unendliche verlegt, wodurch die Abstände $\overline{a\eta}$, $\overline{b\eta}$, $\overline{c\eta}$, $\overline{d\eta}$, $\overline{x\eta}$ in Wegfall kommen und die Bedeutung der Grössen $mom\,\overline{XY}$ u. s. w. sich etwas ändert, weil Y ebenfalls ins Unendliche rückt, also durch eine Stellung ersetzt werden muss (vergl. den Schlussparagraphen).

§ 6.

Die Einführung der Momente in Bezug auf die beliebige Tangente X der cubischen Raumcurve lässt sich umgehen, wenn man, wie dies H. Schröter a. a. O. gethan hat, die Schnittpunkte von X mit den zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungsebenen $abc = \alpha$ und $bcd = \delta$ — wir wollen dieselben x_1 und x_2 nennen — in Betracht zieht. Da X proportional $[x_1 x_2]$ ist, so kann bei allen in Bezug auf X homogenen Gleichungen $[x_1 x_2]$ an Stelle von X treten, wodurch z. B. das äussere Product $[abX]$ sich in das, dem Inhalt des Tetraeders abx_1x_2 proportionale $[abx_1x_2]$ verwandelt. Auf diese Weise folgen z. B. aus den in § 4 gefundenen Beziehungen

$$mom\,\overline{ad,\ X}.\overline{b\eta}.\overline{c\eta} = 3\,mom\,\overline{bc,\ X}.\overline{a\eta}.\overline{d\eta},$$

$$4\,mom\,\overline{ab,\ X}\,mom\,\overline{ad,\ X}.\overline{c\eta}^2 = 3\,mom\,\overline{ac,\ X}^2\,\overline{b\eta}.\overline{d\eta}$$

die gleichwerthigen

$$\overline{adx_1x_2}.\overline{b\eta}.\overline{c\eta} = 3\overline{bcx_1x_2}.\overline{a\eta}.\overline{d\eta}$$

und

$$4\overline{abx_1x_2}.\overline{adx_1x_2}.\overline{c\eta}^2 = 3\overline{acx_1x_2}^2\,\overline{b\eta}.\overline{d\eta},$$

welches Verallgemeinerungen Schröter'scher Sätze (a. a. O. S. 302 und 303) sind. Natürlich leisten in dem besprochenen Falle zwei beliebige Punkte der Tangente X dieselben Dienste, wie die ganz speciellen x_1 und x_2, aber wir können nach Schröter's Vorgang auch Sätze aufstellen, bei denen das nicht zutrifft.

Für die Punkte x_1 und x_2 kann man die Ausdrücke nehmen:

$$17)\quad \begin{cases} x_1 = a + 2\lambda b + \lambda^2 c, \\ x_2 = b + 2\lambda c + \lambda^2 d. \end{cases}$$

Denn, weil

$$x_2 = \frac{1}{3}\frac{dx}{d\lambda}$$

ist, so liegt dieser Punkt jedenfalls auf der zum Punkt x gehörigen Tangente X, und wegen der offenbar vorhandenen Beziehung

$$x_1 + \lambda x_2 = x$$

auch der Punkt x_1, während andererseits der Anblick der Gleichungen 17) lehrt, dass x_1 in der Ebene abc, x_2 in der Ebene bcd sich befindet.

Multiplicirt man die obigen Gleichungen beide mit der Schmiegungsebene η, so ergiebt sich, da nach 9)

$$[a\eta] = \mu^3[abcd], \quad [b\eta] = -\mu^2[abcd], \quad [c\eta] = \mu[abcd],$$
$$[d\eta] = -[abcd]$$

ist:

$$18) \qquad [x_1\eta] = \mu(\mu-\lambda)^2[abcd], \quad [x_2\eta] = -(\mu-\lambda)^2[abcd].$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 17) durch äussere Multiplication mit bcd, cad u. s. w.:

$$[x_1bcd] = [ax_2cd] = [abcd],$$
$$[ax_1cd] = [abx_2d] = 2\lambda[abcd],$$
$$[abx_1d] = [abcx_2] = \lambda^2[abcd].$$

Daher hat man die Proportionen:

$$19) \quad \begin{cases} [x_1bcd][a\eta] : [ax_1cd][b\eta] : [abx_1d][c\eta] : [abcd][x_1\eta] \\ = [ax_2cd][b\eta] : [abx_2d][c\eta] : [abcx_2][d\eta] : [abcd][x_2\eta] \\ = \mu^2 : -2\lambda\mu : \lambda^2 : (\mu-\lambda)^2. \end{cases}$$

Ferner liefern uns die Gleichungen 8), wenn wir darin $[x_1x_2]$ statt X schreiben und 18) benützen:

$$[cdx_1x_2][a\eta][b\eta] : [bdx_1x_2][a\eta][c\eta] : [bcx_1x_2][a\eta][d\eta]$$
$$: [adx_1x_2][b\eta][c\eta] : [acx_1x_2][b\eta][d\eta] : [abx_1x_2][c\eta][d\eta] : [abcd][x_1\eta][x_2\eta]$$
$$= \mu^4 : 2\lambda\mu^3 : \lambda^2\mu^2 : 3\lambda^2\mu^2 : 2\lambda^3\mu : \lambda^4 : (\mu-\lambda)^4.$$

Man kann wieder auf mannigfaltige Art λ und μ eliminiren und, weil die entstehenden Gleichungen homogen sind, ohne Weiteres für die äusseren Producte Tetraederinhalte bezw. Abstände einführen. Es ergiebt sich so folgende neue Reihe von Beziehungen:

Wenn irgend eine Tangente einer beliebigen cubischen Raumcurve die zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungsebenen abc und bcd eines beliebigen Schmiegungstetraeders $abcd$ derselben in den Punkten x_1 und x_2 trifft, während η eine willkürliche Schmiegungsebene jener Curve bezeichnet, so ist u. A.:

$$\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{x_2\eta} = \overline{ax_2cd}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{x_1\eta},$$

$$\overline{ax_1cd}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{x_2\eta} = \overline{abx_2d}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{x_1\eta},$$

$$\overline{abx_1d}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{x_2\eta} = \overline{abcx_2}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{x_1\eta},$$

$$4\,\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{abcx_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta} = \overline{ax_1cd}\,.\,\overline{abx_2d}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{c\eta},$$

$$4\,\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{abx_1d}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{c\eta} = \overline{ax_1cd}^2\,\overline{b\eta}^2,$$

$$4\,\overline{ax_2cd}\,.\,\overline{abcx_2}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{d\eta} = \overline{abx_2d}^2\,\overline{c\eta}^2,$$

$$\sqrt{\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}} - \sqrt{\overline{abcx_2}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{x_1\eta}} = \sqrt{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_2\eta}}$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 302),

$$\sqrt{\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{a\eta}} - \sqrt{\overline{abx_1d}\,.\,\overline{c\eta}} = \sqrt{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_1\eta}},$$

$$\sqrt{\overline{ax_2cd}\,.\,\overline{b\eta}} - \sqrt{\overline{abcx_2}\,.\,\overline{d\eta}} = \sqrt{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_2\eta}},$$

$$2\,\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{a\eta} + \overline{ax_1cd}\,.\,\overline{b\eta} = 2\sqrt{\overline{x_1bcd}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{x_1\eta}},$$

$$2\,\overline{ax_2cd}\,.\,\overline{b\eta} + \overline{abx_2d}\,.\,\overline{c\eta} = 2\sqrt{\overline{ax_2cd}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}},$$

$$\overline{ax_1cd}\,.\,\overline{b\eta} + 2\,\overline{abx_1d}\,.\,\overline{c\eta} = -2\sqrt{\overline{abx_1d}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{x_1\eta}},$$

$$\overline{abx_2d}\,.\,\overline{c\eta} + 2\,\overline{abcx_2}\,.\,\overline{d\eta} = -2\sqrt{\overline{abcx_2}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}},$$

$$\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}} - \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{d\eta}} = \sqrt[4]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}},$$

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter, a. a. O. S. 302),

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{bdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta} - \overline{acx_1x_2}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{d\eta} \\ &= 2\sqrt{\overline{bcx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}}\,\sqrt[4]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}} \\ &\quad .\left(\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}} + \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{d\eta}}\right),\end{aligned}\right.$$

$$2\,\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta} - \overline{bdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{c\eta} = 2\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}^3\,\overline{abcd}\,.\,\overline{a\eta}^3\,\overline{b\eta}^3\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}},$$

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{bdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{c\eta} - 2\,\overline{bcx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta} \\ &= 2\sqrt{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}}\,\sqrt[4]{\overline{abx_1x_2}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{d\eta}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}},\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta} - \overline{bcx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta} \\ &= \sqrt{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}}\,\sqrt[4]{\overline{abcd}\,.\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}}\left(\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}} + \sqrt[4]{\overline{abx_1x_2}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{d\eta}}\right),\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &2\,\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta} - \overline{acx_1x_2}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{d\eta} \\ &= 2\sqrt[4]{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{abcd}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}\,.\,\overline{x_1\eta}\,.\,\overline{x_2\eta}} \\ &\quad .\left(\sqrt{\overline{cdx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{b\eta}} + \sqrt{\overline{bcx_1x_2}\,.\,\overline{a\eta}\,.\,\overline{d\eta}} + \sqrt{\overline{abx_1x_2}\,.\,\overline{c\eta}\,.\,\overline{d\eta}}\right).\end{aligned}\right.$$

Aus jedem der obigen Sätze folgt eine besondere, nur für cubische Parabeln giltige Beziehung durch Weglassen der auf die Ebene η bezüglichen Abstände (vergl. den Schluss von § 4). Die ersten drei Gleichungen z. B. ergeben

$$\overline{x_1 bcd} = \overline{ax_2 cd}, \quad \overline{ax_1 cd} = \overline{abx_2 d}, \quad \overline{abx_1 d} = \overline{abcx_2},$$

und letztere im Verein mit jenen:

$$\overline{a\eta} : \overline{b\eta} = \overline{b\eta} : \overline{c\eta} = \overline{c\eta} : \overline{d\eta} = \overline{x_1\eta} : \overline{x_2\eta}.$$

Um schliesslich noch die zu den obigen dualistischen Sätze formuliren zu können, muss man die Verbindungsebenen ξ_1 und ξ_2 der Tangente $X = x_1 x_2$ mit den Curvenpunkten a und d einführen. Bei Benützung der früheren Bezeichnungen ist dann z. B.:

$$\sin \overline{\xi_1 \beta\gamma\delta} \,.\, \overline{\alpha y} \,.\, \overline{\xi_2 y} = \sin \overline{\alpha \xi_2 \gamma\delta} \,.\, \overline{\beta y} \,.\, \overline{\xi_1 y}, \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\sqrt{\sin \overline{\xi_1 \beta\gamma\delta} \,.\, \overline{\alpha y}} - \sqrt{\sin \overline{\alpha\beta\xi_1\delta} \,.\, \overline{\gamma y}} = \sqrt{\sin \overline{\alpha\beta\gamma\delta} \,.\, \overline{\xi_1 y}}, \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\sqrt[4]{\sin \overline{\gamma\delta\xi_1\xi_2} \,.\, \overline{\alpha y} \,.\, \overline{\beta y}} - \sqrt[4]{\sin \overline{\alpha\beta\xi_1\xi_2} \,.\, \overline{\gamma y} \,.\, \overline{\delta y}} = \sqrt[4]{\sin \overline{\alpha\beta\gamma\delta} \,.\, \overline{\xi_1 y} \,.\, \overline{\xi_2 y}}, \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4) und 10) könnte übrigens ein Theil aller dieser Sätze auf eine andere Form gebracht werden, so dass nur Abstände zwischen Punkten und Ebenen vorkämen; der erste mit seinem reciproken z. B. auf die folgende:

$$\overline{x_1\delta} \,.\, \overline{a\eta} \,.\, \overline{x_2\eta} \,.\, \overline{b\gamma} = \overline{x_2\gamma} \,.\, \overline{b\eta} \,.\, \overline{x_1\eta} \,.\, \overline{a\delta},$$

$$\overline{\xi_1 d} \,.\, \overline{\alpha y} \,.\, \overline{\xi_2 y} \,.\, \overline{\beta c} = \overline{\xi_2 c} \,.\, \overline{\beta y} \,.\, \overline{\xi_1 y} \,.\, \overline{\alpha d}.$$

§ 7. Erstes Uebertragungsprincip.

Zufolge 11), 9) und 9') hat man

$$\frac{[x\eta]}{[x\delta][\eta d]} = \frac{[\xi y]}{[\xi d][y\delta]} = (\mu - \lambda)^3 [abcd]^{-1},$$

oder, da nach § 1 $[x\eta] = \overline{x\eta} \,.\, |x| \,.\, |\eta|$ u. s. w. ist,

$$\frac{\overline{x\eta}}{\overline{x\delta} \,.\, \overline{\eta d} \,.\, |\delta| \,.\, |d|} = \frac{\overline{\xi y}}{\overline{\xi d} \,.\, \overline{y\delta} \,.\, |d| \,.\, |\delta|} = (\mu - \lambda)^3 [abcd]^{-1},$$

also:

$$21) \quad \sqrt[3]{\frac{\overline{x\eta}}{\overline{x\delta} \,.\, \overline{\eta d}}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{\xi y}}{\overline{\xi d} \,.\, \overline{y\delta}}} = (\mu - \lambda) \sqrt[3]{|d| \,.\, |\delta| \,.\, [abcd]^{-1}}.$$

Wir bilden nun die betrachtete Raumcurve dritter Ordnung auf eine gerade Linie ab, indem wir auf letzterer einen Anfangspunkt und die positive Richtung beliebig wählen und dem zum Parameterwerth λ gehörigen Punkt x der Curve denjenigen Punkt x' der Geraden zuordnen, dessen Entfernung vom Anfangspunkt gleich λ ist. Bezeichnet ebenso y' das Bild des zum Parameterwerth μ gehörigen Curvenpunkts y, so ist demnach die Entfernung der Bildpunkte x' und y' gleich $(\mu - \lambda)$. Sieht man d als einen

festen Punkt der Curve an, so erscheinen die Gewichte $|d|$ und $|\delta|$ als Constanten und es wird folglich die Strecke $\overline{x'y'}$ den in 21) angegebenen dritten Wurzeln proportional. Wir haben somit folgendes

1. Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergiebt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke $\overline{x'y'}$ der Geraden den Ausdruck

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x\eta}}{\overline{x\delta}\,.\,\overline{\eta d}}},$$

oder den ihm gleichen

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{\xi y}}{\overline{\xi d}\,.\,\overline{y\delta}}}$$

setzt, wo x und y zwei beliebige Punkte der Curve, ξ und η ihre Schmiegungsebenen in diesen Punkten sind, d dagegen einen willkürlichen festen Punkt der Curve, δ die Schmiegungsebene in demselben bezeichnet.

Betrachten wir das einfachste Beispiel für die Anwendung dieses Princips. Bei n beliebigen Punkten $1, 2, 3, \ldots n$ einer Geraden ist

$$\overline{12} + \overline{23} + \overline{34} + \cdots + \overline{n1} = 0.$$

Dies liefert den Satz:

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, d$ $(n+1)$ beliebige Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung und $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n, \delta$ die zugehörigen Schmiegungsebenen derselben, so ist:

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x_1\xi_2}}{\overline{x_1\delta}\,.\,\overline{\xi_2 d}}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_2\xi_3}}{\overline{x_2\delta}\,.\,\overline{\xi_3 d}}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_{n-1}\xi_n}}{\overline{x_{n-1}\delta}\,.\,\overline{\xi_n d}}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{x_n\xi_1}}{\overline{x_n\delta}\,.\,\overline{\xi_1 d}}} = 0.$$

Durch die vorhin eingeführte Abbildung der Curve dritter Ordnung auf eine Gerade werden offenbar beide Linien projectiv auf einander bezogen, so dass Gleichheit zwischen dem Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten x_1, x_2, x_3, x_4 (oder den zugehörigen Schmiegungsebenen) der Curve und demjenigen ihrer Bildpunkte besteht. Schreibt man aber mit Hilfe des gefundenen Uebertragungsprincips den Ausdruck hin, welcher dem Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden entspricht, so heben sich darin die auf d und δ bezüglichen Abstände gegenseitig auf und man erhält für denselben:

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{x_1\xi_3}}{\overline{\xi_3 x_2}} : \frac{\overline{x_1\xi_4}}{\overline{\xi_4 x_2}}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{\xi_1 x_3}}{\overline{x_3\xi_2}} : \frac{\overline{\xi_1 x_4}}{\overline{x_4\xi_2}}}.$$

Augenscheinlich ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen linker Hand z. B. gleich dem Doppelverhältniss, welches die Punkte x_1, x_2 und die Schnittpunkte der Geraden x_1x_2 mit den Ebenen ξ_3, ξ_4 (oder auch die Verbindungsebenen der Punkte x_1, x_2 mit der Schnittlinie von ξ_3 und ξ_4

sowie die Ebenen ξ_3 und ξ_4) zusammen liefern. Wir wollen dasselbe das Doppelverhältniss der vier Elemente $x_1 x_2 \xi_3 \xi_4$ nennen und können dann folgenden Satz aussprechen:

Das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten einer cubischen Raumcurve, oder dasjenige der zugehörigen Schmiegungsebenen (das heisst das Doppelverhältniss der vier Ebenen, durch die jene vier Punkte aus irgend einer Sehne der Curve projicirt werden, bezw. das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen jene Schmiegungsebenen von irgend einer „Achse" — Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen der Curve — geschnitten werden), ist gleich der Cubikwurzel aus dem Doppelverhältniss, welches die ersten beiden Curvenpunkte zusammen mit den Schmiegungsebenen in den beiden anderen, oder die ersten beiden Schmiegungsebenen zusammen mit den Anschmiegungspunkten der beiden übrigen bestimmen.*

§ 8. Zweites Uebertragungsprincip.

Aus den Gleichungen 12) und 8) folgt, wenn man die zum Punkt d gehörige Tangente cd der Curve mit D bezeichnet:

$$\frac{[XY]}{[XD][YD]} = \frac{mom\,\overline{XY}}{mom\,\overline{XD}\,mom\,\overline{YD}.|D|^2} = (\mu-\lambda)^4 [abcd]^{-1},$$

oder:

$$\sqrt[4]{\frac{mom\,\overline{XY}}{mom\,\overline{XD}\,mom\,\overline{YD}}} = (\mu-\lambda)\sqrt[4]{|D|^2 [acbd]^{-1}}. \tag{22}$$

Durch eine ähnliche Betrachtung, wie die im vorhergehenden Paragraphen angestellte, findet man daher folgendes

---

* Man kann diesen Satz einfacher und directer beweisen, wenn man die Punkte a und d, die ja zwei beliebige Punkte der Curve sind, und zwei beliebige andere Punkte x und y derselben zusammen betrachtet. Durch äussere Multiplication der Gleichungen

$$x = a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d$$

und

$$y = a + 3\mu b + 3\mu^2 c + \mu^3 d$$

mit der Sehne ad der Curve erhält man

$$[adx] = -3\lambda([abd] + \lambda[acd]),$$
$$[ady] = -3\mu([abd] + \mu[acd]),$$

das heisst das Doppelverhältniss der vier Punkte a, d, x, y ist gleich $\mu:\lambda$. Multiplicirt man aber jene Gleichungen mit der Schnittlinie bc der zu den Punkten a und d gehörigen Schmiegungsebenen $\alpha = abc$ und $\delta = bcd$, so kommt

$$[bcx] = [abc] + \lambda^3 [bcd],$$
$$[bcy] = [abc] + \mu^3 [bcd],$$

wonach das durch die Elemente α, δ, x, y bestimmte Doppelverhältniss den Werth $\mu^3 : \lambda^3$ hat.

2. **Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergiebt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke der Geraden den Ausdruck**

$$\sqrt[4]{\frac{mom\,\overline{XY}}{mom\,\overline{XD}\,mom\,\overline{YD}}}$$

setzt, wo X und Y zwei beliebige Tangenten der Curve sind und D eine willkürliche feste Tangente derselben bezeichnet.

Dabei hat man, wie leicht einzusehen ist, den zu zwei Tangentenpaaren XY und X_1Y_1 gehörigen vierten Wurzeln dann und blos dann gleiches Vorzeichen zu geben, wenn eine veränderliche Tangente, die stetig und ohne umzukehren an der Curve so hingleitet, dass sie aus der Lage X in die Lage Y ohne Ueberschreitung der Lage D kommt, durch dieselbe Bewegung auch aus der Lage X_1 in die Lage Y_1 gelangen kann, ohne durch die Lage D hindurchgehen zu müssen.

Benützen wir als Beispiel wieder die einfachste Streckenbeziehung, zu der n Punkte einer Geraden Anlass geben. Wir erhalten den Satz:

Wenn $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, D$ $(n+1)$ beliebige Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung vorstellen, so ist

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[4]{\frac{mom\,\overline{X_1X_2}}{mom\,\overline{X_1D}\,mom\,\overline{X_2D}}}+\sqrt[4]{\frac{mom\,\overline{X_2X_3}}{mom\,\overline{X_2D}\,mom\,\overline{X_3D}}}+\cdots\\ \qquad\qquad+\sqrt[4]{\frac{mom\,\overline{X_nX_1}}{mom\,\overline{X_nD}\,mom\,\overline{X_1D}}}=0.\end{array}\right.$$

Ist die Streckengleichung, von der man ausgeht, in Bezug auf die Endpunkte der darin vorkommenden Strecken homogen, so werden in dem Satz, den das besprochene Uebertragungsprincip liefert, die Momente in Bezug auf die feste Tangente D herausfallen. So ergiebt z. B. die bekannte Beziehung

$$\overline{12}.\overline{34}+\overline{13}.\overline{41}+\overline{14}.\overline{23}=0$$

zwischen vier beliebigen Punkten 1, 2, 3, 4 einer Geraden den Satz:

Zwischen vier beliebigen Tangenten X_1, X_2, X_3, X_4 einer cubischen Raumcurve besteht die Beziehung

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[4]{mom\,\overline{X_1X_2}\,mom\,\overline{X_3X_4}}+\sqrt[4]{mom\,\overline{X_1X_3}\,mom\,\overline{X_4X_1}}\\ \qquad\qquad+\sqrt[4]{mom\,\overline{X_1X_4}\,mom\,\overline{X_2X_3}}=0.\end{array}\right.$$

(Dieser Satz kann übrigens leicht auf den vorhergehenden zurückgeführt werden und ist eigentlich schon in § 5 vorgekommen.)

Endlich erhalten wir noch (vergl. den Schluss von § 7) den Satz:

Das Grassmann'sche Doppelverhältniss von vier beliebigen Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung ist gleich der

vierten Potenz des Doppelverhältnisses der zugehörigen Berührungspunkte (oder der vier Schmiegungsebenen, in welchen jene Tangenten liegen).*

§ 9. Drittes Uebertragungsprincip.

Wenn x und y zwei beliebige, den Parameterwerthen λ und μ entsprechende Punkte der untersuchten Raumcurve dritter Ordnung sind, so wollen wir den sechsfachen Inhalt des zur Sehne xy gehörigen Schmiegungstetraeders der Curve mit $V(xy)$ bezeichnen. Um zunächst für die beiden noch nicht bekannten Ecken dieses Tetraeders, die wir x_μ und y_λ nennen wollen, eine Darstellung zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Jeder Punkt der in x an die Curve gelegten Tangente X lässt sich in der Form

$$x + \varrho \frac{dx}{d\lambda}$$

schreiben. Damit dieser Punkt in der zum Punkt y gehörigen Schmiegungsebene η liegt, muss sein äusseres Product mit η verschwinden, also

$$[x\eta] + \varrho \left[\frac{dx}{d\lambda}\eta\right] = 0$$

sein. Nach 11) ist aber

$$[x\eta] = (\mu - \lambda)^3 [abcd],$$

also:

$$\left[\frac{dx}{d\lambda}\eta\right] = \frac{d}{d\lambda}[x\eta] = -3(\mu-\lambda)^2 [abcd],$$

mithin:

$$\varrho = \frac{\mu - \lambda}{3}.$$

Ebenso findet man für den Schnittpunkt der zum Punkt x gehörigen Schmiegungsebene ξ mit der Curventangente Y im Punkt y den Ausdruck:

---

* Zu dem von Grassmann aufgestellten Doppelverhältniss von vier zu einander windschiefen Geraden vergleiche man die interessanten Ausführungen von E. Study in Grassmann's gesammelten Werken Band 3 Theil 1 S. 409 (Anmerkung zu S. 272). Man beweist übrigens den obigen Satz am einfachsten so: Wie wir in der Anmerkung auf S. 226 sahen, ist das Doppelverhältniss der vier beliebigen Curvenpunkte a, d, x, y gleich $\mu:\lambda$. Durch äussere Multiplication der Gleichung 2) und der entsprechenden für Y mit den zu den Punkten a und d gehörigen Tangenten $A = [ab]$ und $D = [cd]$ erhält man aber

$$[AX] = \lambda^4 [abcd], \quad [XD] = [abcd],$$
$$[AY] = \mu^4 [abcd], \quad [YD] = [abcd],$$

also ist das Doppelverhältniss der vier Geraden A, D, X, Y, nämlich:

$$\frac{[AX]}{[XD]} : \frac{[AY]}{[YD]} = \frac{mom\,\overline{AX}}{mom\,\overline{XD}} : \frac{mom\,\overline{AY}}{mom\,\overline{YD}},$$

gleich $\mu^4 : \lambda^4$. Wie ich nachträglich bemerkt habe, hat Sturm den fraglichen Satz, als von Voss herrührend, in etwas anderer Form schon in „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik" Bd. 86 S. 130 (1879) mitgetheilt.

$$y_\lambda = y + \sigma \frac{dy}{d\lambda},$$

mit

$$\sigma = \frac{\lambda - \mu}{3}.$$

Das äussere Product der Ecken des fraglichen Schmiegungstetraeders wird daher

$$[x x_\mu y_\lambda y] = \left[x\left(x + \varrho \frac{dx}{d\lambda}\right)\left(y + \sigma \frac{dy}{d\mu}\right) y\right] = -\varrho\sigma\left[x \frac{dx}{d\lambda} y \frac{dy}{d\mu}\right],$$

also, weil nach § 2

$$\left[x \frac{dx}{d\lambda}\right] = 3X, \quad \left[y \frac{dy}{d\mu}\right] = 3Y,$$

und nach 12)

$$[XY] = (\mu - \lambda)^4 [abcd]$$

ist,

$$[x x_\mu y_\lambda y] = (\mu - \lambda)^6 [abcd].$$

Bestimmen wir noch die äusseren Producte der Punkte x_μ und y_λ mit der Schmiegungsebene δ. Nach 9′) ist

$$[x\delta] = [abcd],$$

folglich

$$\left[\frac{dx}{d\lambda}\delta\right] = \frac{d}{d\lambda}[x\delta] = 0,$$

und daher

$$[x_\mu \delta] = [x\delta] = [abcd].$$

Denselben Werth hat offenbar $[y_\lambda \delta]$.

Also wird

$$\frac{[x x_\mu y_\lambda y]}{[x\delta][x_\mu\delta][y_\lambda\delta][y\delta]} = \frac{V(xy)}{\overline{x\delta} \,.\, \overline{x_\mu\delta} \,.\, \overline{y_\lambda\delta} \,.\, \overline{y\delta} \,.\, |\,\delta\,|^4} = (\mu - \lambda)^6 [abcd]^{-3},$$

oder

$$23) \quad \sqrt[6]{\frac{V(xy)}{\overline{x\delta} \,.\, \overline{x_\mu\delta} \,.\, \overline{y_\lambda\delta} \,.\, \overline{y\delta}}} = (\mu - \lambda) \sqrt[6]{|\,\delta\,|^4 [abcd]^{-3}}.$$

Wir erhalten somit (vergl. die beiden vorhergehenden Paragraphen) folgendes

3. Uebertragungsprincip: Aus jeder homogenen Beziehung zwischen Strecken einer und derselben Geraden ergiebt sich ein Satz über die cubische Raumcurve, wenn man statt einer beliebigen Strecke der Geraden die sechste Wurzel aus dem Inhalt eines beliebigen Schmiegungstetraeders der Curve, dividirt durch die sechste Wurzel aus dem Product der Entfernungen der Ecken dieses Tetraeders von einer willkürlichen festen Schmiegungsebene der Curve, oder dualistisch die sechste Wurzel aus dem Sinus des Schmiegungstetraeders, dividirt durch die sechste Wurzel aus dem Product der Entfernungen der Seitenebenen des Tetraeders von einem willkürlichen festen Punkt der Curve, setzt.

Ueber die Vorzeichen der fraglichen sechsten Wurzeln lässt sich eine ähnliche Regel, wie in § 8, aufstellen.

Wir beschränken uns auf ein Beispiel, das dem ersten der in den §§ 7 und 8 vorgeführten entspricht.

Sind $x_1, x_2, x_3 \dots x_n, d$ $(n+1)$ beliebige Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung und $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_n, \delta$ die zugehörigen Schmiegungsebenen, bezeichnet ferner V_{kl} resp. Sin_{kl} den sechsfachen Inhalt resp. den Sinus des zur Sehne $x_k x_l$ (oder dem Schmiegungsstrahl $\xi_k \xi_l$) gehörigen Schmiegungstetraeders; x_{kl} resp. ξ_{kl} den Schnittpunkt der Curventangente in x_k mit der Schmiegungsebene ξ_l resp. die Verbindungsebene jener Tangente mit dem Punkt x_l, so ist

$$\sqrt[6]{\frac{V_{12}}{\overline{x_1\delta}.\overline{x_{12}\delta}.\overline{x_{21}\delta}.\overline{x_2\delta}}}+\sqrt[6]{\frac{V_{23}}{\overline{x_2\delta}.\overline{x_{23}\delta}.\overline{x_{32}\delta}.\overline{x_3\delta}}}+\cdots+\sqrt[6]{\frac{V_{n1}}{\overline{x_n\delta}.\overline{x_{n1}\delta}.\overline{x_{1n}\delta}.\overline{x_1\delta}}}=0,$$

$$\sqrt[6]{\frac{Sin_{12}}{\overline{\xi_1 d}.\overline{\xi_{12} d}.\overline{\xi_{21} d}.\overline{\xi_2 d}}}+\sqrt[6]{\frac{Sin_{23}}{\overline{\xi_2 d}.\overline{\xi_{23} d}.\overline{\xi_{32} d}.\overline{\xi_3 d}}}+\cdots+\sqrt[6]{\frac{Sin_{n1}}{\overline{\xi_n d}.\overline{\xi_{n1} d}.\overline{\xi_{1n} d}.\overline{\xi_1 d}}}=0.$$

Bei der cubischen Parabel, welche unter ihren Schmiegungsebenen die unendlich ferne Ebene hat, kann man letztere statt der beliebigen Schmiegungsebene δ nehmen, wodurch bei der Anwendung des ersten Theils des obigen Uebertragungsprincips die Entfernungen der Ecken der Schmiegungstetraeder von δ in Wegfall kommen (vergl. den Schluss von § 4). Man erhält so das specielle Uebertragungsprincip, das Gino Loria in seiner, in der Einleitung angeführten Abhandlung ausgesprochen hat, und welches auch leicht aus einem Satz von Schröter (a. a. O. S. 308) folgt.

§ 10.

Ueber die Inhalte bezw. *Sin* der Schmiegungstetraeder einer cubischen Raumcurve sollen jetzt noch einige Sätze abgeleitet werden, die zum Theil in der besonderen Form, die man ihnen bei der cubischen Parabel geben hann, in Schröter's mehrfach erwähnter Arbeit (a. a. O. auf S. 307) vorkommen. Wir dürfen annehmen, die Parametervertheilung auf der Curve sei so vorgenommen, dass irgend einem bestimmten Werthe des Parameters, etwa $\lambda = -1$, ein willkürlicher Punkt e der Curve entspricht. Die Tangente bezw. Schmiegungsebene in diesem Punkt heisse E bezw. ε. (Solche willkürliche, aber als fest betrachteten Elemente kamen schon in den früheren Paragraphen vor; in den §§ 7—9 waren es der Punkt d mit der Tangente D

und der Schmiegungsebene δ). Zur Vereinfachung des sprachlichen Ausdrucks werden wir einige Benennungen anwenden, die bisher schon mit Nutzen hätten gebraucht werden können. Unter der reducirten Entfernung zweier Punkte oder eines Punktes von einer Ebene, der reducirten *sin* eines Flächenwinkels, dem reducirten Moment zweier Geraden, dem reducirten Inhalt eines Tetraeders (als bestimmt durch seine vier Ecken), dem reducirten *Sin* eines Tetraeders (als bestimmt durch seine vier Seitenebenen) u. s. w. wollen wir den Quotienten verstehen, der zum Zähler die betreffende metrische Grösse hat, zum Nenner dagegen das Product der Entfernungen der jene Grösse bestimmenden Elemente — wenn es Punkte oder Ebenen sind — vom festen Punkt e bezw. der festen Schmiegungsebene ε, oder das Product der Momente in Bezug auf die feste Tangente E, wenn es Geraden sind. Es mögen die reducirten metrischen Grössen durch Vorsetzen des Buchstabens $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Hiernach ist z. B. die reducirte Entfernung des Punktes x von der Ebene η

$$\mathfrak{R}\overline{x\eta} = \frac{\overline{x\eta}}{\overline{x\varepsilon}\,.\,\overline{\eta e}},$$

das reducirte Moment der Geraden X und Y

$$\mathfrak{R}\, mom\, \overline{XY} = \frac{mom\, \overline{XY}}{mom\, \overline{XE}\; mom\, \overline{YE}},$$

der reducirte sechsfache Inhalt des Tetraeders $abcd$

$$\mathfrak{R}\overline{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{\overline{a\varepsilon}\,.\,\overline{b\varepsilon}\,.\,\overline{c\varepsilon}\,.\,\overline{d\varepsilon}},$$

u. s. w. (Wenn ε mit der unendlich fernen Ebene zusammenfällt, gehen die reducirten Entfernungen von Punkten und die reducirten Inhalte in die gewöhnlichen über.) Bei der oben gemachten Annahme, dass den festen Elementen e, E, ε der Parameterwerth $\lambda = -1$ entspreche, erhält man aus den Gleichungen 11), 12) und 9):

$$24)\qquad [x\varepsilon] = [\xi e] = -(1+\lambda)^3 [abcd],$$

$$25)\qquad [XE] = (1+\lambda)^4 [abcd],$$

$$26)\qquad [a\varepsilon] = [b\varepsilon] = [c\varepsilon] = [d\varepsilon] = -[abcd].$$

Seien x' und y' die Punkte, in welchen die Schmiegungsebenen ξ und η den beliebigen „Schmiegungsstrahl“ oder die „Achse“ bc (die Schnittlinie der beiden Schmiegungsebenen α und δ) schneiden. Man kann setzen

$$x' = b + \lambda c, \quad y' = b + \mu c,$$

denn es ist z. B.

$$[x'\xi] = [b\xi] + \lambda [c\xi] = (-\lambda^2 + \lambda^2)[abcd] = 0$$

(siehe Gleichung 9), also liegt in der That x' in ξ. Wegen 26) erhält man

$$[x'\varepsilon] = [b\varepsilon] + \lambda [c\varepsilon] = -(1+\lambda)[abcd],$$

$$[y'\varepsilon] = -(1+\mu)[abcd].$$

Ferner ist

$$[x'y'] = (\mu - \lambda)[bc].$$

Man multiplicire diese Gleichung mit einem Feld F (äusseren Product zweier Strecken), dessen Inhalt 1 und dessen Stellung senkrecht zur Geraden bc oder $x'y'$ ist, und dividire dann durch das Product der beiden vorhergehenden Gleichungen. Es kommt

$$\frac{[x'y'F]}{[x'\varepsilon][y'\varepsilon]} = \frac{\overline{x'y'}}{\overline{x'\varepsilon}\,.\,\overline{y'\varepsilon}\,.\,|\varepsilon|^2} = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}[bcF],$$

oder

27) $$\Re\overline{x'y'} = \frac{\overline{x'y'}}{\overline{x'\varepsilon}\,.\,\overline{y'\varepsilon}} = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}[bcF]|\varepsilon|^2.$$

Dualistisch dazu ist

27') $$\Re \sin \overline{\xi'\eta'} = \frac{\sin \overline{\xi'\eta'}}{\overline{\xi' e}\,.\,\overline{\eta' e}} = \frac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}[\beta\gamma F']|e|^2,$$

wo ξ' und η' die beiden Ebenen bezeichnen, durch welche die Curvenpunkte x und y aus der beliebigen Sehne ad oder $\beta\gamma$ der Curve projicirt werden (und F' ein zu ad senkrechtes Feld vom Inhalt 1 vorstellt).

Da ε an Stelle der in § 10 benützten festen Schmiegungsebene δ getreten ist, müssen jetzt statt $[x_\mu \delta]$ und $[y_\lambda \delta]$ die äusseren Producte $[x_\mu \varepsilon]$ und $[y_\lambda \varepsilon]$ berechnet werden. Nun ist nach 24)

$$[x\varepsilon] = -(1+\lambda)^3[abcd],$$

folglich

$$\left[\frac{dx}{d\lambda}\varepsilon\right] = \frac{d}{d\lambda}[x\varepsilon] = -3(1+\lambda)^2[abcd],$$

somit

$$[x_\mu \varepsilon] = \left[\left(x + \frac{\mu-\lambda}{3}\frac{dx}{d\lambda}\right)\varepsilon\right] = -(1+\lambda)^2(1+\mu)[abcd]$$

und entsprechend

$$[y_\lambda \varepsilon] = -(1+\lambda)(1+\mu)^2[abcd].$$

In § 9 wurde gefunden

$$[xx_\mu y_\lambda y] = (\mu - \lambda)^6[abcd].$$

Daher ist

$$\frac{[xx_\mu y_\lambda y]}{[x\varepsilon][x_\mu\varepsilon][y_\lambda\varepsilon]y\varepsilon]} = \frac{\overline{xx_\mu y_\lambda y}}{\overline{x\varepsilon}\,.\,\overline{x_\mu\varepsilon}\,.\,\overline{y_\lambda\varepsilon}\,.\,\overline{y\varepsilon}\,.\,|\varepsilon|^4} = \frac{(\mu-\lambda)^6}{(1+\lambda)^6(1+\mu)^6}[abcd]^{-3},$$

mithin der reducirte sechsfache Inhalt des zur Sehne xy gehörigen Schmiegungstetraeders

28) $$\Re V(xy) = \Re\overline{xx_\mu x_\lambda y} = \frac{\overline{xx_\mu x_\lambda y}}{\overline{x\varepsilon}\,.\,\overline{x_\mu\varepsilon}\,.\,\overline{y_\lambda\varepsilon}\,.\,\overline{y\varepsilon}} = \frac{(\mu-\lambda)^6}{(1+\lambda)^6(1+\mu)^6}|\varepsilon|^4[abcd]^{-3}.$$

Einen entsprechenden Ausdruck giebt es für den reducirten Sinus eines Schmiegungstetraeders, nämlich

28') $$\Re \, Sin(\xi\eta) = \frac{(\mu-\lambda)^6}{(1+\lambda)^6(1+\mu)^6}|e|^4[\alpha\beta\gamma\delta]^{-3}.$$

Durch Vergleichung von 27) und 28) ergiebt sich zunächst folgender Satz (vergl. den besonderen Fall bei Schröter a. a. O. S. 308):

Die bezüglich einer willkürlichen festen Schmiegungsebene einer cubischen Raumcurve reducirten Inhalte der zu zwei beliebigen Sehnen dieser Curve gehörigen Schmiegungstetraeder verhalten sich zu einander, wie die sechsten Potenzen der reducirten Längen der beiden Strecken, welche die Schmiegungsebenen in den Endpunkten je einer Sehne auf einem beliebig gewählten Schmiegungsstrahl (der Schnittlinie irgend zweier Schmiegungsebenen der Curve) ausschneiden.

Auf Grund von 27') und 28') können wir hinzufügen, dass die fraglichen reducirten Inhalte sich auch verhalten wie die sechsten Potenzen der *sin* der Flächenwinkel, durch welche die beiden Sehnen, zu welchen die Schmiegungstetraeder gehören, aus einer beliebig gewählten Sehne der Curve projicirt werden, sowie, dass die reducirten *Sin* jener Schmiegungstetraeder in demselben Verhältniss stehen.

Die Gleichungen 11), 12), 24), 25) liefern uns ferner:

$$\frac{[x\eta]}{[x\varepsilon][\eta e]} = \frac{[\xi y]}{[\xi e][y\varepsilon]} = \frac{(\mu-\lambda)^3}{(1+\lambda)^3(1+\mu)^3}[abcd]^{-1},$$

$$\frac{[XY]}{[XE][YE]} = \frac{(\mu-\lambda)^4}{(1+\lambda)^4(1+\mu)^4}[abcd]^{-1},$$

oder:

$$29)\qquad \mathfrak{R}\,\overline{x\eta} = \mathfrak{R}\,\overline{\xi y} = \frac{(\mu-\lambda)^3}{(1+\lambda)^3(1+\mu)^3}|\varepsilon|.|e|.[abcd]^{-1},$$

$$30)\qquad \mathfrak{R}\,mom\,\overline{XY} = \frac{(\mu-\lambda)^4}{(1+\lambda)^4(1+\mu)^4}|E|^2[abcd]^{-1}.$$

Sonach besteht noch, wie die Gegenüberstellung von 28) und 30) bezw. 29) zeigt, der weitere Satz:

Die Quadrate der reducirten Inhalte (wie auch der reducirten Sinus) der Schmiegungstetraeder, die zu zwei beliebigen Sehnen einer cubischen Raumcurve gehören, verhalten sich wie die dritten Potenzen der reducirten Momente der Tangenten in den Endpunkten je einer Sehne, und wie die vierten Potenzen der reducirten Entfernungen eines Endpunktes je einer Sehne von der Schmiegungsebene im anderen Endpunkt.

§ 11.

H. Schröter hat a. a. O. S. 305 den Satz bewiesen:

Irgend vier Punkte einer cubischen Parabel sind die Ecken eines derselben einbeschriebenen Tetraeders; die vier Schmiegungsebenen in diesen Punkten bilden ein zugehöriges, der cubischen Parabel umschriebenes Tetraeder; das Volumen

des einbeschriebenen Tetraeders ist das neunfache von dem Volumen des umschriebenen.

Nach allem Vorhergegangenen, man vergleiche namentlich § 10, dürfen wir bestimmt vermuthen, dass dieser Satz auch für beliebige Raumcurven dritter Ordnung gilt, vorausgesetzt, dass man statt der Rauminhalte selbst die bezüglich einer beliebigen Schmiegungsebene der Curve reducirten Rauminhalte nimmt. Die folgende Untersuchung wird das bestätigen und ausser dem dualistischen Satze auch noch eine neue Eigenschaft der cubischen Parabel ergeben. Wir nehmen zu Ecken des eingeschriebenen Tetraeders die zu den Parameterwerthen 0, λ, μ, ∞ gehörigen Curvenpunkte a, x, y, d, von welchen der erste und letzte ja auch als willkürlich zu betrachten sind. Fasst man das äussere Product der Gleichungen:

$$x = a + 3\lambda b + 3\lambda^2 c + \lambda^3 d,$$

$$y = a + 3\mu b + 3\mu^2 c + \mu^3 d$$

zwischen die Factoren a und d, so fallen die a und d enthaltenden Glieder weg und es kommt

$$[axyd] = 9\lambda\mu(\mu - \lambda)[abcd].$$

Daher ist:

$$31) \quad \Re\overline{axyd} = \frac{\overline{axyd}}{\overline{a\varepsilon}\,.\,\overline{x\varepsilon}\,.\,\overline{y\varepsilon}\,.\,\overline{d\varepsilon}} = \frac{9\lambda\mu(\mu-\lambda)}{(1+\lambda)^3(1+\mu)^3}\,|\varepsilon|^4[abcd]^{-3}.$$

Wir haben jetzt die Ecken des durch die vier Schmiegungsebenen α, ξ, η, δ bestimmten Schmiegungstetraeders auszudrücken. Zwei derselben bestehen in den Schnittpunkten x' und y' des Schmiegungsstrahles $\alpha\delta$ oder bc mit ξ und η, für welche in § 10 gefunden wurde:

$$x' = b + \lambda c, \quad y' = b + \mu c,$$

$$[x'\varepsilon] = -(1+\lambda)[abcd], \quad [y'\varepsilon] = -(1+\mu)[abcd].$$

Die beiden übrigen Ecken — sie mögen a' und d' heissen — liegen auf der Schnittlinie von ξ mit η und ausserdem der erste in der Ebene $\alpha = abc$, der andere in der Ebene $\delta = bcd$, können also durch Gleichungen der Form:

$$a' = a + \varrho b + \sigma c, \quad d' = b + \tau c + v d$$

dargestellt werden. Drückt man mit Hilfe der Gleichungen 9) die äusseren Producte der Punkte a' und d' mit den Ebenen ξ und η aus und setzt dieselben gleich Null, so kommt nach Weglassung des bekanntlich immer von Null verschiedenen Factors $[abcd]$:

$$\lambda^3 - \varrho\lambda^2 + \sigma\lambda = 0, \quad \mu^3 - \varrho\mu^2 + \sigma\mu = 0,$$

$$-\lambda^2 + \tau\lambda - v = 0, \quad -\mu^2 + \tau\mu - v = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\varrho = \tau = \lambda + \mu, \quad \sigma = v = \lambda\mu.$$

Somit hat man

$$[a'x'y'd'] = \lambda\mu(\mu - \lambda)[abcd]$$

und wegen 26)

$$[a'\varepsilon] = [d'\varepsilon] = -(1+\lambda)(1+\mu)[abcd].$$

Daher wird

$$32)\quad \mathfrak{R}\overline{a'x'y'd'} = \frac{\overline{a'x'y'd'}}{\overline{a'\varepsilon}.\overline{x'\varepsilon}.\overline{y'\varepsilon}.\overline{d'\varepsilon}} = \frac{\lambda\mu(\mu-\lambda)}{(1+\lambda)^3(1+\mu)}|\varepsilon|^4[abcd]^{-3}.$$

Folglich ist in der That

$$\mathfrak{R}\overline{axyd} = 9\,\mathfrak{R}\overline{a'x'y'd'}.$$

Der reciproke Satz bedarf nach § 2 keines besonderen Beweises. Er lässt sich folgendermassen aussprechen:

Der bezüglich einer beliebigen Schmiegungsebene einer cubischen Raumcurve reducirte Sinus irgend eines der Curve umschriebenen Tetraeders ist das neunfache von dem reducirten Sinus desjenigen der Curve einbeschriebenen Tetraeders, dessen Ecken in den Anschmiegungspunkten der Seitenebenen des ersten Tetraeders bestehen.

Gehen wir zu dem ersten Satz zurück und wenden ihn auf eine cubische Parabel an, so ist also, wenn ε eine beliebige Schmiegungsebene bezeichnet,

$$\frac{\overline{axyd}}{\overline{a\varepsilon}.\overline{x\varepsilon}.\overline{y\varepsilon}.\overline{d\varepsilon}} = 9\frac{\overline{a'x'y'd'}}{\overline{a'\varepsilon}.\overline{x'\varepsilon}.\overline{y'\varepsilon}.\overline{d'\varepsilon}},$$

aber andererseits nach dem Schröter'schen Satz (der sich hieraus ergiebt, wenn man ε die unendlich ferne Schmiegungsebene der cubischen Parabel bedeuten lässt),

$$\overline{axyd} = 9\overline{a'x'y'd'}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\overline{a\varepsilon}.\overline{x\varepsilon}.\overline{y\varepsilon}.\overline{d\varepsilon} = \overline{a'\varepsilon}.\overline{x'\varepsilon}.\overline{y'\varepsilon}.\overline{d'\varepsilon},$$

oder in Worten:

Steht ein beliebiges, einer cubischen Parabel einbeschriebenes Tetraeder zu einem derselben umschriebenen Tetraeder in der Beziehung, dass die Ecken des ersteren die Anschmiegungspunkte der Seitenebenen des letzteren sind, so haben die Producte der Entfernungen der Ecken des einen und des anderen Tetraeders von irgend einer Schmiegungsebene der cubischen Parabel beide denselben Werth.

Wir wollen jetzt noch den reducirten Inhalt eines beliebigen, einer allgemeinen cubischen Raumcurve einbeschriebenen Tetraeders berechnen, dessen Ecken x_1, x_2, x_3, x_4 heissen und zu den Werthen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des Parameters gehören mögen. Der Einfachheit wegen lassen wir die Schmiegungsebene ε jetzt mit δ zusammenfallen. Es ist dann

$$x_i = a + 3\lambda_i b + 3\lambda_i^2 c + \lambda_i^3 d, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

also:

$$[x_1 x_2 x_3 x_4] = 9 \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda^2_1 & \lambda^3_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda^2_2 & \lambda^3_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda^2_3 & \lambda^3_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda^2_4 & \lambda^3_4 \end{vmatrix} . [abcd] = 9 \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4) \\ (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)[abcd], \end{cases}$$

folglich [siehe 9')]:

$$33) \quad \begin{cases} \Re \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} = \dfrac{\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}}{\overline{x_1 \delta} . \overline{x_2 \delta} . \overline{x_3 \delta} . \overline{x_4 \delta}} \\ = 9(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4) | \delta |^4 [abcd]^{-3}. \end{cases}$$

Der sechsfache Inhalt des zur Sehne $x_i x_k$ gehörigen Schmiegungstetraeders werde mit V_{ik} bezeichnet. Man hat (siehe § 9)

$$\Re V_{ik} = (\lambda_k - \lambda_i)^6 | \delta |^4 [abcd]^{-3}.$$

Daher ist

$$\left(\frac{1}{9} \overline{x_1 x_2 x_3 x_4}\right)^6 = \Re V_{12} . \Re V_{13} . \Re V_{14} . \Re V_{23} . \Re V_{24} . \Re V_{34},$$

das heisst:

Die sechste Potenz des durch neun getheilten reducirten Inhalts eines beliebigen, einer cubischen Raumcurve einbeschriebenen Tetraeders ist gleich dem Product aus den reducirten Inhalten der zu den Kanten dieses Tetraeders gehörigen Schmiegungstetraeder der Curve.

(Verallgemeinerung eines Satzes von Schröter a. a. O. S. 308.)

Den reciproken Satz zu formuliren, kann dem Leser überlassen bleiben.

§ 12.

Es finden sich in der schon wiederholt angeführten Abhandlung von Schröter (a. a. O. S. 314—318) auch einige (zum Theil von Hurwitz herrührende) Sätze über Inhalte von Körpern, zu deren Begrenzung Stücken der Tangentenfläche einer cubischen Parabel, oder Stücken von Kegelflächen, welche eine cubische Parabel zur Leitlinie haben, gehören. Ohne die in Betracht kommenden metrischen Eigenschaften der Collineationen genauer zu untersuchen, können wir doch, auf die Ergebnisse der letzten Paragraphen gestützt, die Regel entwickeln, nach welcher die projective Verallgemeinerung derartiger Sätze vorzunehmen ist. Es hat sich gezeigt, dass bei der projectiven Verallgemeinerung von Sätzen über eine cubische Parabel an Stelle des Inhalts eines Tetraeders der „reducirte" Inhalt tritt, das heisst der Quotient aus dem Inhalt und dem Product der Entfernungen der Ecken des Tetraeders von einer willkürlichen Schmiegungsebene ε der Raumcurve dritter Ordnung allgemeinster Art, welche die Stelle der cubischen Parabel einnimmt. Handelt es sich um einen beliebig begrenzten Körper, so wird man denselben in tetraedrische Elemente zerlegen. Denkt

man sich ein jedes dieser Elemente mit einer Masse versehen, die der vierten Potenz der Enfernung eines mittleren seiner Punkte von der Schmiegungsebene s umgekehrt proportional ist, so hat man offenbar beim Uebergang von der cubischen Parabel zur allgemeinsten cubischen Raumcurve die gesammte Masse des Körpers statt seines Inhaltes einzuführen. Die fraglichen Sätze von Hurwitz und Schröter nehmen dann folgende Form an:

1. Bezeichnet $abcd$ irgend ein Schmiegungstetraeder einer beliebigen cubischen Raumcurve, von welchem die Ecken a und d auf der Curve liegen, so begrenzen die Schmiegungsebenen abc und bcd nebst den Stücken von Kegelflächen dritter Ordnung, durch welche der Curvenbogen ad aus den Ecken b und c projicirt wird, einen Körper, dessen Masse ein Zehntel von der Masse des Schmiegungstetraeders beträgt, vorausgesetzt, dass man jedem Element dieser Körper eine Masse ertheilt, die der vierten Potenz der Entfernung eines mittleren seiner Punkte von einer willkürlichen Schmiegungsebene s der Curve umgekehrt proportional ist.*

2. Zieht man von a und d nach sämmtlichen zwischenliegenden Punkten der cubischen Raumcurve Strahlen, so schliessen die erhaltenen Kegelstücken einen Körper ein, dessen Masse [bei derselben Voraussetzung über die Massenvertheilung wie unter 1)] drei Zehntel von der Masse des Schmiegungstetraeders $abcd$ ist.

3. Die geradlinige abwickelbare Fläche vierter Ordnung, welche von sämmtlichen Tangenten der cubischen Raumcurve gebildet wird, theilt das Schmiegungstetraeder $abcd$ in zwei solche Stücken, deren Massen [bei der unter 1) getroffenen Festsetzung über die Massenvertheilung] sich zu einander verhalten, wie 29 : 1, wobei das Stück mit der grösseren Masse an der Kante ad liegt.

Um vorstehende Sätze direct zu beweisen, berechnen wir zuerst die Masse des Schmiegungstetraeders $abcd$. Wir denken uns die Parametervertheilung auf der Curve so vorgenommen, dass den positiven Werthen des Parameters λ die Punkte des zwischen a und d innerhalb des genannten Tetraeders verlaufenden Curvenbogens entsprechen. Ein beliebiger Punkt z innerhalb jenes Tetraeders ist dann durch

$$z = a + u(b-a) + v(c-a) + w(d-a)$$

mit der Beschränkung

$$0 \leqq u + v + w \leqq 1$$

dargestellt. Durch drei Schaaren von Ebenen, welche durch je zwei der

---

* Will man das Auftreten unendlich grosser Massen vermeiden, so muss die Schmiegungsebene s natürlich so gewählt werden, dass sie die betrachteten Körper nicht schneidet.

drei Punkte $(b-a)$, $(c-a)$, $(d-a)$ gehen, zerlegen wir das Tetraeder in (unregelmässig hexaedrische) Elemente. Den Inhalt des an den Punkt z stossenden Elementes kann man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung gleich dem sechsfachen Inhalt des Tetraeders mit den Ecken z, $z+\frac{\partial z}{\partial u}du$, $z+\frac{\partial z}{\partial v}dv$, $z+\frac{\partial z}{\partial w}dw$, das heisst gleich

$$\frac{\left[z\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\right]}{|z|^4}du\,dv\,dw \quad \text{oder} \quad \frac{[abcd]}{|z|^4}du\,dv\,dw$$

setzen. Daher ist, wenn die Masse dieses Elementes mit dM bezeichnet und die specifische Masse gleich 1 genommen wird:

$$\left\{\begin{aligned} dM = \frac{[abcd]}{z\varepsilon^4|z|^4}du\,dv\,dw &= \frac{[abcd].|\varepsilon|^4}{z\varepsilon^4|z|^4|\varepsilon|^4}du\,dv\,dw \\ &= \frac{[abcd].|\varepsilon|^4}{[z\varepsilon]^4}du\,dv\,dw, \end{aligned}\right.$$

oder weil [vergl. 26)] $[z\varepsilon]=[a\varepsilon]=[b\varepsilon]=[c\varepsilon]=[d\varepsilon]=-[abcd]$,

$$dM = \frac{[abcd].|\varepsilon|^3}{[a\varepsilon][b\varepsilon][c\varepsilon][d\varepsilon]}du\,dv\,dw.$$

Folglich hat man, weil das über die fraglichen Werthe von u, v, w erstreckte dreifache Integral von $du\,dv\,dw$ gleich 1/6 ist, für die Masse des ganzen Tetraeders $abcd$:

$$M(abcd) = \frac{1}{6}\frac{[abcd].|\varepsilon|^4}{[a\varepsilon][b\varepsilon][c\varepsilon][d\varepsilon]} = \frac{1}{6}\frac{\overline{abcd}}{\overline{a\varepsilon}.\overline{b\varepsilon}.\overline{c\varepsilon}.\overline{d\varepsilon}},$$

ein nach dem Früheren allerdings selbstverständliches Ergebniss.

Sei nun x ein beliebiger, zum Parameterwerth λ gehöriger Punkt des Curvenbogens ad, dann bildet das Tetraeder mit den Ecken

$$b,\ c,\ x,\ x+\frac{dx}{d\lambda}d\lambda$$

ein Element des im Satz unter 1) beschriebenen Körpers. Das Verhältniss der Masse dieses Elementes zur Masse des Tetraeders $abcd$ hat (wegen

$$\left[bcx\left(x+\frac{dx}{d\lambda}d\lambda\right)\right] = \left[bcx\frac{dx}{d\lambda}\right]d\lambda = 3[abcd]\lambda^2 d\lambda,$$

$$[x\varepsilon] = (1+\lambda)^3[abcd], \quad [a\varepsilon]=[b\varepsilon]=-[abcd])$$

den Werth

$$\frac{3\lambda^2 d\lambda}{(1+\lambda)^6}.$$

Da jedoch

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{(1+\lambda)^6} = \frac{1}{30}$$

ist, so wird in der That die Masse des betrachteten Körpers gleich $\frac{1}{10}M(abcd)$.

Von dem unter 2) namhaft gemachten Körper bildet das Tetraeder mit den Ecken:

$$a,\ x,\ x+\frac{dx}{d\lambda}d\lambda,\ d$$

ein Element. Da nun

$$[a\varepsilon]=[b\varepsilon]=[c\varepsilon]=[d\varepsilon]$$

und

$$\left[a\,x\frac{dx}{d\lambda}d\right]=3\left[a\,b\,x\frac{dx}{d\lambda}\right]$$

ist, so hat dieser Körper, ganz der Behauptung entsprechend, eine dreimal so grosse Masse als der im Satz unter 1) vorkommende.

Die Schnittpunkte einer beliebigen Tangente X der cubischen Raumcurve mit den Schmiegungsebenen abc und bcd sollen wie früher x_1 und x_2 genannt werden. Ferner mögen die Schmiegungsebene ξ und die ihr unendlich benachbarte $\xi+\frac{d\xi}{d\lambda}d\lambda$, welche sich beide in der Tangente X schneiden, die Kante bc in x' und $x'+\frac{dx'}{d\lambda}d\lambda$ treffen. Wenn λ von 0 bis ∞ wächst, oder der Berührungspunkt x der Tangente X von a bis d fortschreitet, so setzen die verschiedenen Lagen des unendlich schmalen Tetraeders mit den Ecken $x_1,\ x_2,\ x',\ x'+\frac{dx'}{d\lambda}d\lambda$ einen Körper zusammen, der durch die Schmiegungsebenen abc und bcd, sowie die Tangentenfläche der Curve begrenzt wird (vergl. Schröter a. a. O. S. 317). Nun ist zufolge 17)

$$x_1=a+2\lambda b+\lambda^2 c,\quad x_2=b+2\lambda c+\lambda^2 d$$

und nach § 10

$$x'=b+\lambda c,$$

also

$$\frac{dx'}{d\lambda}=c,$$

und somit

$$\left[x_1x_2x'\left(x'+\frac{dx'}{d\lambda}d\lambda\right)\right]=\left[x_1x_2x'\frac{dx'}{d\lambda}\right]=\lambda^2[abcd].$$

Ferner erhält man mit Hilfe von 26):

$$[x_1\varepsilon]=[x_2\varepsilon]=-(1+\lambda)^2[abcd],\quad [x'\varepsilon]=-(1+\lambda)[abcd].$$

Daher ist die Masse des in Rede stehenden unendlich schmalen Tetraeders gleich

$$\frac{\lambda^2\,d\lambda}{(1+\lambda)^6}M(abcd)$$

und folglich die gesammte Masse des oben genannten Körpers $\frac{1}{30}M(abcd)$, was zu beweisen war.

Die zu den obigen dualistischen Sätze würden sich nicht ohne Einführung neuer geometrischer Begriffe formuliren lassen, weshalb hier von deren weiterer Verfolgung Abstand genommen werden soll.

§ 13.

Es wurde einigemal des besonderen Falles gedacht, in welchem eine Schmiegungsebene der cubischen Raumcurve unendlich fern liegt, die Curve also eine cubische Parabel ist. Auch ohne eine besondere Beschaffenheit der Curve vorauszusetzen, kann man vielen der aufgestellten Sätze dadurch eine besondere Form geben, dass man einzelne der darin vorkommenden Punkte im Unendlichen annimmt. Um nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir uns auf einige kurze Andeutungen darüber beschränken; für den Kenner der Grassmann'schen Methoden versteht es sich ohnehin von selbst, wie solche Fälle zu behandeln sind.

Ist ein Punkt p in Unendliche gerückt, so kann derselbe nach Grassmann durch eine nach ihm gerichtete Strecke p' ersetzt werden. Da es sich hier um lauter homogene Gleichungen handelt, so dürfen wir p' die Länge 1 beilegen. Es tritt dann an die Stelle der Entfernung $\overline{p\varepsilon}$ des Punktes p von irgend einer Ebene ε (vom Gewicht 1) der metrische Werth des äusseren Products $[p'\varepsilon]$, welcher gleich $sin\,\overline{p'\varepsilon}$, das heisst gleich dem sin des Winkels ist, den p' und ε mit einander bilden. Nehmen wir z. B. von der ersten Gleichungsreihe des Satzes in § 3 blos das erste und letzte Glied, was die Gleichung

$$\overline{a\delta}\,.\,\overline{d\xi}\,.\,\overline{x\alpha}+\overline{a\xi}\,.\,\overline{d\alpha}\,.\,\overline{x\delta}=0$$

liefert*, und verlegen wir die drei Curvenpunkte a, d, x ins Unendliche, so entsteht (bei Veränderung der Buchstaben) folgender Satz:

Sind die Strecken a_1, a_2, a_3 den Asymptoten einer cubischen Hyperbel parallel und bezeichnet α_1, α_2, α_3 die zugehörigen Asymptotenebenen, $\overline{\alpha_i a_k}$ den Neigungswinkel von a_i gegen α_k, so ist

$$sin\,\overline{a_1\alpha_2}\;sin\,\overline{a_2\alpha_3}\;sin\,\overline{a_3\alpha_1}+sin\,\overline{a_1\alpha_3}\;sin\,\overline{a_2\alpha_1}\;sin\,\overline{a_3\alpha_2}=0.$$

Eine unendlich ferne Gerade G kann man durch ein Feld G' von bestimmter Stellung ersetzen, dessen Flächeninhalt gleich 1 angenommen werden mag. Wenn dann H eine endliche Gerade (vom Gewicht 1) bezeichnet, so ist statt des bedeutungslos gewordenen Ausdrucks $mom\,\overline{GH}$ der metrische Werth des äusseren Products $[G'H]$, das heisst $sin\,\overline{G'H}$, der sin des durch die Stellung von G' und die Richtung von H bestimmten Winkels, zu nehmen; ebenso statt $mom\,\overline{pq,\,G}$ der metrische Werth des äusseren Products $[pqG']$, das heisst die Länge der Projection der Strecke pq auf eine zur Stellung von G' senkrechte Gerade, oder, was dasselbe ist, die Differenz der Entfernungen der Punkte p und q von einer die Stellung

* Dieser Satz könnte übrigens leicht unmittelbar aus der Thatsache abgeleitet werden, dass je drei Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve sich in einem Punkte der Verbindungsebene ihrer Anschmiegungspunkte schneiden, also der folgende Satz daraus, dass die Asymptotenebenen einer cubischen Hyperbel ein Prisma bilden.

von G' besitzenden Ebene. So können wir z. B. in der dritten Gleichungsreihe des Satzes in § 3, nämlich:

$$\begin{cases} 12\, mom\, \overline{ab,\ X}\, mom\, \overline{cd,\ X} = 3\, mom\, \overline{ac,\ X}\, mom\, \overline{bd,\ X} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 4\, mom\, \overline{ad,\ X}\, mom\, \overline{bc,\ X}, \end{cases}$$

die Annahme machen, dass X die unendlich ferne Tangente einer cubischen Parabel vorstelle, und erhalten dann den Satz:

Ist $abcd$ ein beliebiges Schmiegungstetraeder einer cubischen Parabel und bedeuten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ die Entfernungen der Ecken dieses Tetraeders von einer Ebene mit Achsenstellung (das heisst einer Ebene, deren unendlich ferne Gerade mit der unendlich fernen Tangente der Curve zusammenfällt), so hat man:

$$12(\bar{a}-\bar{b})(\bar{c}-\bar{d}) = 3(\bar{a}-\bar{c})(\bar{b}-\bar{d}) = 4(\bar{a}-\bar{d})(\bar{b}-\bar{c}).$$

XIII.

Ueber die mechanische Erzeugung der orthogonalen Projectionen ebener Curven, der Ellipsen und der Trochoiden.

Von

Dr. N. Delaunay,

Professor der Mechanik an dem landwirthschaftlichen Institut in Novo-Alexandria, Russland, Gouvernement Lublin.

Hierzu Tafel VIII Figur 1—11.

§ 1. Nehmen wir auf den vier Seiten des in Figur 1 Taf. VIII gezeichneten Gelenkrhombus $ABCD$ die vier in einer festen Geraden mn liegenden Punkte M, P, Q, N, so bleiben diese vier Punkte während der Veränderung desselben stets auf dieser Geraden, und die Aehnlichkeit der Dreiecke PDJ und MBJ giebt:

$$1) \qquad \frac{JB}{JD} = \frac{MB}{PD} = const.$$

Wenn die Punkte M und N so genommen sind, dass

$$BM = BN,$$

so wird auch

$$DP = DQ$$

sein, und die Gerade BD wird der Geraden mn perpendiculär.

Indem wir also die Gerade mn als eine Abscissenachse ansehen, können wir sagen: Die Ordinaten der Punkte B und D eines Gelenkrhombus $ABCD$ (Fig. 2), in welchem $BM = BN$ und die Punkte M und N längs der Abscissenachse mn gleiten, bleiben in einem constanten Verhältnisse während der Veränderung des Rhombus.

Wenn der Punkt B eine Curve σ beschreibt, so beschreibt der Punkt D eine Curve σ', deren Ordinaten in einem constanten Verhältnisse mit den Ordinaten der Curve σ sind.

Wenn man die in einer Ebene xoy (Fig. 3) liegende Curve σ auf die Ebene xoy' orthogonal projectirt und die gemeinschaftliche Gerade ox dieser Ebenen als die Abscissenachse der orthogonalen Systeme xoy und xoy' ansieht, so sind auch die Ordinaten sp und sp' der Curve σ und ihrer orthogonalen Projection σ' in einem constanten Verhältnisse

$$\frac{sp'}{sp} = \cos\alpha,$$

wo α der Projectionswinkel ist.

Der in Figur 4 gezeichnete Mechanismus, in welchem $ABCD$ ein Rhombus ist, $BM = BN$ und die Punkte M und N längs einer Geraden gleiten, ist also ein Projector, und wenn der Punkt B des Projectors eine ebene Curve σ beschreibt, so beschreibt der Punkt D die orthogonale Projection der Curve σ.*

Der Projector kann bei Webe- und Tapetendruckerei gute Dienste leisten, sowohl als in allen denjenigen Fällen, wo eine Zeichnung in einer gegebenen Richtung verlängert oder verkürzt werden muss.

§ 2. Bekanntlich ist die orthogonale Projection des Kreises eine Ellipse. Wenn also der Punkt B eines Projectors einen Kreis beschreibt, so beschreibt der Punkt D eine Ellipse. Damit der Punkt B einen Kreis um O beschreibe, braucht man nur den Radius OB (Fig. 6) des Kreises durch eine Kurbel zu ersetzen, die sich um die feste Achse O dreht.

So bekommen wir einen Ellipsograph (Fig. 6), in welchem der Punkt D Ellipsen beschreibt.

Nebenbei ersieht man daraus, dass:

1. Wenn $AB = AM$, die Ellipse in eine Gerade mn degenerirt. In dem Falle einer gleichmässigen Drehung der Kurbel OB wird die geradlinige Bewegung des Punktes D eine harmonische.
2. Wenn $AB < AM < BM$, ist die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn parallel und dem Diameter $2OB$ des Kreises gleich. Die Punkte B und D durchlaufen ihre Bahnen in demselben Sinne.
3. Wenn $AM < AB < BM$ ist, so ist ebenfalls die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn parallel und gleich der $2OB$, aber die Punkte B und D durchlaufen ihre Bahnen in entgegengesetzter Richtung.
4. Ist aber $BA > BM$ (Fig. 7), so ist die grosse Achse der Ellipse der Geraden mn perpendiculär und die kleine Achse $= 2OB$.
5. In dem Falle $AB = BM$ (Fig. 8) beschreibt der Punkt D einen Kreis, so dass man den Radius desselben durch eine Kurbel $O'D$ ersetzen kann. Diesen Mechanismus habe ich Reversor benannt.

In dem Reversor entsteht die Transformation der Drehung der Kurbel OB in eine Drehung der Kurbel $O'D$, als ob diese Kurbeln mit gleichen Stirnrädern versehen wären.

Diese Eigenschaft des Reversors lässt, in analoger Weise, wie es im Watt'schen Planetenrade geschieht, eine Verdoppelung der Drehungen erhalten.

§ 3. **Theorem.** Die Mitte des Abstandes zweier Punkte, welche zwei Kreise mit einem constanten Verhältnisse der

* Die Geradführung der Punkte M und N ist in Figur 5 vermittelst zwei Hart'scher Mechanismen erzeugt.

Geschwindigkeiten durchlaufen, beschreibt eine Trochoide, die, je nachdem die Drehungen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgen, Epitrochoiden oder Hypotrochoiden sind.

Nehmen wir an, dass die Punkte M und N die Kreise O und O' (Fig. 9) mit einem constanten Verhältnisse der Geschwindigkeiten durchlaufen, und dass C die Mitte des Abstandes der Centra O und O' ist. Bilden wir ferner die Parallelogramme $OCAM$ und $O'CBN$, so sind AM und BN einander gleich und parallel. Ebenso kann man auch die Parallelogramme $AMBN$ und $ACBD$ bilden. Da p die Mitte der Diagonale MN ist, so muss es auch die Mitte der Diagonale AB und deswegen auch die Mitte der Diagonale CD sein. Die Strecken CA und CB drehen sich in Folge ihres Parallelismus mit den Radien OM und $O'N$ um den Punkt C mit einem constanten Verhältnisse der Geschwindigkeiten, und nach einem bekannten Satz muss der vierte Eckpunkt D des Parallelogramms $ACBD$ eine Trochoide beschreiben.* Wenn aber der Punkt D eine Trochoide beschreibt, so beschreibt der Punkt p, als die Mitte des Vectors CD, auch eine Trochoide. Wir haben gezeigt, dass der Punkt p die Mitte des Abstandes MN ist; deshalb können wir sagen: dass die Mitte des Abstandes MN eine Trochoide beschreibt, was zu beweisen war.

Man ersieht leicht, dass:

1. der Punkt p eine Hypotrochoide erzeugt, wenn die Radien OM und $O'N$ sich in entgegengesetzter Richtung drehen;
2. der Punkt p eine Epitrochoide erzeugt, wenn die Radien OM und $O'N$ sich in gleicher Richtung drehen;
3. der Punkt p eine Epicykloide oder Hypocykloide erzeugt, wenn die Geschwindigkeiten der Punkte M und N einander gleich sind.
4. Wenn einer der Kreise in eine Gerade degenerirt, so degenerirt die Bahn der Mitte des Abstandes MN in eine Cycloide.

Um die Mitte des Abstandes MN kinematisch zu erhalten, kann man die Punkte M und N durch einen gleichschenkligen Pantograph $pqrsMN$ (Fig. 10) verbinden.

Nach dem oben Gesagten kann man die graphische Construction der Cykloiden auf folgende Weise erzeugen:

Man nimmt auf einem Kreise O (Fig. 11) die Punkte: 1, 2, 3, 4... in gleichem Abstande von einander und die Punkte: 1', 2', 3', 4'... auf einer Geraden auch in gleichem Abstande von einander; man verbindet die Punkte 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'... Der geometrische Ort der Strecken 1 1', 2 2', 3 3'... ist eine Cykloide, welche verschlungen, gestreckt oder gespitzt ist, je nachdem die Kreisbogen 1 2, 2 3, 3 4... kleiner, grösser oder gleich den Strecken 1'2', 2'3', 3'4'... sind.

---

* L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik". 1888. Bd. I S. 136.

Kleinere Mittheilungen.

XVIII. Ueber einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert.

Die vorliegende Mittheilung bezweckt eine Erweiterung eines zahlentheoretischen Satzes, welchen Herr Schubert angegeben* und zu dem Herr Busche einen Beweis geliefert hat.**

Ist a eine positive ganze Zahl und $q = \frac{m}{n}$ (m und n relativ prim) ein positiver unechter Bruch, so mag $F_q(a)$, wenn $a.q$ eine ganze Zahl ist, eben diese ganze Zahl und wenn $a.q$ ein Bruch ist, die nächst grössere ganze Zahl bezeichnen. Die Operation, welche von a zu $F_q(a)$ führt, mag kurz als Operation F_q bezeichnet werden. Die zu der Operation F_q inverse Operation werde mit Φ_q bezeichnet und das Resultat dieser auf a angewandten Operation mit $\Phi_q(a)$.

Die Operation F_q kann man sich auf die Zahl a nun offenbar in der Weise angewandt denken, dass zu ma eine positive Zahl k, welche $< n$ ist, so addirt wird, dass $ma + k \equiv 0 \mod n$ ist, alsdann ist

$$F_q(a) = \frac{ma + k}{n}.$$

Hieraus folgt nun, dass die Operation Φ_q dadurch ausgeführt werden kann, dass von dem n-fachen der vorgelegten Zahl a eine positive Zahl k ($< n$) so subtrahirt wird, dass $na - k \equiv 0 \mod m$ ist; dann ist

$$\Phi_q(a) = \frac{na - k}{m}.$$

Hiermit ist auch zugleich die Unmöglichkeit einer Mehrdeutigkeit der Operation Φ_q bewiesen. Man sieht jedoch auch, dass die Operation Φ_q auf solche Zahlen a unanwendbar ist, für welche der kleinste positive Rest von $n.a$ nach $m \geqq n$ ist. Dem entsprechend wollen wir eine Zahl, auf welche die Operation Φ_q anwendbar ist, reducirbar in Bezug auf den Quotienten q, eine solche dagegen, auf welche diese Operation nicht anwendbar ist, unreducirbar nennen, und man sieht alsdann leicht, dass jede einer reducirbaren Zahl $\mod m$ congruente Zahl selbst wieder reducirbar,

* Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg Bd. III S. 223.
** Ib. p. 225.

jede einer unreducirbaren Zahl $mod\, m$ congruente selbst unreducirbar ist. Werden also alle Zahlen zu m arithmetischen Reihen von der gleichen Differenz m angeordnet, so wird jede der Reihen entweder nur reducirbare oder nur unreducirbare Zahlen enthalten, und zwar sehen wir nach dem oben Gesagten unmittelbar, dass es n solche Reihen reducirbarer und $m-n$ Reihen unreducirbarer Zahlen giebt. Die Trennung der reducirbaren und unreducirbaren Zahlen lässt sich nun leicht folgendermassen bewerkstelligen: Man nehme die Zahlen $1 \dots m-1$ und stelle von den aus diesen durch Multiplication mit n hervorgehenden Zahlen, welche ja auch wieder unter sich alle incongruent $mod\, m$ sind, die kleinsten positiven Reste nach m auf, dann sind diejenigen Zahlen, deren n-faches einen kleinsten Rest nach m besitzt, welcher $< n$ ist, die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der reducirbaren Zahlen, zu denen dann noch die Reihe der durch m theilbaren Zahlen hinzukommt, während die übrigen $m-n$ Zahlen die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der unreducirbaren Zahlen sind.

Berücksichtigt man nun, dass sich jede reducirbare Zahl ihrem Begriff nach durch ein- oder mehrfache Anwendung der Operation F_q aus einer unreducirbaren Zahl ergeben muss, wegen der Eindeutigkeit der inversen Operation Φ_q aber auch nur aus einer, so ergiebt sich folgender Satz:

„Zu einem beliebigen unechten Bruch $q = \frac{m}{n}$ lassen sich stets $m-n$ Zahlen aus der Reihe $1 \dots m-1$ so auswählen, dass, wenn man mit diesen $m-n$ Zahlen als Anfangsgliedern arithmetische Reihen von der Differenz m bildet und man auf alle Zahlen dieser $m-n$ Reihen die Operation F_q anwendet, auf die hierdurch erhaltenen Zahlen wieder dieselbe Operation u. s. f., man jede Zahl einmal erhält, aber auch nur einmal."

Der Satz des Herrn **Schubert** beschränkt sich auf den Fall

$$m - n = 1.$$

Schliesslich betrachten wir noch das Beispiel $m = 7$, $n = 5$. Da die fünffachen Werthe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 nach 7 die kleinsten Reste 5, 3, 1, 6, 4, 2 besitzen, so stellen die Reihen:

$$\begin{array}{ccccccc} 2, & 9, & 16, & 23, & 30, & 37, & 44\dots \\ 3, & 10, & 17, & 24, & 31, & 38, & 45\dots \\ 5, & 12, & 19, & 26, & 33, & 40, & 47\dots \\ 6, & 13, & 20, & 27, & 34, & 41, & 48\dots \\ 7, & 14, & 21, & 28, & 35, & 42, & 49\dots \end{array}$$

alle reducirbaren und die Reihen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 8, & 15, & 22, & 29, & 36, & 43, & 50\dots \\ 4, & 11, & 18, & 25, & 32, & 39, & 46\dots & \end{array}$$

alle unreducirbaren Zahlen dar. In der That liefert nun eine iterirte Anwendung der Operation F_q auf die Zahlen der zweiten Serie jede Zahl einmal, aber auch nur einmal, wie nachfolgendes Schema zeigt:

1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 40...
4, 6, 9, 13, 19, 27, 38...
8, 12, 17, 24, 34, 48...
11, 16, 23, 33, 47...
15, 21, 30, 42...
18, 26, 37...
22, 31, 44...
25, 35, 49...
29, 41...
32, 45...
36...
39...
43...
46...
50...

Rostock, den 6. April 1895. W. Ahrens.

XIX. Kurze Ableitung der Bedingungen, dass zwei algebraische Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben.

Mein College, Herr Prof. Stickelberger, hat mir gelegentlich bemerkt, dass man die Sätze über die Theilung von ganzen Zahlen oder von ganzen Functionen besser auf den Begriff des kleinsten gemeinsamen Vielfachen statt auf den des grössten gemeinsamen Theilers gründe. Um nämlich zu wissen, dass zwei ganze rationale Functionen von x, $f(x)$ vom m^{ten} und $g(x)$ vom n^{ten} Grade, einen gemeinsamen Theiler besitzen, der mindestens vom p^{ten} Grade ist, braucht man nur zu zeigen, dass ein gemeinsames Vielfaches, das heisst eine durch f und durch g theilbare Function, vom Grade $m+n-p$ existirt.

Ist nämlich M ein gemeinsames Vielfaches niedrigsten Grades von f und g, so muss fg durch M theilbar sein, weil sonst ein gemeinsames Vielfaches niedrigeren Grades als M existirte. Setzt man $fg = Mh$, so zeigen die Gleichungen:

$$f = \frac{M}{g} \cdot h, \quad g = \frac{M}{f} \cdot h,$$

weil M durch f und durch g theilbar ist, dass f und g den Theiler h haben. Giebt es ein gemeinsames Vielfaches vom Grade $m+n-p$, so ist M höchstens vom Grade $m+n-p$, also der Grad von h grösser oder gleich p.

In den folgenden Zeilen sollen mit Hilfe dieses Satzes die bekannten, nothwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet werden dafür, dass die beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Theiler haben.

§ 1.

Sollen zwei ganze Functionen A_{n-p}, B_{m-p} (die Indices bezeichnen stets den Grad) von den Graden $n-p$ und $m-p$ gefunden werden, so dass die Function

$$1) \qquad A_{n-p} f - B_{m-p} g = C_{p-1}$$

höchstens vom Grade $p-1$ werde, so hat man $n-p+1+m-p+1$ Coefficienten zu bestimmen und für sie $m+n-2p+1$ Gleichungen, indem die Potenzen $x^{m+n-p}, x^{m+n-p-1}, \ldots x^p$ in dem Ausdruck linker Hand verschwinden müssen. Da die Gleichungen linear und homogen in den zu bestimmenden Coefficienten sind und ihre Anzahl kleiner als die der letzteren ist, lassen sich diese Gleichungen durch Werthe der Coefficienten befriedigen, die nicht alle Null sind, so dass also solche Functionen A_{n-p}, B_{m-p} stets sicher existiren.

Werden aber zwei Functionen D_{n-p} und E_{m-p} von den Graden $n-p$ und $m-p$ gesucht, die

$$2) \qquad D_{n-p} f - E_{m-p} g = F_{p-2}$$

zu einer Function vom Grade $p-2$ höchstens machen, so hat man zwischen den unbekannten Coefficienten jetzt eine Gleichung mehr wie vorhin, so dass die Zahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich ist.

Schreibt man

$$\begin{aligned}
f &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,\\
g &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,\\
D_{n-p} &= r_0 x^{n-p} + r_1 x^{n-p-1} + \cdots + r_{n-p},\\
E_{m-p} &= s_0 x^{m-p} + s_1 x^{m-p-1} + \cdots + s_{m-p},
\end{aligned}$$

so werden diese Gleichungen:

$$3) \qquad \begin{cases}
0 = a_0 r_0 - b_0 s_0,\\
0 = a_1 r_0 - b_1 s_0 + a_0 r_1 - b_0 s_1,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
0 = a_\mu r_0 - b_\mu s_0 + \cdots + a_{m-p+1} r_{n-p} - b_{n-p+1} s_{m-p},
\end{cases}$$

wo μ für $m+n-2p+1$ gesetzt ist und hier wie im Folgenden angenommen wird, dass alle a, b, r, s, deren Indices bezw. grösser als m, n, $n-p$, $m-p$ sind, Null gesetzt werden.

Sollen also nicht alle r und s Null sein, in welchem Falle auch D_{n-p}, E_{m-p} identisch Null wären, so muss die Determinante

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_0\, 0 & 0 & b_0\, 0 & 0 \\ a_1\, a_0 & 0 & b_1\, b_0 & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_\mu a_{\mu-1} \ldots & a_{m-p+1} & b_\mu b_{\mu-1} \ldots & b_{n-p+1} \end{vmatrix}$$

von $\mu + 1 = m + n - 2p + 2$ Zeilen und Reihen Null sein. Und umgekehrt, wenn diese Determinante verschwindet, giebt es sicher Werthe der Coefficienten r, s, die nicht alle Null sind und also Functionen der gewünschten Eigenschaft liefern. Weiss man andererseits, dass es solche Functionen giebt, dass also die r und s nicht alle Null sind, so muss $\Delta_p = 0$ sein. Kann man daher Functionen finden, für die

$$D_{n-p} f - E_{m-p} g$$

vom $p-2^{\text{ten}}$ Grade höchstens ist, so ist $\Delta_p = 0$; und umgekehrt, wenn $\Delta_p = 0$ ist, giebt es solche Functionen.

Dies hat nur einen Sinn, wenn $p \gtreqless 2$ ist. Für $p = 1$ ist aber $\Delta_1 = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass es Functionen D_{n-1} und E_{m-1} giebt, die nicht identisch Null sind und die Gleichung

$$4)\qquad D_{n-1} f = E_{m-1} g$$

erfüllen.

§ 2.

Gesetzt, es hätten f und g einen grössten gemeinsamen Theiler h vom q^{ten} Grade. Stellt man sich die q-Gleichungen auf, die für $p = 1, 2, \ldots q$ der Gleichung 1) entsprechen, so sind die Functionen C_0, $C_1, \ldots C_{q-1}$ alle durch den Theiler h vom Grade q theilbar und daher, weil sie niedrigeren Grades sind, alle gleich Null. Die Gleichung 4) ist daher durch

$$D_{n-1} = A_{n-1}, \quad E_{m-1} = B_{m-1}$$

erfüllt, und den Gleichungen 2) wird durch

$$D_{n-p} = A_{n-p}, \quad E_{m-p} = B_{m-p}, \quad F_{p-2} = 0$$

genügt; deswegen müssen die Determinanten Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_q$ alle Null sein.

Seien nun diese Determinanten alle Null, dagegen Δ_{q+1} nicht Null. Dann können f und g keinen Theiler haben, dessen Grad q überstiege. Dass sie aber einen Theiler q^{ten} Grades haben folgt so:

Weil $\Delta_1 = 0$ ist, gilt die Gleichung 4), die zeigt, dass die Function $D_{n-1} f = E_{m-1} g$ vom Grade $m + n - 1$ sowohl durch f wie durch g theilbar ist. Folglich haben f und g sicher mindestens einen gemeinsamen Theiler ersten Grades. Wegen $\Delta_2 = 0$ besteht eine Gleichung:

$$D_{n-2} f - E_{m-2} g = F_0.$$

Weil aber f und g einen Theiler ersten Grades haben, muss die Constante $F_0 = 0$ sein. Daher ist:

$$D_{n-2} f = E_{m-2} g$$

ein gemeinsames Vielfaches von f und g vom Grade $m+n-2$ und die beiden Functionen haben also sicher mindestens einen gemeinsamen Theiler zweiten Grades. Deswegen wird in der Gleichung:

$$D_{n-3} f - E_{m-3} g = F_1,$$

die wegen $\Delta_3 = 0$ besteht, $F_1 = 0$, weil es höchstens vom ersten Grade ist und durch eine Function zweiten Grades theilbar sein muss. Die Gleichung

$$D_{n-3} f = E_{m-3} g$$

zeigt dann, dass f und g mindestens einen gemeinsamen Theiler dritten Grades haben u. s. w., bis schliesslich $\Delta_q = 0$ auf einen Theiler q^{ten} Grades führt.

Also sind die Gleichungen

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \ldots \Delta_q = 0$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die beiden Functionen f und g einen grössten gemeinsamen Theiler h vom q^{ten} Grade haben.

§ 3.

Bildet man nun die Gleichung

$$A_{n-q-1} f = B_{m-q-1} g = C_q,$$

so muss C_q durch h theilbar sein. Wäre es nicht vom q^{ten}, sondern von einem niedrigeren Grade, so müsste es also identisch Null sein. Dann wäre aber

$$A_{n-q-1} f - B_{m-q-1} g$$

ein gemeinsames Vielfaches von f und g vom Grade $m+n-q-1$, f hätte also mit g einen Factor $(q+1)^{\text{ten}}$ Grades gemein und Δ_{q+1} wäre Null gegen die Annahme. Da C_q vom q^{ten} Grade und durch h theilbar ist, kann es sich von h nur um einen constanten Factor unterscheiden. Setzt man

$$C_q = c_0 x^q + c_1 x^{q-1} + \cdots + c_q,$$

$$A_{n-q-1} = u_0 x^{n-q-1} + u_1 x^{n-q-2} + \cdots + u_{n-q-1},$$

$$B_{m-q-1} = v_0 x^{m-q-1} + v_1 x^{m-q-2} + \cdots + v_{m-q-1},$$

so ist $c_0 \neq 0$ und man hat zur Bestimmung der u, v und c die Gleichungen

$$0 = a_0 u_0 - b_0 v_0,$$

$$0 = a_1 u_0 - b_1 v_0 + a_0 r_1 - b_0 v_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = a_{\mu-1} u_0 - b_{\mu-1} v_0 + \cdots + a_{m-q-1} u_{n-q-1} - b_{n-p-1} v_{m-q-1},$$

in denen $\mu = m+n-2q-1$ ist, neben den Gleichungen:

$$0 = a_\mu u_0 - b_\mu v_0 + \cdots + a_{m-q} u_{n-q-1} - b_{n-q} v_{m-q-1} = c_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = a_{\mu+\lambda} u_0 - b_{\mu+\lambda} v_0 + \cdots + a_{m-q+\lambda} u_{n-q-1} - b_{n-q+\lambda} v_{m-q-1} = c_\lambda$$

für $\lambda = 1, 2 \ldots q$.

Eliminirt man aus den ersten μ Gleichungen, der für c_0 und der für c_λ die u und die v, so folgt

$$c_\lambda \Delta_{q+1} = c_0 \Gamma_\lambda,$$

wo Γ_λ wieder eine Determinante aus den a und den b ist. Weil $c_0 \neq 0$ und $\Delta_{q+1} \neq 0$, ist demnach

$$\frac{c_\lambda}{c_0} = \frac{\Gamma_\lambda}{\Delta_{q+1}},$$

so dass der grösste gemeinsame Theiler von f und g sich in die Form bringen lässt:

$$x^q + \frac{\Gamma_1}{\Delta_{q+1}} x^{q-1} + \frac{\Gamma_2}{\Delta_{q+1}} x^{q-2} + \cdots + \frac{\Gamma_q}{\Delta_{q+1}}.*$$

Freiburg i. Br., Januar 1895. J. Lüroth.

XX.** Wärme-Capacitäten

sind mehr als zweierlei zu unterscheiden. Oder bleibt man zunächst bei den beiden bekannten stehen, der specifischen Wärme c_p bei constantem Drucke und bei der specifischen Wärme c_v bei constantem Volum, so habe ich für Wasser nach dem Vorgange von Clausius im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift S. 126 c_v bei 25° und bei 50° um etwas höher gefunden als Clausius, beziehungsweise aber erst in der vierten und dritten Decimale.

Es ist

bei	0°	25°	50°	100°
$c_p =$	1,0000	1,0016	1,0042	1,0130,
$c_v =$	0,9995	0,9917	0,9675	0,8689?

Das Fragezeichen bei der letzten Zahl bedeutet, dass ich diesmal auch für 100° die Rechnung nach der Formel

$$c = c_p - \frac{\tau}{\varkappa} \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot v$$

unternahm, wo $\tau = 373$, $\varkappa = 425$, α der von Clausius bei der Berechnung einer anderen specifischen Wärme (wovon unten***) benutzte thermische Ausdehnungscoefficient 0,00080, $v = 0{,}001\,043$ das Volum von 1 Kilogramm in Cubikmetern. Und für β, den mechanischen Ausdehnungs-

* Vergl. Weierstrass Abhandlung aus der Functionenlehre, S. 120 und 121. Berlin 1886.

** Für die beiden folgenden Mittheilungen dient als Einleitung der vorletzte Absatz von S. 185, wie für die Mittheilungen S. 185, 187 und 188.

*** Siehe auch S. 126 l. c. und die Anmerkung S. 64 in diesem Bande, von welcher aber die drei Zeilen über die Zahlen 0,945 und 0,959 wegfallen sollen, indem erstere richtiger ist als letztere. Ueber die Reihe c_v siehe auf S. 192 l. c.

Coefficienten, extrapolirte ich (auf eigene Rechnung und Gefahr) zu den von Clausius VIII § 5 angegebenen drei Werthen für eine Atmosphäre, die also noch mit 10334 zu dividiren sind, beziehungsweise den vierten:

$$\beta = 0{,}000050 \quad 0{,}000046 \quad 0{,}000044 \quad 0{,}000042?$$

Die vorige Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$c_v = c_p - \frac{\tau}{\varkappa} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial p}{\partial \tau},$$

worin beide Differentialquotienten partielle sind.

Hiervon wohl zu unterscheiden ist eine dritte specifische Wärme c', die man neuerer Zeit auch berechnet hat, nämlich:

$$c' = c_p - \frac{\tau}{\varkappa} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \frac{dp}{d\tau},$$

worin der Differentialquotient $\frac{dp}{d\tau}$ nicht partiell, sondern total zu verstehen ist. Clausius berechnet denselben für das Wasser von 0° (siehe S. 126 des vorigen Bandes dieser Zeitschrift)

$$c' = 0{,}945^*$$

und Kirchhoff hat dasselbe Resultat in IX § 5.

Für Wasser von 100° ist nach Clausius $c' = 1{,}0130 - 0{,}0003$, also nahe gleich dem betreffenden c_p, wovon ich S. 126 l. c. schon gesprochen habe.

Aber für Eis von 0° hat Clausius und mit ihm Kirchhoff an der letztgenannten Stelle den cubischen Ausdehnungs-Coefficienten zu 0,000153 genommen, während in den Tabellen von Landolt und Börnstein (1. und 2. Auflage) der merklich kleinere Werth 0,00011 steht, so dass statt

$$c' = c_p + 0{,}151 = 0{,}48 + 0{,}15 = 0{,}63$$

stehen muss:

$$c' = c_p + 0{,}11 \;= 0{,}48 + 0{,}11 = 0{,}59.$$

Zieht man diese beiden, für Wasser und Eis von 0° erhaltenen Zahlen von einander ab, so erhält man 0,36 statt 0,32 (0,314 bei Clausius und Kirchhoff), und diese Differenz ist zu verwenden bei der Gleichung

$$\frac{dr}{d\tau} = 0{,}36 + \frac{r}{\tau},$$

in welcher r die latende Schmelzwärme bedeutet, welche bekanntlich 79 Calorien beträgt. Da also $r : \tau = 79 : 273 = 0{,}29$, so wird

$$\frac{dr}{d\tau} = 0{,}65,$$

statt 0,60 bei Clausius und Kirchhoff.**

---

* Praktisch ist das specifische Volum 0,001 000 12 von 0,001 nicht zu unterscheiden.

** r bedeutet Calorie durch Gewicht 1, also so viel wie Temperaturgrad; oder, wenn man lieber will: $r : 1 \,.\, \tau$ ist eine reine Zahl, wie die specifischen Wärmezahlen.

Zum Schlusse will ich nochmals auf den thermischen Ausdehnungs-Coefficienten

$$\frac{\partial v}{v \partial \tau}$$

hinweisen, oder α, der beim Wasser von 0° nach Kopp zu — 0,000061 angenommen wird, während er in den Tabellen von Landolt und Börnstein gleich — 0,000055 ist zwischen 0° und 1°. Ich habe in den letzten Jahrgängen des „Repertoriums der Physik" aus dem Volum 1,00012 von 1 Gramm Wasser bei 0° und 8°, während 1 bei 4° gilt, gemäss der Annäherungsformel, die bis zu 20° sehr genügende Werthe giebt,

$$v = v_0(1 - at + bt^2),$$

das $a = 0,000060$ und $b = 0,0000075$ berechnet, wonach also

$$\left(\frac{\partial v}{v \partial \tau}\right)_{t=0} = -a = -0,000060$$

sich ergiebt, mit fast völliger Uebereinstimmung gegenüber dem von Kopp angegebenen Werthe.

Wegen der auch hierher gehörigen specifischen Wärme des gesättigten Wasserdampfes, wie sie Clausius genannt hat, verweise ich auf ihn (VI) und auf Kirchhoff (VIII), worüber auch unter meinem folgenden Titel noch theilweise die Rede kommen wird.

XXI. Gemisch von Flüssigkeit und Dampf.

Im vorigen Titel kam das Gemisch aus Wasser und Eis vor; in XII § 2 handelt Kirchhoff wie auch in VIII vom Gemisch aus Wasserdampf und Wasser. Es ist dafür analog

$$h' - c' = \frac{dr}{d\tau} - \frac{r}{\tau},$$

worin r die Verdampfungswärme und h' die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes ist, während r' sich auf das Wasser bezieht.

Statt des vom Buche in XII eingeschlagenen Weges dünkt mir kürzer der folgende:

$$dQ = r\,dx + [h'x + c'(1-x)]\,d\tau$$

ist die Wärmemenge für die Einheit des Gemisches, von welchem der Theil x aus Dampf besteht. Wegen der Adiabase wird sie gleich Null gesetzt und für $h' - c'$ gemäss Obigem $\tau d\left(\frac{r}{\tau}\right) : d\tau$ substituirt. Man erhält dann

$$r\,dx + c'd\tau + \tau d\left(\frac{r}{\tau}\right) \cdot x = 0,$$

oder:

$$\frac{r}{\tau}dx + xd\left(\frac{r}{\tau}\right) + \frac{c'}{\tau}d\tau = 0,$$

oder

$$d\left(\frac{rx}{\tau}\right) + c'\frac{d\tau}{\tau} = 0.*$$

Ich habe dazu ein Beispiel gerechnet: Dampf von 150° Cels. (nicht ganz sechs Atmosphären) ströme in die freie Luft (eine Atmosphäre). Da

$$r = 607 - 0{,}708\, t$$

nach Clausius, wo t vom gewöhnlichen Nullpunkte aus gezählt wird, so ist in der durch Integration entstandenen Gleichung (c' constant angenommen)

$$\frac{r_2 x_2}{\tau_2} - \frac{r_1 x_1}{\tau_1} = c' \log nat \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

zu setzen:

$$r_2 = \frac{607 - 0{,}708 \,.\, 100}{373},$$

x_2 wird gesucht,

$$r_1 = \frac{607 - 0{,}708 \,.\, 150}{423},$$

$x_1 = 1$ (da nur Dampf ausströmen soll); für c' setzte Clausius, der in VI § 12 eine Tabelle mit mehreren solchen Rechnungsresultaten mittheilt, die specifische Wärme des Wassers bei constantem Druck c_p und findet

$$x_2 = 0{,}911;$$

ich habe statt $c_p = 1{,}013$ (bei 100°) nur mit dem Factor 1 gerechnet und

$$0{,}92 \ldots$$

gefunden, das ist genügende Uebereinstimmung.

Die Dichtigkeitszahlen des gesättigten Wasserdampfes, welche Kirchhoff in VIII § 3 mittheilt, gegenüber Luft als Einheit, differiren von den durch Clausius mitgetheilten (VI § 9) nur in der dritten Decimale; mit Ausnahme derjenigen bei 0°, wo Kirchhoff 0,606, Clausius 0,622 angiebt. Für das specifische Volum (Centimeter³ durch 1 Gramm) giebt Kirchhoff ebendaselbst

bei $t = 0$		50	100,
„ $s = 210600$		12050	1650,

gegen welche das specifische Volum des Wassers σ das Wasser verschwinden muss.**

---

* Im Buche fehlt bei dem r durchweg der Factor $\varkappa$, das mechanische Wärmeäquivalent, was in meinem Texte gar nicht auftritt.

** Demnach fällt die „genügende Annäherung" $\sigma = 1$ weg. Aber wegen des Gliedes $p\frac{d\sigma}{d\tau}$ in VIII § 4 ist besondere Betrachtung und Erwähnung nöthig; bei dem nachher gerechneten Beispiele des Quecksilbers fällt es auch fort.

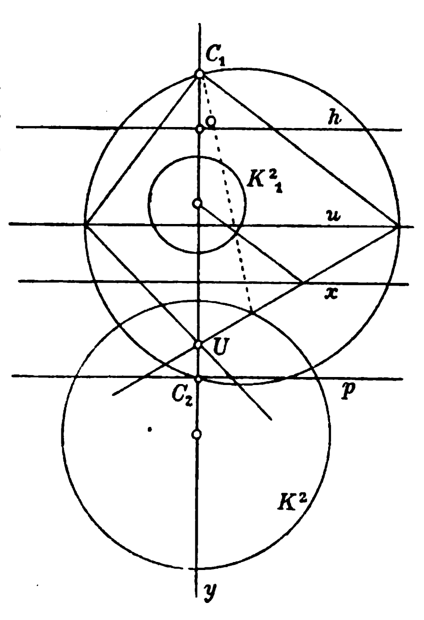
Augsburg. Prof. Dr. Kurz.

XXII. Zwei Aufgaben aus der Perspective.

Herr Geheimrath Schlömilch hat im 39. Bande S. 245—247 der vorliegenden Zeitschrift zwei Aufgaben aus der Perspective in kürzester Weise gelöst; im Folgenden will ich diese Aufgaben in etwas erweiterter Fassung nach rein geometrischer Methode besprechen.

1. **Erste Aufgabe.** Gegeben sei ein Kreis K^2. Man bestimme eine centrische Collineation in der Weise, dass dem Kreise K^2 wieder ein Kreis K^2_1 entspreche (siehe die Figur).

Wir nehmen an, dass der unendlich fernen Geraden u_1 eine beliebige Gerade u entspreche. Wir zeichnen den Pol U von u in Bezug auf K^2 und die Involution harmonischer Polaren $-J-$ um U. Ihr correspondirt die Durchmesser-Involution von K^2_1. Soll nun K^2_1 ein Kreis sein, so muss diese Durchmesser-Involution eine rechtwinklige sein. Dann ist aber auch die Involution der Parallelstrahlen durch das Collineationscentrum rechtwinklig. Diese Involution liegt perspectivisch zu J mit u als Perspectivachse. Zeichnen wir also über den Paaren der Punkteinvolution, welche u aus J schneidet, Kreise, so bilden diese ein Büschel. Von jedem seiner zwei Grundpunkte aus erscheinen die Paare der Involution unter rechtem Winkel. Also kann jeder dieser Grundpunkte als Collineationscentrum C angesehen werden. Wählen wir irgend eine Parallele x zu u als Achse der Collineation, so ist diese bestimmt. Die zweite Gegenachse h ist parallel x und erfüllt die Bedingung: $C^\wedge h = u^\wedge x$.



Betrachten wir h als Horizont, x als Grundlinie einer Perspective, so ist der Abstand des Punktes C von h gleich der Distanz. Die Normale y durch C auf h trifft h im Hauptpunkte O.

Die zwei möglichen Lagen von C werden stets reell, wenn u den Kreis K^2 nicht schneidet.

2. Wir knüpfen an die Lösung der Aufgabe einige Schlüsse.

Haben wir zu einer Linie u ein Centrum C_1 gefunden, so können wir zur Festsetzung der Collineation noch eine Annahme machen. Wir verlangen z. B., dass der Mittelpunkt von K^2_1 mit dem von K^2 zusammenfalle. Dann entspricht sich der Kreis K^2 selbst. Die Collineation geht in Involution über. Die Polare p von C in Bezug auf K^2 ist Achse der Involution. Ihre Gegenachse u liegt in der Mitte zwischen C und p.

Oben haben wir gefunden, dass die zwei Lagen $C_1 C_2$ des Collineationscentrums, welche zu einer Geraden u gehören, symmetrisch zu u liegen. Folglich muss C_2 in p gelegen sein. Mit anderen Worten heisst dies:

$C_1 C_2$ sind in Bezug auf K^2 zu einander conjugirt.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich die Construction der Centra zu einer beliebigen Geraden u so aussprechen:

Wir zeichnen in der Involution harmonischer Pole auf y das Paar, welches zu u symmetrisch liegt. Jeder Punkt dieses Paares kann als ein Centrum C angesehen werden.

Wählen wir C beliebig, so ergiebt sich u in folgender Weise:

Wir construiren zu C die Polare p in Bezug auf K^2. Die Gerade, welche in der Mitte zwischen C und p liegt, ist u.

3. **Zweite Aufgabe.** Gegeben seien zwei Kreise $K^2_1 K^2_2$. Man sucht eine centrische Collineation, in der beiden Kreisen wieder Kreise entsprechen.

Wir müssen u so bestimmen, dass die Involution harmonischer Pole auf u für beide Kreise identisch ist. Dann muss u beide Kreise in denselben Punkten schneiden. u ist also die Potenzlinie beider Kreise. Zu ihr bestimmen wir die Centra $C_1 C_2$ wie bei I. Wir erhalten die Centra direct, wenn wir auf der Centrale y beider Kreise die Involutionen harmonischer Pole zeichnen. Ihr gemeinsames Paar stellt $C_1 C_2$ vor. Diese Punkte werden nur dann reell, wenn die Involution harmonischer Pole auf der Potenzlinie elliptisch ist, das heisst, wenn die Kreise $K^2_1 K^2_2$ sich nicht reell schneiden.

Zürich. Dr. Chr. Beyel.



XIV.

Ueber eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Mechanismen.

Von

Dr. R. Müller,

Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

Hierzu Tafel IX Fig. 1—11.

Durch die Arbeiten von Hart, Kempe, Darboux, Burmester sind wir zur Kenntniss einer Reihe von übergeschlossenen Mechanismen gelangt, die alle dadurch entstehen, dass ein gewisser Punkt in der Ebene eines Gelenkvierecks an die vier Glieder desselben in bestimmter Weise gelenkig angeschlossen wird.* Um einen systematischen Zusammenhang zwischen den einzelnen hierher gehörenden Mechanismen herzustellen, werden wir zweckmässig von der Curve ausgehen, die ein Punkt, der nur mit zwei gegenüberliegenden Gliedern des Vierecks durch Gelenke verbunden ist, in Bezug auf eines der beiden anderen Glieder beschreibt. Bei jedem übergeschlossenen Mechanismus zerfällt dieselbe in einen Kreis und eine gewisse andere Curve, und dann liefert die jeweilige Art des Zerfallens ein charakteristisches Merkmal des betreffenden Mechanismus. Im weiteren Verlauf wird es sich fragen, ob wir durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks aus dem Gelenkviereck noch andere übergeschlossene Mechanismen bilden können, oder, ob mit den bisher bekannten Formen die Anzahl der möglichen Mechanismen dieser Art bereits erschöpft ist.

1. In Figur 1 ist $OO'R'R$ ein beliebiges ebenes Gelenkviereck; in der Ebene desselben sind an die starren Dreiecke ORS, $O'R'S'$ die Glieder SK, $S'K$ in den Punkten S, S' drehbar angeschlossen, und diese wieder sind

---

* Vergl. im Folgenden die Figuren 2, 4, 6, 7, 8, sowie
Hart: Proceedings of the London Mathematical Society vol. VIII p. 288;
Kempe: daselbst vol. IX p. 138;
Darboux: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2ème sér. T. III p. 144;
Burmester: diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 193; ferner: Kinematik I S. 571, 595, 598.

im Punkte K zu einem gelenkigen Knie SKS' verbunden. In dem so entstehenden zwangläufigen Mechanismus beschreibt der Punkt K in Bezug auf das feste Glied OO' eine Curve k, die wir im Folgenden kurz als Kniecurve bezeichnen wollen. Die Gleichung derselben soll zunächst ermittelt werden.

Es sei $OO' = m$, $RR' = n$, $OR = r$, $O'R' = r'$, $OS = s$, $O'S' = s'$, Winkel $ROS = \alpha$, Winkel $R'O'S' = \alpha'$, $KS = l$, $KS' = l'$. Wir bezeichnen ferner mit x, y die rechtwinkligen Coordinaten von K in Bezug auf O als Anfangspunkt, OO' als x-Achse, mit ϑ, ϑ' bez. die Winkel, welche OR, $O'R'$ mit der Richtung OO' einschliessen. Dann ist

$$[x - s\cos(\vartheta - \alpha)]^2 + [y - s\sin(\vartheta - \alpha)]^2 = l^2,$$

$$[x - m - s'\cos(\vartheta' - \alpha')]^2 + [y - s'\sin(\vartheta' - \alpha')]^2 = l'^2,$$

$$(m + r'\cos\vartheta' - r\cos\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta - r'\sin\vartheta')^2 = n^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = a,$$

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = b,$$

$$(x - m)\cos\alpha' + y\sin\alpha' = a',$$

$$(x - m)\sin\alpha' + y\cos\alpha' = b',$$

$$x^2 + y^2 + s^2 - l^2 = P,$$

$$(x - m)^2 + y^2 + s'^2 - l'^2 = P',$$

$$m^2 - n^2 + r^2 + r'^2 = q^2,$$

so gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$2as\cos\vartheta + 2bs\sin\vartheta = P, \tag{1}$$

$$2a's'\cos\vartheta' + 2b's'\sin\vartheta' = P', \tag{2}$$

$$2rr'(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta') + 2mr\cos\vartheta - 2mr'\cos\vartheta' = q^2. \tag{3}$$

Hieraus ergiebt sich durch Elimination von ϑ, ϑ' die Gleichung der Curve k in der Form:

$$AB + C^2 = 0, \tag{4}$$

wobei

$$A = r^2r'^2PP' + 2mrr'(rs'a'P - r'saP') + 2rr'ss'[2m^2bb' - q^2(aa' + bb')],$$

$$\left\{\begin{aligned} B = PP'\{&m^2[r^2s'^2(a'^2 + b'^2)P^2 + r'^2s^2(a^2 + b^2)P'^2 - 2rr'ss'(aa' + bb')PP'] \\ &+ 4mrr'ss'(ab' - a'b)(r's'b'P + rsbP') \\ &- 2mss'q^2[rs'a(a'^2 + b'^2)P - r'sa'(a^2 + b^2)P'] \\ &+ s^2s'^2q^4(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - 4r^2r'^2s^2s'^2(ab' - a'b)^2 \\ &- 4m^2s^2s'^2[r^2b^2(a'^2 + b'^2) + r'^2b'^2(a^2 + b^2)]\} \\ + 2rr'[&s'^2(a'^2 + b'^2)P^2 + s^2(a^2 + b^2)P'^2 - 4s^2s'^2(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)] \\ &\times [m(rs'a'P - r'saP') + 2m^2ss'bb' - ss'q^2(aa' + bb')], \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} C = r^2 r'^2 [s'^2(a'^2+b'^2)P^2 + s^2(a^2+b^2)P'^2] \\ \quad - m^2[r^2 s'^2(a'^2+b'^2)P^2 + r'^2 s^2(a^2+b^2)P'^2 - 2rr'ss'(aa'+bb')PP'] \\ \quad - 4mrr'ss'(ab'-a'b)(r's'b'P + rsbP') \\ \quad + 2mss'q^2[rs'a(a'^2+b'^2)P - r'sa'(a^2+b^2)P'] \\ \quad - s^2s'^2q^4(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) - 4r^2r'^2s^2s'^2(aa'+bb')^2 \\ \quad + 4m^2s^2s'^2[r^2b^2(a'^2+b'^2) + r'^2b'^2(a^2+b^2)]. \end{cases}$$

Nun ist

$$a^2+b^2 = x^2+y^2,$$
$$a'^2+b'^2 = (x-m)^2+y^2,$$
$$aa'+bb' = (x^2+y^2-mx)\cos(\alpha-\alpha') + my\sin(\alpha-\alpha'),$$
$$ab'-a'b = -(x^2+y^2-mx)\sin(\alpha-\alpha') + my\cos(\alpha-\alpha'),$$

folglich:

$$A = r^2r'^2(x^2+y^2)^2 + \cdots$$
$$B = m^2[r^2s'^2 + r'^2s^2 - 2rr'ss'\cos(\alpha-\alpha')](x^2+y^2)^5 + \cdots,$$

während C einen Ausdruck sechsten Grades darstellt. Der Factor

$$r^2s'^2 + r'^2s^2 - 2rr'ss'\cos(\alpha-\alpha') = [rs' - r's\cos(\alpha-\alpha')]^2 + r'^2s^2\sin^2(\alpha-\alpha')$$

verschwindet nur für $\alpha = \alpha'$, $rs' = r's$; die Kniecurve ist also von der vierzehnten Ordnung, sobald nicht die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ gleichsinnig ähnlich sind.

2. Wir nehmen zunächst an, die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ seien nicht gleichsinnig ähnlich. Setzen wir dann in Gleichung 4) x^2+y^2 gleich einer ganzen linearen Function von x und y, so wird A vom zweiten, B vom fünften, C vom dritten Grade; die Kniecurve hat also die imaginären Kreispunkte zu siebenfachen Punkten, und ihre Focalcentra — das heisst die reellen Schnittpunkte der zweimal sieben Tangenten in den imaginären Kreispunkten — sind identisch mit den zwei bez. fünf Focalcentren der Curven $A = 0$, $B = 0$.

Ist nun der Punkt $x = \xi$, $y = \eta$ ein Focalcentrum der bicircularen Curve vierter Ordnung $A = 0$, so hat die Gerade

$$y - \eta = i(x - \xi),$$

die den Punkt ξ, η mit einem der imaginären Kreispunkte verbindet, mit $A = 0$ nur einen endlichen Schnittpunkt gemein; durch die Substitution

$$y = i(x-\xi) + \eta$$

verschwindet also in $A = 0$ das Glied mit x^2. Setzen wir noch

$$\xi + i\eta = \zeta,$$

also

$$y = i(x - \zeta),$$

so wird:

$$a = xe^{-i\alpha} + \cdots$$
$$b = ixe^{-i\alpha} + \cdots$$
$$a' = xe^{-i\alpha'} + \cdots$$
$$b' = ixe^{-i\alpha'} + \cdots$$
$$a^2 + b^2 = 2\zeta x + \cdots$$
$$a'^2 + b'^2 = 2(\zeta - m)x + \cdots$$
$$aa' + bb' = [\zeta e^{i(\alpha-\alpha')} + (\zeta - m)e^{-i(\alpha-\alpha')}]x + \cdots$$
$$ab' - a'b = [\zeta e^{i(\alpha-\alpha')} - (\zeta - m)e^{-i(\alpha-\alpha')}]x + \cdots$$
$$P = 2\zeta x + \cdots$$
$$P' = 2(\zeta - m)x + \cdots,$$

und dann verschwindet in $A = 0$ der Factor von x^2, wenn

$$rr'\zeta(\zeta - m) + m[rs'\zeta e^{-i\alpha'} - r's(\zeta - m)e^{-i\alpha}] - m^2 ss' e^{-i(\alpha+\alpha')} = 0,$$

das heisst, wenn

$$r\zeta - mse^{-i\alpha} = 0,$$

oder, wenn

$$r'(\zeta - m) + ms'e^{-i\alpha'} = 0$$

ist. Bezeichnen wir demnach mit F_1, F_2 die beiden Focalcentren der Curve $A = 0$, so erhalten wir für F_1:

$$\xi = \frac{ms}{r}\cos\alpha, \quad \eta = -\frac{ms}{r}\sin\alpha,$$

und für F_2:

$$\xi = m - \frac{ms'}{r'}\cos\alpha', \quad \eta = \frac{ms'}{r'}\sin\alpha'.$$

Es ist also $\Delta OO'F_1$ gleichsinnig ähnlich mit ΔORS und $\Delta O'OF_2$ gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O'R'S'$.

In ganz derselben Weise ergiebt sich für die fünf Focalcentra der Curve $B = 0$ die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &(rs'e^{-i\alpha} - r'se^{-i\alpha'})\zeta(\zeta - m)\{m\zeta(\zeta - m)[rs'\zeta e^{i\alpha} - r's(\zeta - m)e^{i\alpha'}] \\ &\qquad - ss'q^2\zeta(\zeta - m) + rr'[s'^2\zeta^2 e^{i(\alpha-\alpha')} + s^2(\zeta - m)^2 e^{-i(\alpha-\alpha')}] \\ &\qquad - mss'[r's'\zeta e^{-i\alpha'} - rs(\zeta - m)e^{-i\alpha}]\} = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Curve $B = 0$ hat folglich zu Focalcentren die beiden Punkte O, O' und drei weitere Punkte G_1, G_2, G_3, deren Coordinaten bestimmt sind durch die im Allgemeinen irreductible Gleichung dritten Grades:

$$5)\quad \left|\begin{aligned} &m(rs'e^{i\alpha} - r'se^{i\alpha'})\zeta^3 \\ &+ [m^2(2r'se^{i\alpha'} - rs'e^{i\alpha}) - ss'(m^2 - n^2 + r^2 + r'^2) + rr's^2e^{-i(\alpha-\alpha')} + rr's'^2e^{i(\alpha-\alpha)}]\zeta^2 \\ &+ ms[s'(m^2 - n^2 + r^2 + r'^2) - m^2r'e^{i\alpha'} + rss'e^{-i\alpha} - r's'^2e^{-i\alpha'} - 2rr'se^{-i(\alpha-\alpha')}]\zeta \\ &+ m^2rs^2e^{-i\alpha}(r'e^{i\alpha'} - s') = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Lage der sieben Focalcentra O, O', F_1, F_2, G_1, G_2, G_3 der Curve k ist hiernach vollkommen unabhängig von den Gliedlängen l, l'; sind also die Dreiecke ORS und $O'R'S'$ nicht gleichsinnig ähnlich, so beschreiben die sämmtlichen ∞^2 Punkte K, die man in S und S' an das Gelenkviereck $OO'R'R$ anschliessen kann, siebenfach concentrische Kniecurven.

Ist $\alpha = \alpha' = 0$, das heisst, liegen die Anschlusspunkte S, S' auf den Viereckseiten OR, $O'R'$, so wird die Curve k symmetrisch in Bezug auf OO'. Dann sind alle Coefficienten der Gleichung 5) reell und von den drei Punkten G_1, G_2, G_3 liegt wenigstens einer auf der Geraden OO'.

In Bezug auf das Glied RR' beschreibt der Punkt K eine Kniecurve $\mathfrak{k}$ mit den Focalcentren R, R', $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$. Die Punkte $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ werden analog construirt, wie vorher $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. Betrachten wir R als Anfangspunkt, RR' als x-Achse und bezeichnen die Strecken RS, $R'S'$ bez. mit t, t', die Winkel ORS, $O'R'S'$ mit β, β', so erhalten wir die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, indem wir in Gleichung 5) die Grössen m, n, s, s', α, α' bez. mit n, m, t, t', β, β' vertauschen. Dabei ist:

$$te^{i\beta} = r - se^{-i\alpha}, \quad t'e^{i\beta'} = r' - s'e^{-i\alpha'}.$$

3. Es sei ferner ΔORS gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O'R'S'$, also $\alpha = \alpha'$ und $\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$. Setzen wir

$$\frac{s}{r} = \varepsilon$$

und

$$\frac{A}{r^2 r'^2} = \mathfrak{A}, \quad \frac{B}{\varepsilon^2 r^2 r'^2} = \mathfrak{B}, \quad \frac{C}{\varepsilon^2 r^2 r'^2} = \mathfrak{C},$$

so geht die Curvengleichung 4) über in

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varepsilon^2 \mathfrak{C}^2 = 0. \tag{6}$$

Gegenwärtig ist:

$$aa' + bb' = x^2 + y^2 - mx,$$

$$ab' - a'b = my,$$

$$a'P - aP' = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)(2mx - m^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2) - mP\cos\alpha,$$

$$\begin{cases} (a'^2 + b'^2)P^2 + (a^2 + b^2)P'^2 - 2(aa' + bb')PP' = m^2 PP' \\ +[(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2)(x^2 + y^2) - m(\varepsilon^2 r^2 - l^2)(2x - m)](2mx - m^2 + \varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a'^2 + b'^2)P - a'(a^2 + b^2)P' = m(x^2 + y^2)P'\cos\alpha \\ \quad + (x\cos\alpha - y\sin\alpha)[(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2)(x^2 + y^2) - m(\varepsilon^2 r^2 - l^2)(2x - m)], \end{cases}$$

mithin verschwinden in Gleichung 6) die Glieder vierzehnten und dreizehnten Grades, und das Glied zwölften Grades lautet:

$$[m^4 - 2\varepsilon m^2(m^2 - n^2)\cos\alpha + \varepsilon^2(m^2 - n^2)^2](x^2 + y^2)^6.$$

Die Curve wird also — durch Ablösung der doppelt zählenden unendlich fernen Geraden — zu einer sechsfach circularen Curve zwölfter Ordnung, falls nicht gleichzeitig

$$\alpha = 0, \quad \varepsilon = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

ist.

Um die Focalcentra zu bestimmen, bringen wir den mit $\mathfrak{B}$ bezeichneten Ausdruck auf die Form:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} = PP'\{m^2[(a'^2 + b'^2)P^2 + (a^2 + b^2)P'^2 - 2(aa' + bb')PP'] \\
- 2\varepsilon m q^2 [a(a'^2 + b'^2)P - a'(a^2 + b^2)P'] \\
+ \varepsilon^2 q^4 (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - 4\varepsilon^2 r^2 r'^2 (ab' - a'b)^2\} \\
- 2\varepsilon^2 q^2 (aa' + bb')[r'^2(a'^2 + b'^2)P^2 + r^2(a^2 + b^2)P'^2] \\
- 8\varepsilon^3 r^2 r'^2 (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)[m(a'P - aP') + 2\varepsilon m^2 bb' - \varepsilon q^2 (aa' + bb')] \\
+ 2\varepsilon m\{[r'^2(a'^2 + b'^2)P^2 + r^2(a^2 + b^2)P'^2][2m(a^2 + b^2)\cos\alpha - mP\cos\alpha \\
+ a(\varepsilon^2 r^2 - \varepsilon^2 r'^2 - l^2 + l'^2 - m^2)] + 2mby[r'^2(\varepsilon^2 r'^2 - l'^2)P^2 + r^2(\varepsilon^2 r^2 - l^2)P'^2] \\
- 2m^2 r'^2 y P^2 P' \sin\alpha\} \\
+ 4\varepsilon^2 m^2 \{b^2[(\varepsilon^2 r^2 - l^2)(a'^2 + b'^2) - (\varepsilon^2 r'^2 - l'^2)(a^2 + b^2)](r'^2 P - r^2 P') \\
- mb\sin\alpha[r'^2(a'^2 + b'^2)P^2 + r^2(a^2 + b^2)P'^2] \\
+ mr'^2(a^2 + b^2)PP'\sin\alpha(2b - m\sin\alpha)\}.
\end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$y = i(x - \zeta)$$

verwandelt sich 6) in eine Gleichung sechsten Grades in x; in derselben hat x^6 den Factor:

$$\begin{aligned}
(\zeta - \varepsilon m e^{-i\alpha})(\zeta - m + \varepsilon m e^{-i\alpha}) \\
\{[m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{-i\alpha}]\zeta(\zeta - m) + \varepsilon m e^{-i\alpha}(1 - \varepsilon e^{-i\alpha})[r'^2\zeta - r^2(\zeta - m)]\} \\
\cdot\{[m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{i\alpha}]\zeta(\zeta - m) + m[l'^2\zeta - l^2(\zeta - m]\}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die folgenden sechs Focalcentra:

I. Zwei Punkte F_1, F_2, die wie früher construirt werden, indem wir $\Delta OO'F_1$ und $\Delta O'OF_2$ gleichsinnig ähnlich machen zu ΔORS.

II. Zwei Punkte G_1, G_2, entsprechend der Gleichung:

$$7)\quad \begin{cases} [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{-i\alpha}]\zeta^2 - m[m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{-i\alpha} + \varepsilon(r^2 - r'^2)e^{-i\alpha}(1 - \varepsilon e^{-i\alpha})]\zeta \\ \qquad + \varepsilon m^2 r^2 e^{-i\alpha}(1 - \varepsilon e^{-i\alpha}) = 0; \end{cases}$$

dieselbe geht aus 5) hervor für $\alpha = \alpha'$, $s = \varepsilon r$, $s' = \varepsilon r'$.

III. Zwei Punkte H_1, H_2; die Coordinaten derselben werden gefunden, indem wir in der Gleichung

$$8)\quad [m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{i\alpha}]\zeta^2 - m[m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)e^{i\alpha} + l^2 - l'^2]\zeta + m^2 l^2 = 0$$

den reellen und den imaginären Theil der linken Seite einzeln gleich Null setzen.

Vertauschen wir in den letzten Gleichungen die Grössen m, n, $\varepsilon e^{i\alpha}$, $\varepsilon e^{-i\alpha}$ bez. mit n, m, $1-\varepsilon e^{-i\alpha}$, $1-\varepsilon e^{i\alpha}$, so ergeben sich die Focalcentra $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ der Kniecurve $\mathfrak{k}$, die der Punkt K in Bezug auf das Glied RR' beschreibt.

4. In dem bereits erwähnten Sonderfall

$$\text{9)} \qquad \alpha = \alpha' = 0, \quad \varepsilon = \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

ist ε entweder negativ oder grösser als 1; die Anschlusspunkte S, S' liegen demnach ausserhalb der Strecken OR, $O'R'$. Dann reducirt sich Gleichung 6) auf eine Gleichung zehnten Grades mit dem Anfangsglied:

$$m^2(x^2+y^2)^4\{[\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)-(l^2-l'^2)]^2x^2 \\ +[\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)+(l^2-l'^2)]^2y^2\},$$

und die Curve k wird zu einer vierfach circularen Curve zehnter Ordnung mit den vier auf der Geraden OO' liegenden Focalcentren F_1, F_2, G_1, H_1, wobei

$$OF_1 = \varepsilon m, \qquad OF_2 = (1-\varepsilon)m,$$
$$OG_1 = \frac{mr^2}{r^2-r'^2}, \quad OH_1 = \frac{ml^2}{l^2-l'^2}.$$

Sie hat mit der unendlich fernen Geraden, von den Kreispunkten abgesehen, noch zwei im Allgemeinen imaginäre Punkte Q_1, Q_2 gemein, die durch das Geradenpaar bestimmt sind:

$$[\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)-(l^2-l'^2)]^2x^2+[\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)+(l^2-l'^2)]^2y^2=0.$$

Ist $r=r'$, oder $l=l'$, so fallen Q_1, Q_2 mit den Kreispunkten zusammen, und die Kniecurve berührt in diesen die unendlich ferne Gerade.

Die Punkte Q_1, Q_2 sind nur reell, wenn

$$l^2-l'^2 = \mp\, \varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)$$

ist, und dann vereinigen sich Q_1 und Q_2 im unendlich fernen Punkte der y- bez. x-Achse. Wir wollen beide Fälle getrennt betrachten.

I. Ist $l^2-l'^2=-\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)$, so verwandelt sich Gleichung 6) durch die Substitution $y^2=u^2-x^2$ in eine Gleichung vierten Grades in Bezug auf u^2 mit dem Anfangsglied

$$\{2\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)mx+m^2[\varepsilon(\varepsilon-1)r'^2-l'^2]-\varepsilon^2(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)^2\}^2u^6;$$

die Curve k hat folglich im unendlich fernen Punkte der y-Achse einen Selbstberührungspunkt mit der Asymptote:

$$\text{10)} \quad 2\varepsilon(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)mx+m^2[\varepsilon(\varepsilon-1)r'^2-l'^2]-\varepsilon^2(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)^2=0.$$

Soll k mit dieser Geraden nicht nur vier, sondern sechs unendlich benachbarte Punkte gemein haben, so finden wir als nothwendige und hinreichende Bedingung:

11) $$l'^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2,$$
also
12) $$l^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)r'^2,$$
und dann geht Gleichung 10) über in
13) $$2mx = m^2 + \varepsilon(r^2 - r'^2).$$

Nun zeigt aber die weitere Durchführung der Rechnung, dass die Substitution 13) der Curvengleichung identisch genügt, das heisst, die Kniecurve zerfällt in die doppelt zählende Gerade 13) und eine vierfach circulare Curve achter Ordnung. Gegenwärtig ist

$$OH_1 = -\frac{mr'^2}{r^2 - r'^2} = m - OG_1;$$

die vier Focalcentra F_1, F_2, G_1, H_1 liegen also paarweise symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt von OO'. Der durch die Gleichungen 9), 11), 12) definirte Mechanismus ist bekannt unter der Bezeichnung „zweite“ Hart'sche Geradführung.* Betrachten wir in demselben nicht OO', sondern RR' als festes Glied, so beschreibt der Punkt K einerseits eine Gerade, die auf RR' senkrecht steht.

II. Nehmen wir an, es sei $l^2 - l'^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1)(r^2 - r'^2)$, so verschwinden in Gleichung 6) die Glieder mit x^{10} und x^9, und x^8 erhält den Factor:

$$4\varepsilon^2(\varepsilon-1)^2(r^2-r'^2)^2m^2y^2 + \{m^2[\varepsilon(\varepsilon-1)r^2 - l^2] - \varepsilon^2(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)^2\}^2;$$

die Curve k hat also im unendlich fernen Punkte der Geraden OO' einen isolirten Punkt. Derselbe verwandelt sich in einen Rückkehrpunkt mit der Tangente OO' für

$$m^2[\varepsilon(\varepsilon-1)r^2 - l^2] = \varepsilon^2(\varepsilon-1)(r^2-r'^2)^2.$$

Es ergiebt sich weiter, dass dieser Rückkehrpunkt in einen Selbstberührungspunkt übergeht, wenn gleichzeitig

$$m^2 = \varepsilon(r^2 - r'^2)$$

ist, also für

$$m^2 - n^2 = r^2 - r'^2,$$
$$l^2 = \varepsilon(\varepsilon-1)r^2,$$
$$l'^2 = \varepsilon(\varepsilon-1)(2r^2 - r'^2).$$

Setzen wir in diesem Falle in der Curvengleichung $y = 0$, so ergiebt sich für x eine Gleichung sechsten Grades mit dem Anfangsgliede:

$$16\varepsilon^5(\varepsilon-1)^3r^{14}(r^2-r'^2)^3x^6.$$

Dasselbe verschwindet nur für die nicht in Betracht kommenden Annahmen $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ und für $r = r'$, das heisst $\varepsilon = \infty$. Daraus folgt, dass die Gerade OO' in keinem Falle einen Bestandtheil der Kniecurve bilden kann.

---

* Hart a. a. O.

III. Ist endlich in Verbindung mit Gleichung 9)

$$r = r', \quad l = l',$$

so reducirt sich die Curve k durch abermalige Ablösung der unendlich fernen Geraden auf eine bicirculare Curve achter Ordnung, die auch symmetrisch ist in Bezug auf die Mittelsenkrechte der Strecke OO'. Setzen wir

$$x = x' + \frac{m}{2},$$

so lautet das Glied achten Grades der Curvengleichung:

$$m^4(x'^2 + y^2)^2 \{ [l^2 - \varepsilon(\varepsilon - 1)r^2]^2 (x'^2 + y^2)^2 + 16\varepsilon(\varepsilon - 1) r^2 l^2 x'^2 y^2 \}.$$

Die Curve hat demnach vier durch den Mittelpunkt von OO' gehende Asymptoten; dieselben sind imaginär, wenn nicht

$$l^2 = \varepsilon(\varepsilon - 1) r^2$$

ist. Unter dieser letzten Voraussetzung zerfällt die Kniecurve in die doppelt zählende Gerade $x' = 0$ (vergl. Fall I) und in die bicirculare Curve sechster Ordnung:

$$y^2(x'^2 + y^2)^2 - 2\left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \varepsilon(2\varepsilon - 1)r^2\right] y^2(x'^2 + y^2) + (2\varepsilon - 1)^2 m^2 y^4 + \varepsilon^2 r^4 x'^2$$
$$+ \left\{ \left[\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \varepsilon r^2\right]^2 - \varepsilon^2 m^2 r^2 \right\} y^2 = 0$$

mit den Focalcentren F_1, F_2, mit einem Selbstberührungspunkte im unendlich fernen Punkte der Geraden OO' und einem Doppelpunkte in der Mitte von OO'.

Hiermit sind die sämmtlichen Fälle erschöpft, in denen die Kniecurve einen reellen unendlich fernen Punkt enthält, und es ist gleichzeitig die Frage nach denjenigen Bedingungen erledigt, unter denen eine endliche Gerade als Bestandtheile der Curve auftreten kann. Wir haben nämlich gefunden, dass der einzige Fall dieser Art bei der „zweiten“ Hart-schen Geradführung vorliegt; dieselbe stellt also die einzig mögliche Geradführung dar, bei welcher der geradlinig bewegte Punkt mit zwei gegenüberliegenden Vierecksseiten gelenkig verbunden ist.

5. Zerfällt in Figur 1 die Curve k in einen Kreis und eine gewisse andere Curve, so ist der Kreismittelpunkt identisch mit einem der früher bestimmten Focalcentra der k. Wir erhalten dann einen übergeschlossenen Mechanismus, indem wir diesen Mittelpunkt mit dem Punkte K gelenkig verbinden. Können wir gleichzeitig den Punkt K an das vierte Glied RR' anschliessen, ohne dadurch die Beweglichkeit des Mechanismus aufzuheben, so gehört der neue Anschlusspunkt zu den Focalcentren der Kniecurve $\mathfrak{k}$, die K in Bezug auf das Glied RR' beschreibt.

Von solchen übergeschlossenen Mechanismen kennen wir bisher die folgenden Arten:

I. In Figur 2 ist $OO'R'R$ ein beliebiges Gelenkviereck; die Dreiecke $O'R'S'$, $OO'T$, $RR'\mathfrak{T}$ sind gleichsinnig ähnlich mit dem beliebigen Dreieck ORS. Bilden wir das Parallelogramm $TO'S'K$, so ist bekanntlich $\Delta OR'K$ gleichsinnig ähnlich mit $\Delta OO'T$*, mithin ist auch $SR\mathfrak{T}K$ ein Parallelogramm und die Vierecke $OTKS$ und $KS'R'\mathfrak{T}$ sind gleichsinnig ähnlich mit $OO'R'R$. Ersetzen wir die Strecken SK, TK, $S'K$, $\mathfrak{T}K$ durch ein viergliedriges Gelenk, so ergiebt sich ein übergeschlossener Mechanismus. Derselbe besteht aus zwei Sylvester'schen Pantographen**, die in den Punkten O, R', K verbunden sind; wir wollen ihn deshalb kurz den Sylvester'schen Mechanismus nennen.***

Entfernen wir in Figur 2 die Glieder TK, $\mathfrak{T}K$, so kann der Punkt K in Bezug auf die Glieder OO', RR' bez. die vollständigen Kniecurven k, $\mathfrak{k}$ beschreiben, deren Focalcentra wir wie früher mit F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ bezeichnen. Dann sind F_1, $\mathfrak{F}_2$ ihrer Definition nach bez. identisch mit den Anschlusspunkten T, $\mathfrak{T}$. Die Focalcentra H_1, H_2 ergeben sich aus Gleichung 8). Nun ist in Figur 2):

$$14)\qquad l = SK = R\mathfrak{T} = RR'\cdot\frac{OS}{OR} = \varepsilon n$$

und

$$15)\qquad l' = S'K = O'T = OO'\cdot\frac{RS}{OR} = m\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha};$$

folglich geht Gleichung 8) über in

$$(\zeta - \varepsilon m e^{-i\alpha})\{[m^2 - \varepsilon(m^2-n^2)e^{i\alpha}]\zeta - \varepsilon m n^2 e^{i\alpha}\} = 0.$$

Die erste Lösung derselben, $\zeta = \varepsilon m e^{-i\alpha}$, giebt wiederum den Punkt T; der Sylvester'sche Mechanismus wird also dadurch charakterisirt, dass im Anschlusspunkte T zwei Focalcentra der Curve k vereinigt sind, nämlich F_1 und einer der beiden Punkte H. Ebenso liegen in $\mathfrak{T}$ zwei Focalcentra der Curve $\mathfrak{k}$, nämlich $\mathfrak{F}_2$ und ein $\mathfrak{H}$.

Ist α nicht gleich 0, so bilden umgekehrt die Gleichungen 14) und 15) die nothwendige und hinreichende Bedingung, unter welcher die Focalcentra F_1, $\mathfrak{F}_2$ bez. mit einem der Punkte H, $\mathfrak{H}$ zusammenfallen.

Die Kniecurve k spaltet sich gegenwärtig in den doppelt zählenden Kreis um T mit dem Radius TK und in eine vierfach circulare Curve achter Ordnung. Wir erhalten dieselbe als Bahncurve des Punktes K^*, wenn das Knie SK^*S' symmetrisch ist zu SKS'.

---

* Burmester: Kinematik I S. 295.

** Daselbst: S. 562.

*** Burmester: Die Brennpunktmechanismen, diese Zeitschrift 38. Jahrgang S. 218.

An Stelle der Focalcentra F_1, $\mathfrak{F}_2$ können wir auch F_2, $\mathfrak{F}_1$ als Anschlusspunkte eines Sylvester'schen Mechanismus verwenden. In diesem sind die Dreiecke $OO'F_2$ und $RR'\mathfrak{F}_1$ gleichsinnig ähnlich mit ROS; K wird der gemeinschaftliche Eckpunkt der Parallelogramme F_2OSK und $S'R'\mathfrak{F}_1K$, und es ist

$$SK = m\sqrt{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha}, \quad S'K = \varepsilon n.$$

Ist in Figur 2

$$m^2(1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha) = \varepsilon^2 n^2, \tag{16}$$

das heisst, $O'T = R\mathfrak{T} = \varepsilon n$, so wird

$$SK = SK^* = S'K = S'K^* = \varepsilon n,$$

und dann sind alle vier Punkte F_1, F_2, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ der Reihe nach identisch mit H_1, H_2, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$. In diesem besonderen Falle, der in Figur 3 dargestellt ist, können wir gleichzeitig den Punkt K mit F_1, $\mathfrak{F}_2$ und in der symmetrischen Lage des Knies den Punkt K^* mit F_2, $\mathfrak{F}_1$ zu einem Sylvester'schen Mechanismus verbinden.

Wie sich leicht ergiebt, enthält Gleichung 16) die Bedingung, unter welcher in Figur 2 die Punkte S, S' im Laufe der Bewegung zusammentreffen. Die Glieder SK, $S'K$ können um die beiden Treffpunkte vereinigt rotiren; dieselben gehören also zu den Focalcentren der Curve k und sind folglich identisch mit G_1, G_2. In Figur 3 zerfällt demnach die Curve zwölfter Ordnung k in zwei doppelt zählende Kreise um F_1 und F_2 und in die einfach zählenden Kreise um G_1 und G_2.

II. Bei dem von Kempe angegebenen Mechanismus*, den Burmester als Brennpunktmechanismus bezeichnet hat, ist das Viereck $OO'R'R$ gleichfalls beliebig und S ein beliebiger Punkt auf der Seite OR; S' theilt die Seite $O'R'$ im Verhältniss $OS : RS$, und die Punkte T, $\mathfrak{T}$, K werden so bestimmt, dass die beiden Vierecke $OTKS$ und $K\mathfrak{T}R'S'$, sowie auch $O'TKS'$ und $K\mathfrak{T}RS$ entgegengesetzt ähnlich sind (Fig. 4). Dann bleibt der Punkt K während der ganzen Bewegung der Koppelgeraden RR' ein Brennpunkt eines dem Viereck $OO'RR'$ eingeschriebenen Kegelschnitts.

Setzen wir wieder $OO' = m$, $RR' = n$, $OR = r$, $O'R' = r'$, $OS = \varepsilon r$, $SK = l$, $S'K = l'$ und verstehen unter ε' eine Wurzel der Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}[m^2-\varepsilon(m^2-n^2)]\,\varepsilon'^2 - [m^2-\varepsilon(m^2-n^2)+\varepsilon(1-\varepsilon)(r^2-r'^2)]\,\varepsilon' \\ +\,\varepsilon(1-\varepsilon)r^2 = 0,\end{aligned}\right. \tag{17}$$

so ist nach Kempe:

$$OT = \varepsilon' m, \qquad R\mathfrak{T} = \varepsilon' n. \tag{18}$$

$$l^2 = \varepsilon\varepsilon'\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}r'^2, \qquad l'^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon')r^2, \tag{19}$$

$$TK^2 = \varepsilon\varepsilon'\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}n^2, \quad \mathfrak{T}K^2 = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon')m^2. \tag{20}$$

* Kempe a. a. O.

Für $\alpha = 0$, $\zeta = \varepsilon' m$ und die angegebenen Werthe von l^2 und l'^2 gehen die Gleichungen 7) und 8) über in 17), das heisst, im Anschlusspunkte T fällt einer der beiden Punkte G mit einem H zusammen, etwa G_1 mit H_1. Ebenso vereinigen sich in $\mathfrak{T}$ die Punkte $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$*. Die vollständige Kniecurve k besteht demnach aus dem doppelt zählenden Kreise um T und einer vierfach circularen Curve achter Ordnung mit den Focalcentren F_1, F_2, G_2, H_2. Dieselbe ergiebt sich als Bahncurve des Punktes K^*, der zu K symmetrisch liegt in Bezug auf SS'.

Ist $r = n$, $r' = m$, so liefert Gleichung 17) die Wurzeln:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon n^2}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}$$

und

$$\varepsilon' = 1 - \varepsilon.$$

Für die erste derselben folgt aus 18) und 20):

$$OT = TK = \frac{\varepsilon m n^2}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}, \quad \mathfrak{T}R' = \mathfrak{T}K = \frac{(1-\varepsilon) m^2 n}{m^2 - \varepsilon(m^2 - n^2)}$$

und aus 19):

$$l = \varepsilon n = R\mathfrak{F}_2, \quad l' = (1-\varepsilon)m = F_1 O'.$$

Dieselben Werthe ergeben sich aber aus 14) und 15) für $\alpha = 0$, das heisst, wir erhalten aus dem in Figur 5 gezeichneten Brennpunktmechanismus einen Sylvester'schen Mechanismus, wenn wir das Knie SKS' in die symmetrische Lage SK^*S' bringen und K^* mit F_1 und $\mathfrak{F}_2$ verbinden. In diesem besonderen Falle vereinigen sich dreimal je zwei Focalcentra der Curve k, nämlich H_1 mit G_1 in T, H_2 mit F_1, G_2 mit F_2; dabei ist $OF_2 = F_1 O' = S'R'$. Die Curve k spaltet sich in drei doppelt zählende Kreise um T, F_1 und F_2 bez. mit den Radien OT, $O'S'$, $S'R'$.

Wir bemerken beiläufig, dass es keinen speciellen Fall des in Figur 4 dargestellten Brennpunktmechanismus giebt, bei welchem es möglich wäre, analog zu Figur 3 den Punkt K^* mit S, S', G_2, $\mathfrak{G}_2$ zu einem zweiten Brennpunktmechanismus zu verbinden.

Für $\varepsilon = \dfrac{m^2}{m^2 - n^2}$ wird die eine Wurzel der Gleichung 17) unendlich gross; der zugehörige Brennpunktmechanismus ist identisch mit der zweiten Hart'schen Geradführung.

6. Ausser dem Sylvester'schen und dem Brennpunktmechanismus kennen wir noch drei andere übergeschlossene Mechanismen, bei denen aber das Gelenkviereck $OO'R'R$ nicht mehr willkürlich ist.

---

* Aber die Gleichungen 19) bilden nicht die nothwendige Bedingung für das Zusammenfallen von G_1 und H_1, $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$.

III. Ist in Figur 6
$$m^2 + n^2 = r^2 + r'^2,$$
so sind die Diagonalen OR' und $O'R$ beständig senkrecht auf einander. Der Schnittpunkt K derselben hat von den Mittelpunkten S, S', T, $\mathfrak{T}$ der Seiten r, r', m, n bez. die unveränderlichen Entfernungen
$$\frac{r}{2}, \frac{r'}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2};$$
wir erhalten demnach einen übergeschlossenen Mechanismus, indem wir die Strecken SK, $S'K$, TK, $\mathfrak{T}K$ im Punkte K zu einem viergliedrigen Gelenk verbinden.*

Setzen wir in den Gleichungen 7) und 8):
$$n^2 = r^2 + r'^2 - m^2, \quad \alpha = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{r}{2}, \quad l' = \frac{r'}{2},$$
so gehen beide über in
$$\left(\zeta - \frac{m}{2}\right)[(r^2 + r'^2)\zeta - m r^2] = 0.$$

Von den sechs Focalcentren der Curve k fallen also vier, nämlich F_1, F_2 und je einer der Punkte G und H mit T zusammen, während die beiden anderen G und H in einem Punkte U der Geraden OO' vereinigt sind; dabei ist
$$OU = \frac{m r^2}{r^2 + r'^2}.$$

Machen wir noch auf RR' die Strecke
$$R\mathfrak{U} = \frac{n r^2}{r^2 + r'^2},$$
so zählt $\mathfrak{U}$ für zwei, $\mathfrak{T}$ für vier Focalcentra der Curve $\mathfrak{k}$.

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon' = \frac{r^2}{r^2 + r'^2}$ verwandeln sich die Gleichungen 19) in
$$l = \frac{r}{2}, \quad l' = \frac{r'}{2}.$$

Lösen wir daher in Figur 6 das viergliedrige Gelenk bei K auf und bringen das Knie SKS' in die symmetrische Lage SK^*S', so können wir K^* mit U und $\mathfrak{U}$ zu einem Brennpunktmechanismus verbinden. — Fragen wir umgekehrt nach der Bedingung, unter welcher bei dem in Figur 4 dargestellten Brennpunktmechanismus die Focalcentra F_1, F_2, G_2, H_2 in einen Punkt zusammenfallen, so finden wir
$$m^2 + n^2 = r^2 + r'^2, \quad \varepsilon = \frac{1}{2},$$
wie in Figur 6.

Im vorliegenden Falle besteht die Kniecurve k aus dem vierfach zählenden Kreis um T mit dem Radius TK und aus dem doppelt zählenden

* Burmester: Kinematik I S. 598.

Kreis um U mit dem Radius UK^*. In der That, lassen wir in Figur 6 die Koppel RR' alle möglichen Lagen oberhalb der Geraden OO' continuirlich einmal durchlaufen, so beschreibt der Punkt K viermal hin- und hergehend ein Bogenstück des ersten Kreises, während der Punkt K^* den zweiten Kreis einmal ganz durchwandert, und das entsprechende gilt für diejenige Bewegung der Koppel RR', die zur ersten symmetrisch ist in Bezug auf OO'.

Wir können auch die Punkte S, S', T, $\mathfrak{T}$ mit einem gewissen Punkte J zu einem Brennpunktmechanismus vereinigen. Dann ist $\varepsilon' = \frac{1}{2}$, also nach 19) und 20):

$$SJ = \frac{r'}{2}, \quad S'J = \frac{r}{2},$$

$$TJ = \frac{n}{2}, \quad \mathfrak{T}J = \frac{m}{2},$$

das heisst $SKS'J$ und ebenso $TK\mathfrak{T}J$ ein Parallelogramm. Während die Glieder OR, $O'R'$, TK zwischen gewissen Grenzlagen hin- und herschwingen, macht das Glied TJ gleichzeitig mit UK^* eine volle Umdrehung.

Der Rest der zum Punkte J gehörenden Kniecurve ist eine eigentliche Curve achter Ordnung. Von ihren Focalcentren sind zwei in T vereinigt; das dritte ist U, und das vierte liegt auf OO' symmetrisch zu U in Bezug auf T.

IV. In Figur 7 ist $OO'R'R$ ein Parallelogramm und die Dreiecke $O'R'S'$ und $RR'\mathfrak{T}$ sind bez. congruent mit den beliebigen Dreiecken ORS und $OO'T$. Construiren wir das Parallelogramm $SOTK$, so sind auch $S'K$, $\mathfrak{T}K$ bez. gleich und parallel zu $O'T$, RS; die vier in K zusammenstossenden Strecken bilden also ein viergliedriges Gelenk.*

Im vorliegenden Falle ist $m = n$, $r = r'$, folglich verwandelt sich Gleichung 8) in

$$m^2\zeta^2 - m(m^2 + l^2 - l'^2)\zeta + m^2 l^2 = 0,$$

oder, wenn ω den Winkel TOO' bezeichnet,

$$\zeta^2 - 2l\zeta\cos\omega + l^2 = 0,$$

oder

$$(\zeta - le^{i\omega})(\zeta - le^{-i\omega}) = 0.$$

Die Focalcentra H_1, H_2 sind also identisch mit T und mit dem Punkte T^*, der zu T symmetrisch liegt in Bezug auf OO'. Machen wir die Dreiecke $SS'K^*$ und $RR'\mathfrak{T}^*$ congruent zu $OO'T^*$, so werden T^*K^*, $\mathfrak{T}^*T^*$ bez. gleich und parallel zu TK, $\mathfrak{T}K$. Die vollständige Curve k zerfällt demnach in die einfach zählenden Kreise um T und T^* vom Radius TK und in eine vierfach circulare Curve achter Ordnung, die wir erhalten, wenn beim Durchgange durch die Durchschlagslage das Parallelogramm $OO'R'R$ in ein Antiparallelogramm übergeht.

* Burmester: Kinematik I S. 595.

V. Bei dem in Figur 8 gezeichneten Gelenkmechanismus ist

$$OO' = RR' = m, \quad OR = O'R' = r,$$
$$OS = S'R = s, \quad SK = S'K = l;$$

dabei sind die Strecken m, r, s, l vollkommen unabhängig von einander. Schneidet die Gerade SS' die Seiten OO', RR' bez. in T, $\mathfrak{T}$ und bezeichnen wir den Mittelpunkt von SS' mit M, so ist

$$SK^2 - TK^2 = SM^2 - TM^2 = ST \,.\, S\mathfrak{T} = \frac{s}{r} RO' \cdot \frac{r-s}{r} OR'.$$

Aus dem Kreisviereck $OO'RR'$ folgt aber

$$OO' \,.\, RR' = RO' \,.\, OR' + OR \,.\, O'R',$$

oder

$$RO' \,.\, OR' = m^2 - r^2,$$

mithin ist

$$TK^2 = l^2 - \frac{s(r-s)(m^2 - r^2)}{r^2}.$$

Die einander gleichen Strecken TK, $\mathfrak{T}K$ sind also während der ganzen Bewegung constant und folglich durch Gelenke ersetzbar.*

In den Punkten T, $\mathfrak{T}$ vereinigen sich bez. die Focalcentra F_1, F_2 und $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$. — Wir kommen auf diesen Fall später ausführlicher zurück.

7. Um in systematischer Weise die sämmtlichen übergeschlossenen Mechanismen zu erhalten, die sich überhaupt durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks aus dem Gelenkviereck construiren lassen, könnten wir zunächst untersuchen, unter welchen Umständen sich in Figur 1 der Punkt K noch mit einem dritten Gliede, etwa OO', durch ein Gelenk verbinden lässt. Dies verlangt die Angabe aller derjenigen Bedingungen, denen die Grössen m, n, r, r', s, s', α, α', l, l' genügen müssen, wenn ein gewisser Kreis um eines der bereits bestimmten Focalcentra als Bestandtheil der Curve k auftreten soll. Dabei kommen die mit O, O' zusammenfallenden Focalcentra nicht weiter in Betracht; könnte nämlich der Punkt K einen Kreis um O beschreiben, so würden die Punkte O, R, K ein unveränderliches Dreieck bilden, das mit dem Dreieck $O'R'S'$ durch die drei Glieder OO', RR', KS' verbunden wäre.

Verstehen wir unter ϱ den unbekannten Kreisradius, so fragt es sich, in welchen Fällen die Substitution

$$y^2 = -x^2 + 2\xi x + 2\eta y - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2 \tag{21}$$

der Curvengleichung 4) oder 6) identisch genügt, wenn wir für ξ, η der Reihe nach die Coordinaten der mit F, G, H bezeichneten Focalcentra setzen.

Bei dieser allgemeinen Fassung der Aufgabe würde sich aber die Rechnung sehr umständlich gestalten. Wir beschränken uns daher zur vorläufigen

* Burmester: Kinematik I S. 571.

Orientirung auf die Betrachtung eines speciellen Falles, indem wir annehmen, das Viereck $OO'R'R$ sei ein Parallelogramm (Fig. 9).

Construiren wir dann die Parallelogramme $OSKT$ und $O'S'KT'$, so wird

$$OT = l,\quad O'T' = l',\quad TK = s,\quad T'K = s',$$

Winkel $TKT' = \alpha - \alpha'$. Demnach ist TKT' ein starres Dreieck, und die Kurve, die K in Verbindung mit dem Parallelogramm $OO'R'R$ beschreibt, ist identisch mit der Koppelcurve k_1, die wir erhalten, wenn wir K an die Seite TT' des Gelenkvierecks $OO'T'T$ anschliessen. Geht das Viereck $OO'R'R$ in seiner Durchschlagslage in ein Antiparallelogramm über, so erzeugt der Punkt K eine neue Curve k_2, die mit k_1 vereinigt die vollständige Kniecurve k darstellt. Nun ist k_1 bekanntlich eine tricirculare Curve sechster Ordnung, mithin ergiebt sich der Satz: Sind in dem Gelenkviereck $OO'R'R$ je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so spaltet sich die Kniecurve k in eine Koppelcurve k_1 und eine vierfach circulare Curve achter Ordnung k_2.

Für $m = n$, $r = r'$ zerfällt die Gleichung 5) in die beiden Gleichungen:

$$22)\quad m\zeta^2 - (m^2 + rse^{-i\alpha} - rs'e^{-i\alpha'})\zeta + mse^{-i\alpha}(r - s'e^{-i\alpha'}) = 0$$

und

$$(s'e^{i\alpha} - se^{i\alpha'})\zeta + mse^{i\alpha'} = 0.$$

Die erste bestimmt zwei Punkte G_1, G_2, die zweite einen Punkt G_3, den wir erhalten, indem wir $\Delta OO'G_3$ gleichsinnig ähnlich machen mit $\Delta TT'K$. Die Punkte O, O', G_3 sind bekanntlich die Focalcentra der Koppelcurve k_1; die Curve k_2 hat demnach zu Focalcentren die Punkte F_1, F_2, G_1, G_2.

Sind alle vier Seiten des Vierecks $OO'R'R$ einander gleich, so werden G_1, G_2 bez. identisch mit F_1, F_2, und die Curve k_2 verwandelt sich in zwei doppelt zählende Kreise um F_1 und F_2. Dann kann sich nämlich das Viereck nicht mehr als Antiparallelogramm bewegen, sondern es fällt entweder OR zusammen mit OO', so dass die Glieder $O'R'$ und RR' vereinigt um O' rotiren — oder es deckt sich $O'R'$ mit $O'O$, und die Glieder OR, $R'R$ drehen sich gemeinschaftlich um O. Im letzten Falle gelangt der Punkt S' in die feste Lage F_2, und wir erhalten das Gelenkviereck $OSKF_2$ mit dem festen Gliede OF_2.

8. Wir setzen im Folgenden voraus, in dem Parallelogramm $OO'R'R$ seien die benachbarten Seiten nicht einander gleich. Soll dann der Punkt K in Bezug auf das Glied OO' eines Theils einen Kreis beschreiben, so muss derselbe entweder in der Koppelcurve k_1, oder in der Curve k_2 enthalten sein. Wir untersuchen zunächst, wann der erste Fall eintreten kann.

I. Die Koppelcurve k_1 besteht aus einem Kreis und einer bicircularen Curve vierter Ordnung, wenn in Figur 9 das Viereck $OO'T'T$ zu einem Parallelogramm wird, das heisst für:

$$23)\quad \begin{cases} l = l' \\ \text{und} \\ s^2 + s'^2 - 2ss'\cos(\alpha - \alpha') = m^2. \end{cases}$$

Dann verwandelt sich Figur 9 in Figur 10, in welcher die Seiten SK, $S'K$ der Parallelogramme $OSKT$, $O'S'KT'$ zusammenfallen. Die Gleichungen 23) enthalten demnach die Bedingung, unter welcher die Eckpunkte S, S' der Dreiecke ORS, $O'R'S'$ im Verlaufe der Bewegung des Parallelogramms $OO'R'R$ einmal zusammentreffen. Die sich deckenden Glieder SK, $S'K$ können naturgemäss um diesen Treffpunkt rotiren, während das Gelenkviereck in Ruhe bleibt, ein übergeschlossener Mechanismus ergiebt sich hieraus aber nicht.

II. Sind in Figur 9 die Dreiecke ORS, $O'R'S'$ gleichsinnig congruent, so wird die Strecke $TT'=0$, und das Gelenkviereck $OO'T'T$ geht über in das starre Dreieck $OO'T$. Dann zerfällt die k_1 in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade und in zwei Kreise vom Radius s um T und um den Punkt T^*, der zu T symmetrisch liegt in Bezug auf OO'. Machen wir noch $\Delta RR'T$ congruent zu $\Delta OO'T$ und verbinden K mit $\mathfrak{T}$, so erhalten wir den in Figur 7 dargestellten übergeschlossenen Mechanismus.

III. Die Curve k_1 spaltet sich endlich in einen doppelt zählenden Kreis um O und in die beiden Geraden, die den Punkt O' mit den imaginären Kreispunkten verbinden, wenn in Figur 9 der Punkt K mit T zusammenfällt. Dann müsste aber $s=0$, das heisst S identisch sein mit O — eine Annahme, die gegenwärtig nicht in Betracht kommt.

9. In Figur 11 ist das Gelenkviereck $OO'R'R$ in ein Antiparallelogramm übergegangen; der Punkt K beschreibt also augenblicklich die Curve k_2. Bezeichnen wir wie in Artikel 1 mit ϑ, ϑ' die Winkel, welche bez. die Strecken OR, $O'R'$ mit der oberen Seite der Geraden OO' einschliessen, so ist

$$\vartheta' = 180^0 + R\hat{O'}R' - R\hat{O'}O$$

und

$$\sin R\hat{O'}R' = \frac{m \sin\vartheta}{O'R}, \quad \cos R\hat{O'}R' = \frac{r - m\cos\vartheta}{O'R},$$

$$\sin R\hat{O'}O = \frac{r \sin\vartheta}{O'R}, \quad \cos R\hat{O'}O = \frac{m - r\cos\vartheta}{O'R},$$

folglich:

$$\sin\vartheta' = -\frac{(m^2 - r^2)\sin\vartheta}{m^2 + r^2 - 2mr\cos\vartheta},$$

$$\cos\vartheta' = \frac{(m^2 + r^2)\cos\vartheta - 2mr}{m^2 + r^2 - 2mr\cos\vartheta}.$$

Setzen wir in Gleichung 2) für $\sin\vartheta'$ und $\cos\vartheta'$ die gefundenen Werthe und eliminiren hierauf ϑ zwischen 1) und 2), so erhalten wir als Gleichung der Curve k_2:

$$24)\quad \begin{cases} [r^2PP' + 2mr(s'a'P - saP') - 4m^2ss'aa' + 2ss'(m^2-r^2)(aa'+bb')] \\ \cdot[m^2PP' + 2mr(s'a'P - saP') - 4m^2ss'aa' + 2ss'(m^2-r^2)(aa'+bb')] \\ \qquad + (m^2-r^2)^2[s'^2(a'^2+b'^2)P^2 + s^2(a^2+b^2)P'^2 \\ \qquad - 4s^2s'^2(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)] = 0. \end{cases}$$

Es handelt sich nun um Angabe der sämmtlichen Fälle, in denen die Substitution 21) dieser Gleichung identisch genügt, wenn ξ, η zunächst die Coordinaten von F_1 (oder F_2), sodann diejenigen eines der Punkte G_1, G_2 bedeuten. Ohne auf die immerhin langwierige Rechnung weiter einzugehen, beschränken wir uns im Folgenden auf die Mittheilung der erhaltenen Resultate.

I. Setzen wir für ξ, η die Coordinaten von F_1:

$$\xi = \frac{ms}{r} \cos\alpha, \quad \eta = -\frac{ms}{r} \sin\alpha,$$

so zeigt es sich, dass die linke Seite der Gleichung 24) in zwei Fällen identisch verschwindet, nämlich:

A. Für $\alpha = \alpha'$, $s = s'$, $l = \frac{ms}{r}$, $l'^2 = \frac{m^2}{r^2}(r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha)$, $\varrho = s$.
Gegenwärtig ist $SK = OF_1$, $S'K = O'F_1$, $F_1K = OS = O'S'$, also das Viereck $F_1O'S'K$ ein Parallelogramm und OF_1KS ein Antiparallelogramm. Machen wir noch $\Delta RR'\mathfrak{F}_2$ gleichsinnig congruent zu $\Delta OO'F_1$, so wird $R\mathfrak{F}_2$ parallel und gleich zu SK; wir erhalten daher den in Figur 2 dargestellten Sylvester'schen Mechanismus für den speciellen Fall, dass das Viereck $OO'R'R$ ein Antiparallelogramm ist. Die Curve k_2 spaltet sich in den Kreis k'_2 um F_1 mit dem Radius s und eine tricirculare Curve sechster Ordnung k''_2 mit den Focalcentren F_2, G_1, G_2. Dieselbe ist übrigens keine Koppelcurve, wie wir am einfachsten in dem speciellen Falle $\alpha = \alpha' = 0$ erkennen. Dann wird die k''_2 symmetrisch in Bezug auf OO'; sie schneidet diese Gerade in denselben Punkten, wie der Kreis k'_2 und hat überdies auf OO' zwei Doppelpunkte. Von den drei Focalcentren fällt der Punkt F_2 auf OO', und die beiden anderen Punkte G_1, G_2 liegen auf oder symmetrisch zu OO', je nachdem $m^2 \gtrless 4s(r-s)$ ist. Wäre k''_2 eine Koppelcurve, so müsste sie auf OO' gleichzeitig drei Focalcentra und drei Doppelpunkte besitzen. — Die Koppelcurve k_1 zerfällt gegenwärtig in den Kreis k'_2, in den Kreis, der zu diesem symmetrisch ist in Bezug auf OO', und in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade.

B. Die linke Seite der Gleichung 24) wird ferner identisch zu Null für

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad s' = r - s, \quad l = l', \quad \varrho^2 = l^2 - \frac{s(r-s)(m^2 - r^2)}{r^2}.$$

Durch diese Relationen ist aber der in Figur 8 dargestellte Mechanismus definirt. Da bei demselben die beiden Focalcentra F_1, F_2 mit dem Punkte T zusammenfallen, so bildet der Kreis um T mit dem Radius TK einen doppelt zählenden Bestandtheil der Curve k_2.

Lässt sich aus den Strecken OO', OS, $O'S'$ ein Dreieck construiren, so fallen die Punkte S und S' während der Bewegung des Antiparallelogramms zweimal zusammen, und dann sind diese Treffpunkte, um welche die Glieder SK, $S'K$ vereinigt rotiren, identisch mit den Focalcentren G_1, G_2.

Der Rest der Curve k_2 besteht demnach aus zwei reellen oder imaginären Kreisen vom Radius l, deren Mittelpunkte von O um s, von O' um $r-s$ entfernt sind.

Dieses Ergebniss bestätigt in anschaulicher Weise den letzten Satz des Artikels 2. Es beschreiben nämlich alle Punkte K, die wir in Figur 8 durch zwei beliebig, aber gleich lange Glieder SK, $S'K$ an die Punkte S, S' anschliessen können, drei Schaaren concentrischer Kreise um T, G_1, G_2 und überdies eine Schaar symmetrischer Koppelcurven mit den festen Focalcentren O, O', G_3; dabei theilt G_3 die Strecke OO' im Verhältniss $OS : O'S'$.

II. Die Coordinaten der Punkte G_1, G_2 sind nach 22) die reellen Lösungen der beiden Gleichungen:

$$m(\xi^2-\eta^2)-(m^2+rs\cos\alpha-rs'\cos\alpha')\xi-r(s\sin\alpha-s'\sin\alpha')\eta$$
$$+mrs\cos\alpha-mss'\cos(\alpha+\alpha')=0,$$
$$2m\xi\eta+r(s\sin\alpha-s'\sin\alpha')\xi-(m^2+rs\cos\alpha+rs'\cos\alpha')\eta$$
$$-mrs\sin\alpha+mss'\sin(\alpha+\alpha')=0.$$

Bilden wir nun wieder die Bedingungen, unter denen die Substitution 21) der Gleichung 24) identisch genügt, so führt die Rechnung einerseits auf die selbstverständliche Forderung, es müsse $l=l'$ und im Uebrigen die Figur so beschaffen sein, dass die Punkte S und S' zusammentreffen können. Davon abgesehen ergiebt sich ein einziger Fall, in welchem die linke Seite von 24) identisch verschwindet; derselbe wird definirt durch:

$$\alpha=\alpha'=0,\quad s=s',$$
$$\eta=0,\quad \xi^2-m\xi+rs-s^2=0,$$
$$l^2=\xi^2,\quad l'^2=(m-\xi)^2,\quad \varrho^2=s^2.$$

Die quadratische Gleichung für ξ bestimmt zwei auf OO' liegende Punkte G_1, G_2. Construiren wir dann ein Knie mit den Schenkeln

$$SK=OG_1,\quad S'K=O'G_1,$$

so entsteht ein übergeschlossener Mechanismus, indem wir K mit G_1 durch das Glied $G_1K=s$ verbinden.

Machen wir noch auf RR' die Strecke $R\mathfrak{G}_1=OG_1$, so wird

$$\mathfrak{G}_1K=r-s,$$

und wir erhalten einen Brennpunktmechanismus, der aus Figur 4 hervorgeht, wenn $m=n$, $r=r'$ ist. Dann folgt nämlich aus Gleichung 17):

$$\varepsilon'(1-\varepsilon')m^2=\varepsilon(1-\varepsilon)r^2;$$

setzen wir nun $\varepsilon'm=\xi$, $\varepsilon r=s$ und vertauschen die Buchstaben T, $\mathfrak{T}$ bez. mit G_1, $\mathfrak{G}_1$, so liefern die Gleichungen 18) bis 20) die soeben angegebenen Werthe für OG_1, $R\mathfrak{G}_1$, l, l', G_1K, $\mathfrak{G}_1K$.

Im vorliegenden Falle besteht die Curve k_2 aus dem Kreise k'_2 um G_1 mit dem Radius s und aus einer tricircularen Curve sechster Ordnung k''_2 mit den Focalcentren F_1, F_2, G_2. Dieselbe berührt den Kreis in seinen

beiden Schnittpunkten mit OO' und hat überdies auf OO' zwei Doppelpunkte, ist also wiederum keine Koppelcurve. Die Curve k_1 zerfällt in den doppelt zählenden Kreis k'_2 und die doppelt zählende unendlich ferne Gerade.

Der Sylvester'sche und der Brennpunktmechanismus erscheinen hier als diejenigen Sonderfälle der Figur 7, in denen das dort gezeichnete Parallelogramm $OO'R'R$ zugleich als Antiparallelogramm bewegt werden kann. Aber der in Figur 7 dargestellte Mechanismus ist nicht, wie jene beiden, auf das allgemeine Gelenkviereck übertragbar.

10. Die Untersuchung des Gelenkvierecks, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, hat somit nur zu solchen übergeschlossenen Mechanismen geführt, die unter den in Artikel 5 und 6 angegebenen bereits enthalten sind. Wir können hieraus einige Schlüsse ziehen für den allgemeinen Fall, dass die Seiten des Vierecks $OO'R'R$ keinerlei Beschränkungen unterliegen. Zunächst folgt, dass es keinen allgemeineren übergeschlossenen Mechanismus giebt, der den Sylvester'schen oder den Brennpunktmechanismus als speciellen Fall enthält; dabei kommen selbstverständlich immer nur solche Mechanismen in Betracht, die sich aus dem Gelenkviereck durch Einfügung eines viergliedrigen Gelenks bilden lassen.

Unter den vier Mechanismen, welche der soeben behandelte Sonderfall geliefert hat, befindet sich nur einer, bei welchem die Punktgruppen ORS $O'R'S'$ nicht gleichsinnig ähnlich sind, und dieser (Fig. 8) ist offenbar nur dem Antiparallelogramm eigenthümlich. Bei der Betrachtung des allgemeinen Gelenkvierecks werden wir deshalb von vornherein voraussetzen, es sei ΔORS gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O'R'S'$.

Für $m = n$, $r = r'$ stellt ferner Figur 7 den einzigen Mechanismus dar, bei welchem im Anschlusspunkte T nur ein Focalcentrum der Curve k liegt und der Kreis um T einen einfach zählenden Bestandtheil der Kniecurve bildet. Sind nun bei einem übergeschlossenen Mechanismus die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $OO'R'R$ nicht einander gleich, so wird jener Kreis um den Anschlusspunkt T als Bestandtheil der zerfallenden Kniecurve immer doppelt zählen. Dies ist sofort ersichtlich, wenn wir das Viereck so wählen, dass die Glieder OR, $O'R'$ nicht volle Umdrehungen machen können, sondern zwischen gewissen Grenzlagen zu beiden Seiten von OO' hin- und herschwingen. Um demnach aus dem allgemeinen Gelenkviereck weitere übergeschlossene Mechanismen zu bilden, werden wir von vornherein über die Grössen ε, α, l, l' so verfügen, dass irgend zwei Focalcentra der Curve k mit einander zusammenfallen.

Der Vereinigung von F_1 und F_2, oder von F_1 und H_1, oder von G_1 und H_1 entsprechen bez. die Figuren 8, 2, 4. Die Forderung, dass G_1 und G_2 zusammenfallen, führt bereits beim Antiparallelogramm zu keinem neuen übergeschlossenen Mechanismus. Wir betrachten weiter den Fall,

dass F_1 mit G_1 identisch ist — immer unter der Voraussetzung, es sei ΔORS gleichsinnig ähnlich mit $\Delta O'R'S'$. Hierfür ergiebt sich aus Gleichung 7) die Bedingung

$$(1-\varepsilon e^{-i\alpha})[(1-\varepsilon e^{-i\alpha})(m^2-r^2)+\varepsilon e^{-i\alpha}(n^2-r'^2)]=0$$

und dieser wird, wenn nicht $\alpha=0$, $\varepsilon=1$ oder $m=r$, $n=r'$ ist, nur genügt durch:

$$25)\qquad \alpha=0,\quad (1-\varepsilon)(m^2-r^2)+\varepsilon(n^2-r'^2)=0.$$

Dann wird zugleich $\mathfrak{F}_2$ identisch mit einem der Punkte $\mathfrak{G}$, und nun fragt es sich, ob wir durch geeignete Wahl der Glieder l, l' die Curve k in einen Kreis um F_1 und eine gewisse andere Curve spalten können. Die Betrachtung des Sonderfalles $m=n$, $r=r'$ giebt gegenwärtig keinen Aufschluss, denn sie führt in Verbindung mit der letzten Gleichung auf die Forderung $m=r$, und unter dieser Annahme zerfällt die Kniecurve, wie am Schluss des Artikels 7 gezeigt wurde, für beliebige Werthe von ε, l, l'. Es bleibt demnach nur übrig, zu untersuchen, wann die Substitution 21):

$$y^2=-x^2+2\varepsilon m x-\varepsilon^2 m^2+\varrho^2$$

der Gleichung 6) identisch genügt; in dieser ist nach 25) zu setzen:

$$\varepsilon q^2=m^2-(1-2\varepsilon)r^2.$$

Die Rechnung liefert sofort als erste Bedingung $\varepsilon=\frac{1}{2}$ und damit nach 25):

$$m^2+n^2=r^2+r'^2.$$

Wir gelangen demnach zu dem in Figur 6 dargestellten Mechanismus, bei welchem die Diagonalen des Vierecks $OO'R'R$ aufeinander senkrecht stehen. Eine zweite Lösung ergiebt sich nicht.

Es wäre endlich noch der Fall zu untersuchen, dass H_1 mit H_2 identisch wird. Nach Gleichung 8) vereinigt sich H_1 mit H_2 und gleichzeitig $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{H}_2$, wenn

$$(l\pm l')^2=m^2-\varepsilon(m^2-n^2)e^{i\alpha}$$

ist, das heisst, einerseits für

$$26)\qquad m=n,\quad (l\pm l')^2=m^2,$$

andererseits für

$$27)\qquad \alpha=0,\quad (l\pm l')^2=m^2-\varepsilon(m^2-n^2).$$

Die Bedingungen 26) führen zu dem Mechanismus in Figur 7 für den speciellen Fall, dass der Anschlusspunkt T auf der Geraden OO' liegt. Die so entstehende Figur genügt für $\alpha=0$ und für beliebige Werthe von l und ε zugleich der Gleichung 27); es scheint aber immerhin fraglich, ob nicht diese letzte Bedingung für bestimmte Werthe von l und ε noch einen übergeschlossenen Mechanismus liefert, bei welchem das Viereck $OO'R'R$ kein Parallelogramm zu sein braucht.

Um hierüber Auskunft zu erhalten, sind wir von einem Viereck ausgegangen, in welchem zweimal zwei folgende Seiten einander gleich sind,

etwa $r = m$, $r' = n$. Bei diesem kann das Glied OR mit dem festen Gliede OO' zur Deckung gebracht werden; bezeichnen wir mit F_1 die zugehörige Lage des Punktes S, so bilden die Punkte O', F_1, K, S' ein Gelenkviereck und die Kniecurve k zerfällt in den doppelt zählenden Kreis k_1 um F_1 und eine Curve achter Ordnung k_2. Der Punkt G_1 fällt gegenwärtig mit F_1 zusammen und die Curve k_2 hat die Focalcentra F_2, G_2, H_1, H_2; dabei ist

$$OG_2 = \frac{(1-\varepsilon)m^3}{(1-\varepsilon)m^2 + \varepsilon n^2},$$

und wenn die Punkte H_1 und H_2 sich vereinigen sollen, nach 27):

$$OH_1 = OH_2 = \xi = \frac{ml}{l \pm l'}.$$

Bilden wir nun die Gleichung der Curve k_2, machen wieder die Substitution

$$y^2 = -x^2 + 2\xi x - \xi^2 + \varrho^2$$

und setzen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von x nach einander gleich Null, so erhalten wir nur die unbrauchbare Lösung $m = n$, die auf den bereits erwähnten speciellen Fall von Figur 7 zurückführen würde. Es entspricht also auch der Vereinigung von H_1 und H_2, zunächst unter der Voraussetzung $r = m$, $r' = n$ und dann offenbar ebenso im allgemeinen Falle, kein neuer übergeschlossener Mechanismus.

XV.

Die Beschleunigungspole der kinematischen Kette.

Von

Prof. F. Wittenbauer
in Graz.

Hierzu Tafel X und XI Fig. 1—17.

Eines der wichtigsten und interessantesten Probleme der modernen Kinematik ist die constructive Ermittelung des Beschleunigungszustandes kinematischer Ketten. Bis jetzt sind auf diesem Gebiete noch geringe Erfolge erzielt worden: ausser wenigen einfachen Specialfällen kinematischer Ketten, für welche elegante Constructionen der Beschleunigung gefunden wurden, kennt man keine allgemeine Methode für die Lösung des Problems: die Beschleunigung jedes Punktes einer kinematischen Kette in Bezug auf jedes beliebige Glied derselben zu construiren.

Ich habe in zwei Abhandlungen: „Die Wendepole der kinematischen Kette“ und „Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung“ versucht, die Lösung dieses Problems vorzubereiten und hoffe, dass es mir mit vorliegender Abhandlung, welche hauptsächlich die bisher wenig beachteten Tangentialpole untersucht, gelungen ist, diese Lösung selbst zu finden, indem ich zeige, wie man die Beschleunigungspole einer kinematischen Kette mit Hilfe von Constructionen, die hauptsächlich aus projectiven Beziehungen hervorgegangen sind und zu ihrer Ausführung nur das Ziehen von Parallelen und Senkrechten bedürfen, bestimmen kann.

Allerdings liefert der Beschleunigungspol nur die Richtung der Beschleunigung eines Systempunktes; allein der nächste Schritt, die Bestimmung der Grösse der Beschleunigung, ist ein verhältnissmässig sehr einfacher.

1. Bei jeder Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems in seiner Ebene giebt es in jedem Augenblicke der Bewegung vier wichtige Punkte (Fig. 1): den Drehpol O, den Wendepol J, den Tangentialpol H und den Beschleunigungspol G.

An die Eigenschaften dieser Punkte möge hier kurz erinnert werden.

Bezeichnet d den Durchmesser des über OJ beschriebenen Kreises, des Wendekreises, e den Durchmesser des über OH beschriebenen Kreises, des Tangentialkreises, ω und λ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit bezw. Winkelbeschleunigung des Systems, so gilt die Beziehung

$$d\omega^2 = e\lambda;$$

die momentane Bewegung des Systems ist eine Drehung um O mit der Winkelgeschwindigkeit ω; gleichzeitig tritt um den auf der Poltangente OH liegenden Tangentialpol H die Winkelbeschleunigung λ auf und verändert ω.*

Der Beschleunigungspol liegt in der Senkrechten, die von O auf JH gefällt wird. Um ihn gruppiren sich die Beschleunigungen der Systempunkte in ähnlicher Weise, wie die Geschwindigkeiten der Systempunkte um den Drehpol.

Aus den drei Punkten OJH lässt sich die Beschleunigungsrichtung jedes Systempunktes auf lineare Weise construiren.

2. Um den Beschleunigungspol irgend eines Gliedes einer kinematischen Kette in Bezug auf irgend ein anderes Glied derselben zu bestimmen, giebt es nach Obigem folgenden Weg: Man bestimme die drei Punkte OJH der relativen Bewegung der Glieder; dann ist G der Fusspunkt der Geraden $OG \perp JH$.

Die Bestimmung des Drehpoles O hat nach den bekannten Grundsätzen über die Polbestimmung kinematischer Ketten zu erfolgen.**

Die Ermittelung des Wendepoles J habe ich in der Abhandlung: „Die Wendepole der kinematischen Kette" (Zeitschrift für Mathematik und Physik 40. Jahrgang) gezeigt.

Es bleibt somit noch die Construction des Tangentialpoles H, mit welcher sich diese Abhandlung vornehmlich beschäftigen soll. Es giebt eine directe Methode, sämmtliche Tangentialpole einer zwangläufigen kinematischen Kette zu bestimmen. Da nun auch die Wendepole jeder solchen Kette auf selbstständige Weise und nach ganz anderer Methode zu ermitteln sind, wie ich gezeigt habe, so hat man in dem Kriterium

$$\sphericalangle JOH = 90^0$$

stets ein werthvolles Mittel, sich von der Richtigkeit der Theorie zu überzeugen und andererseits die Genauigkeit der durchgeführten Constructionen zu prüfen.

3. Es seien 1, 2, 3, 4 vier ebene Systeme, deren gegenseitige Bewegung studirt werden soll. Die Polconfiguration derselben $O_{12}O_{23}O_{13}O_{14}O_{24}O_{34}$ (Fig. 2) sei gegeben, ebenso von drei der gegenseitigen Bewegungen

---

* Vergl. W. Schell: „Ueber den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems" (Zeitschrift für Mathematik und Physik XIX. Bd.).

** L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik" I. Bd. S. 480.

die Wendepole $J_{12} J_{23} J_{14}$ und die Tangentialpole $H_{12} H_{23} H_{14}$; dann sind nach Obigem auch die zugehörigen Beschleunigungspole $G_{12} G_{23} G_{14}$ bestimmt. In der früher erwähnten Arbeit: „Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung“ habe ich gezeigt, wie die übrigen Wendepole, Tangentialpole und Beschleunigungspole zu finden sind; man erhält mit Hilfe der dort geschilderten Constructionen

aus $O_{12} O_{23} O_{13}$, $J_{12} J_{23}$, $H_{12} H_{23}$ die Punkte $J_{13} H_{13}$,
„ $O_{21} O_{14} O_{24}$, $J_{21} J_{14}$, $H_{21} H_{14}$ „ „ $J_{24} H_{24}$,
„ $O_{31} O_{14} O_{34}$, $J_{31} J_{14}$, $H_{31} H_{14}$ „ „ $J_{34} H_{34}$.

Wurde richtig construirt, so können nun wieder

aus $O_{24} O_{43} O_{23}$, $J_{24} J_{43}$, $H_{24} H_{43}$ die Punkte $J_{23} H_{23}$,

welche gegeben waren, zurückerhalten werden. Bezüglich der Stellenzeiger sei daran erinnert, dass z. B. J_{mn} der Wendepol der resultirenden Bewegung eines geführten Systems n ist, welches die Bewegung eines führenden Systems m mitzumachen gezwungen wird. Durch die Umkehrung der Bewegung, das heisst, durch die Vertauschung der Führerrolle der beiden Systeme, verändern die Drehpole und Tangentialpole ihre Lage nicht, es ist also allgemein

$$O_{mn} = O_{nm}, \quad H_{mn} = H_{nm},$$

hingegen wird der Wendepol J_{mn} durch die Umkehrung der Bewegung ein anderen J_{nm} und zwar wird die Strecke $J_{mn} J_{nm}$ durch den Drehpol $O_{mn} = O_{nm}$ halbirt.

Auf diese Weise wurden in der Figur die übrigen Wendepole und Tangentialpole construirt; da jedoch diese Constructionen ohne besonderen Einfluss auf die weitere Untersuchung sind, so wurden sie in der Zeichnung nicht weiter angedeutet.

Von Wichtigkeit für alles Nachfolgende ist die Configuration der Tangentialpole H, deren Eigenschaften wir nun studiren wollen (Fig. 3). Fällt man von einem der Tangentialpole, z. B. H_{13}, auf die in O_{13} sich schneidenden Polgeraden $O_{12} O_{23}$ und $O_{14} O_{43}$ (oder kürzer: O_{123} und O_{143}) die Senkrechten bis zu den Schnitten mit den Geraden $H_{12} H_{23}$ und $H_{14} H_{43}$, so gelten für diese Schnittpunkte $A^2{}_{13}$ und $A^4{}_{13}$ die barycentrischen Ausdrücke:

$$\lambda_{13} \cdot A^2{}_{13} = \lambda_{12} \cdot H_{12} + \lambda_{23} \cdot H_{23},$$

$$\lambda_{13} \cdot A^4{}_{13} = \lambda_{14} \cdot H_{14} + \lambda_{43} \cdot H_{43},$$

das heisst, $A^2{}_{13}$ theilt die Strecke $H_{12} H_{23}$ im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Winkelbeschleunigungen $\lambda_{12} \lambda_{23}$, oder $A^2{}_{13}$ ist der Schwerpunkt der Tangentialpole $H_{12} H_{23}$, wenn in diesen die Winkelbeschleunigungen $\lambda_{12} \lambda_{23}$ als Gewichte angebracht werden. Dabei bestehen zwischen den Gewichten oder Winkelbeschleunigungen die Beziehungen:

$$\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23} = \lambda_{14} + \lambda_{43},$$

oder

$$\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{31} = \lambda_{14} + \lambda_{43} + \lambda_{31} = 0.$$

Bezeichnet man allgemein die Entfernung zweier Drehpole $O_{mn}O_{np}$ mit a_{mnp}, so sind die Strecken

$$H_{13}A^2_{13} = \frac{a_{213} \cdot a_{132}}{a_{123}} \cdot \frac{\omega^2_{13}}{\lambda_{13}},$$

$$H_{13}A^4_{13} = \frac{a_{413} \cdot a_{134}}{a_{143}} \cdot \frac{\omega^2_{13}}{\lambda_{13}},$$

wie ich ebenfalls in der früher angezogenen Abhandlung bewiesen habe; es ist somit

$$\frac{H_{13}A^2_{13}}{H_{13}A^4_{13}} = \frac{a_{213} \cdot a_{132} \cdot a_{143}}{a_{413} \cdot a_{134} \cdot a_{123}}.$$

Wenn ein Dreieck $O_{13}O_{23}O_{43}$ von einer Geraden $O_{12}O_{24}O_{14}$ geschnitten wird, so besteht die Beziehung:

$$\frac{a_{213} \cdot a_{143} \cdot a_{423}}{a_{123} \cdot a_{413} \cdot a_{243}} = 1.$$

Nach Division der letzten Gleichungen bleibt

$$\frac{H_{13}A^2_{13}}{H_{13}A^4_{13}} = \frac{a_{132} \cdot a_{243}}{a_{134} \cdot a_{423}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

oder

$$H_{13}A^2_{13} \cdot \sin\alpha = H_{13}A^4_{13} \cdot \sin\beta,$$

das heisst, die Verbindungslinie der Theilungspunkte $A^2_{13}A^4_{13}$ steht auf der Verbindungslinie der Drehpole $O_{13}O_{24}$ senkrecht.

Sucht man ausserdem noch die Theilungspunkte A^2_{14} und A^2_{34}, indem man von H_{14} und H_{34} die Senkrechten auf die Polgeraden O_{124} bezw. O_{234} errichtet bis zum Schnitte mit den Verbindungslinien $H_{12}H_{24}$ bezw. $H_{23}H_{24}$, so gelten für diese Punkte die barycentrischen Ausdrücke:

$$\lambda_{34} \cdot A^2_{34} = \lambda_{32} \cdot H_{32} + \lambda_{24} \cdot H_{24},$$

$$\lambda_{41} \cdot A^2_{41} = \lambda_{42} \cdot H_{42} + \lambda_{21} \cdot H_{21}.$$

Hierzu kommt von früher

$$\lambda_{13} \cdot A^2_{13} = \lambda_{12} \cdot H_{12} + \lambda_{23} \cdot H_{23}.$$

Beachtet man, dass stets

$$H_{mn} = H_{nm}, \quad A^p_{mn} = A^p_{nm}, \quad \lambda_{mn} = -\lambda_{nm},$$

so liefert die Addition obiger drei Ausdrücke:

$$\lambda_{13} \cdot A^2_{13} + \lambda_{34} \cdot A^2_{34} + \lambda_{41} \cdot A^2_{41} = 0,$$

das heisst, die drei Theilungspunkte $A^2_{13}A^2_{34}A^2_{41}$ liegen in einer Geraden; jeder von ihnen theilt die Strecke zwischen den anderen im umgekehrten Verhältnisse der zugehörigen Winkelbeschleunigungen.

Die drei genannten Theilungspunkte verhalten sich also wie die Drehpole dreier Systeme 1, 3, 4, deren Winkelgeschwindigkeiten den Winkelbeschleunigungen $\lambda_{13}\lambda_{34}\lambda_{41}$ proportional sind.

Sucht man ferner noch in Figur 3 die Theilungspunkte $A^1{}_{24}$ und $A^3{}_{24}$, indem man von H_{24} auf die Polgeraden O_{124} und O_{234} die Senkrechten errichtet bis zum Schnitte mit den Geraden $H_{12}H_{14}$ bezw. $H_{23}H_{34}$, so schneiden sich die Verbindungslinien $A^2{}_{13}A^1{}_{24}$ und $A^4{}_{13}A^3{}_{24}$ in einem Punkte S der Geraden $H_{23}H_{14}$. Denn es ist nach der Bestimmungsweise von S:

$$S \equiv u \,.\, A^2{}_{13} + v \,.\, A^1{}_{24} = x \,.\, A^4{}_{13} + y \,.\, A^3{}_{24};$$

da nun die vier Theilungspunkte die Ausdrücke besitzen:

$$\lambda_{13} \,.\, A^2{}_{13} = \lambda_{12} \,.\, H_{12} + \lambda_{23} \,.\, H_{23},$$
$$\lambda_{13} \,.\, A^4{}_{13} = \lambda_{14} \,.\, H_{14} + \lambda_{43} \,.\, H_{43},$$
$$\lambda_{24} \,.\, A^1{}_{24} = \lambda_{21} \,.\, H_{21} + \lambda_{14} \,.\, H_{14},$$
$$\lambda_{24} \,.\, A^3{}_{24} = \lambda_{23} \,.\, H_{23} + \lambda_{34} \,.\, H_{34},$$

so wird:

$$u = x = \lambda_{13}, \quad v = y = \lambda_{24}$$

und es bleibt

$$S \equiv \lambda_{13} \,.\, A^2{}_{13} + \lambda_{24} \,.\, A^1{}_{24} = \lambda_{13} \,.\, A^4{}_{13} + \lambda_{24} \,.\, A^3{}_{24},$$

oder

$$S \equiv \lambda_{23} \,.\, H_{23} + \lambda_{14} \,.\, H_{14},$$

das heisst, der Punkt S theilt die Strecke $H_{23}H_{14}$ im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{23}\lambda_{14}$ und beide Strecken $A^2{}_{13}A^1{}_{24}$, $A^4{}_{13}A^3{}_{24}$ im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{13}\lambda_{24}$.

Ebenso kann gezeigt werden, dass die Verbindungslinien der Theilungspunkte $A^3{}_{12}A^1{}_{34}$ und $A^4{}_{12}A^2{}_{34}$ sich in einem Punkte S_1 derselben Geraden $H_{23}H_{14}$ schneiden. Man gewinnt nämlich auf analogem Wege für S_1 die Ausdrücke:

$$S_1 \equiv \lambda_{12} A^3{}_{12} + \lambda_{34} \,.\, A^1{}_{34} = \lambda_{12} \,.\, A^4{}_{12} + \lambda_{34} \,.\, A^2{}_{34},$$

$$S_1 \equiv \lambda_{32} \,.\, H_{32} + \lambda_{14} \,.\, H_{14}.$$

Die Punkte S und S_1 theilen die Strecke $H_{23}H_{14}$ harmonisch, wie ihre Ausdrücke lehren.

4. Die im vorigen Artikel behandelten vier ebenen Systeme besitzen sechs Tangentialpole H und zwölf Theilungspunkte A. Diese 18 Punkte bilden eine interessante Configuration; sie wurde in Figur 4 in anderer Anordnung vollständig gezeichnet.

Die Eigenschaften dieser Configuration ergeben sich aus den soeben abgeleiteten Sätzen und lassen sich in Folgendem zusammenfassen:

a) Jede Verbindungsgerade zweier Tangentialpole $H_{mn}H_{np}$ (mit gemeinsamer Ziffer n im Stellenzeiger) trägt einen Theilungspunkt $A^n{}_{mp}$; derselbe theilt ihre Strecke im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mn}\lambda_{np}$.

b) Jede Gerade $H_{mp}A^n{}_{mp}$ steht auf der Polgeraden O_{mnp} senkrecht. Die Geraden $H_{mp}A^n{}_{mp}$, $H_{pn}A^m{}_{pn}$, $H_{nm}A^p{}_{nm}$ sind somit parallel.

c) Jede Verbindungsgerade zweier Theilungspunkte mit gleichen unteren Stellenzeigern $A^n{}_{mp}$ und $A^q{}_{mp}$ steht senkrecht zur Verbindungslinie der Pole $O_{mp}O_{nq}$.

Die Geraden $A^n{}_{mp}A^q{}_{mp}$ und $A^m{}_{nq}A^p{}_{nq}$ sind somit parallel.

d) Je drei Theilungspunkte mit gleichen oberen Stellenzeigern liegen auf einer Geraden. So liegen z. B. die Theilungspunkte $A^n{}_{mp}A^n{}_{pq}A^n{}_{qm}$ auf der Geraden a^n. Sie liegen auf derselben wie die Drehpole dreier Systeme mpq, deren Winkelgeschwindigkeiten den Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mp}\lambda_{pq}\lambda_{qm}$ proportional sind.

e) Die Verbindungsgeraden $A^n{}_{mp}A^p{}_{nq}$ und $A^q{}_{mp}A^m{}_{nq}$ schneiden sich in einem Punkte S, der beide Strecken im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mp}\lambda_{nq}$ theilt.

Die Verbindungsgeraden $A^n{}_{mq}A^q{}_{np}$ und $A^p{}_{mq}A^m{}_{np}$ schneiden sich in einem Punkte S_1, der beide Strecken im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mq}\lambda_{np}$ theilt.

Die Punkte S und S_1 liegen auf der Verbindungsgeraden der Tangentialpole $H_{mn}H_{pq}$ und theilen diese Strecke harmonisch im umgekehrten Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen $\lambda_{mn}\lambda_{pq}$.

5. Die Configuration der Punkte H und A kann zur Lösung einiger Fragen benützt werden, welche für die kinematische Kette Bedeutung haben.

Ist die Configuration der sechs Drehpole O gegeben, so dürfen vier Tangentialpole H beliebig angenommen werden. Dann sind zwei Gerade bestimmbar, in denen die beiden übrigen Tangentialpole liegen müssen. Die hier möglichen Fälle lassen sich alle auf folgende zwei zurückführen:

a) Es sind die Tangentialpole $H_{mn}H_{np}H_{pm}$ (Poldreiung) und noch ein beliebiger vierter Tangentialpol gegeben; oder

b) Es sind die Tangentialpole $H_{mn}H_{np}H_{pq}H_{qm}$ (Polvierung) gegeben.

Von den 15 verschiedenen Annahmen der vier unter sechs Tangentialpolen tritt der Fall a) elfmal, der Fall b) viermal ein.

a) Die Poldreiung. In Figur 5 seien ausser der Configuration der Drehpole O die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{31}$ und H_{24} gegeben. Zieht man $H_{13}A^2{}_{13} \perp O_{123}$ bis zum Schnitte mit $H_{12}H_{23}$, ferner $H_{13}A^4{}_{13} \perp O_{134}$ und $A^2{}_{13}A^4{}_{13} \perp O_{13}O_{24}$, so gewinnt man den Theilungspunkt $A^4{}_{13}$. Auf gleiche Weise wurden in Figur 5 die Theilungspunkte $A^4{}_{12}$ und $A^4{}_{23}$ construirt. Diese drei Punkte liegen in der Geraden a^4. Verbindet man nun $A^4{}_{12}$ und $A^4{}_{23}$ mit H_{24}, so erhält man zwei Gerade $h_{14}h_{34}$, in denen die noch übrigen Tangentialpole H_{14} bezw. H_{34} liegen müssen. Nimmt man einen derselben an, so muss der andere auf der Geraden $H_{14}H_{34}A^4{}_{13}$ liegen und ist somit eindeutig bestimmt.

Die Punkte H_{14} und H_{34} liegen auf ihren Trägern h_{14} und h_{34} in projectivischen Punktreihen, die perspectivische Lage haben.

Fällt H_{14} mit H_{24} zusammen, so liegt daselbst auch H_{34}. Man kann also die sechs Tangentialpole derart annehmen, dass $H_{mn}H_{mp}H_{mq}$ zu-

sammenfallen; dann sind die drei anderen Tangentialpole noch beliebig wählbar.

b) Die Polvierung. In Figur 6 seien ausser der Configuration der Drehpole O die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{34}H_{41}$ gegeben. Sucht man den Schnitt H''_{13} der Linien $H_{12}H_{23}$ und $H_{34}H_{41}$, zieht ferner $ab \perp O_{13}O_{24}$, $ac \perp O_{134}$, $bc \perp O_{123}$, so ist $H''_{13}c$ eine Gerade h_{13}, in welcher der Tangentialpol H_{13} liegen muss. Denn, denkt man sich das Dreieck abc derart ähnlich veränderlich, dass die Eckpunkte auf ihren durch H''_{13} gehenden Trägern bleiben und die Seiten des Dreiecks ihre Richtung beibehalten, so entsprechen die Punkte a und b jederzeit zwei Theilungspunkten A^4_{13} und A^2_{13} (vergl. Fig. 4) und somit c dem zugehörigen Tangentialpole H_{13}.

Eine analoge Construction mit Hilfe des Dreieckes def führt zur Geraden $H''_{24}f$ oder h_{24}, in welcher der sechste Tangentialpol H_{24} liegen muss.

Nimmt man nun H_{24} auf h_{24} beliebig an, so irt H_{13} bestimmt. Denn, zieht man $H_{24}H_{23}$, ferner

$$H_{34}A^2_{34} \perp O_{234}, \quad H_{34}A^1_{34} \perp O_{134}, \quad A^1_{34}A^2_{34} \perp O_{12}O_{34},$$

so schneidet die Linie $A^1_{34}H_{41}$ die Linie h_{13} in H_{13}. Ebenso wurde in Figur 6 zu H'_{24} der zugehörige Tangentialpol H'_{13} construirt. Die entsprechenden Punkte H_{24} und H_{13} durchlaufen auf ihren Trägern projectivische Punktreihen.

Dem Punkte H''_{24} entspricht H''_{13}. In diesem besonderen Falle bilden die sechs Tangentialpole eine gewöhnliche Drehpol-Configuration, bei welcher an Stelle der Winkelgeschwindigkeiten ω um die Drehpole, die Winkelbeschleunigungen λ um die Tangentialpole treten.

Ausser den beiden soeben behandelten Fällen verdienen noch folgende zwei Erwähnung, da sie bei der Construction der Beschleunigungspole kinematischer Ketten zur Anwendung kommen:

c) Gegeben seien ausser der Configuration der Drehpole die Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{31}$ (Poldreiung) und drei Gerade $h_{14}h_{24}h_{34}$, in denen die drei übrigen Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}$ liegen. Man suche dieselben.

Zunächst ermittle man wie in a) die drei in einer Geraden a^4 liegenden Punkte $A^4_{12}A^4_{23}A^4_{31}$. Sodann bleibt nur die Aufgabe zu lösen (Fig. 7): durch diese drei Punkte drei Gerade zu ziehen, die sich paarweise auf den drei gegebenen Geraden h schneiden.

Die von A^4_{13} ausgehenden Strahlen schneiden h_{14} und h_{34} in perspectivisch liegenden Punktreihen, die, von A^4_{12} und A^4_{23} projicirt, auf der Geraden h_{24} zwei conjectivische Punktreihen erzeugen. Die beiden Doppelpunkte dieser Punktreihen müssen der gestellten Aufgabe genügen. Nun ist aber der Schnittpunkt D von h_{34} mit a^4 bereits einer dieser Doppelpunkte. Um den anderen zu finden, benöthigt man die den unendlich

fernen Punkten der conjectivischen Punktreihen entsprechenden Gegenpunkte G' und G, welche durch die Linienzüge $A^4_{12}\,1\,3\,G'$, $A^4_{23}\,III\,I\,G$ gewonnen werden; hierbei ist

$$A^4_{12}\,1 \parallel A^4_{23}\,III \parallel h_{24}.$$

Macht man noch $DG = G'H_{24}$, so ist in H_{24} der zweite Doppelpunkt und einer der gesuchten Tangentialpole gefunden; die beiden anderen $H_{14}H_{34}$ werden jetzt im Schnitte von $H_{24}A^4_{12}$ und $H_{24}A^4_{23}$ mit h_{14} bezw. h_{34} gewonnen.

d) Gegeben seien (Fig. 8) ausser der Configuration der Drehpole die Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}$ (welche keine Poldreiung bilden) und drei Gerade $h_{12}h_{23}h_{31}$, in denen die drei noch übrigen Tangentialpole $H_{12}H_{23}H_{31}$ liegen. Man suche dieselben.

Nimmt man auf h_{13} einen beliebigen Punkt h_{13} als Tangentialpol an, so ist aus ihm und den gegebenen Tangentialpolen nach a) eine Gerade bestimmt, welche die Gerade h_{12} im entsprechenden Punkte h_{12} schneidet. Aus den gegebenen Tangentialpolen und den einander entsprechenden Punkten $h_{12}h_{13}$ ist nun auch der sechste Tangentialpol h'_{23} vollständig bestimmt.

Beschreibt der Punkt h_{13} die Gerade h_{13}, so durchläuft h_{12} die Gerade h_{12} in projectivischer Punktreihe; ebenso beschreibt h'_{23} eine Gerade h'_{23} in projectivischer Punktreihe.

Um letztere zu bestimmen, beachte man Folgendes:

Wenn der Punkt h_{13} auf seine Geraden h_{13} nach m rückt, das ist in den Schnitt von h_{13} mit $H_{14}H_{34}$, so rückt der entsprechende Punkt h_{12} nach n, das ist in den Schnitt von h_{12} mit $H_{14}H_{24}$; denn es fallen dann die Theilungspunkte $A^3_{14}A^2_{14}$ mit H_{14} zusammen. Die sechs Tangentialpole bilden dann eine gewöhnliche Drehpol-Configuration [vergl. b) und Fig. 6] und es liegt der letzte der sechs Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}\,m\,n\,p$ im Schnitte von mn mit $H_{24}H_{34}$. p ist somit bereits ein Punkt der Geraden h'_{23}.

Um einen zweiten Punkt q zu erhalten, suche man jene einander entsprechenden Punkte $h_{13}h_{12}$, für welche die Winkelbeschleunigung λ_{14} verschwindet. Dann liegen die zugehörigen Theilungspunkte a^4_{13} und a^4_{12} in H_{34} bezw. H_{24}. Man zieht also $H_{34}h_{13} \perp O_{134}$ bis zum Schnitte mit h_{13}, sodann

$$h_{13}a^2_{13} \perp O_{123}, \quad a^4_{13}a^2_{13} \perp O_{13}O_{24},$$

damit ist a^2_{13} gewonnen; ferner ebenso $H_{24}h_{12} \perp O_{124}$ bis zum Schnitte mit h_{12}, sodann

$$h_{12}a^3_{12} \perp O_{123}, \quad a^4_{12}a^3_{12} \perp O_{12}O_{34},$$

damit ist a^3_{12} gewonnen; verbindet man nun a^2_{13} mit h_{12}, a^3_{12} mit h_{13}, so liefert der Schnitt q dieser Geraden einen zweiten Punkt von h'_{23}. Wo sich h_{23} und h'_{23} treffen, liegt der gesuchte Tangentialpol H_{23}.

Die beiden noch übrigen Tangentialpole $H_{12}H_{13}$ sind entweder direct wie H_{23} zu bestimmen, oder mit Hilfe des eben gefundenen Tangentialpoles H_{23} nach der unter a) angeführten Construction aus der Poldreiung $H_{23}H_{34}H_{42}$.

6. Untersucht man die gegenseitige Bewegung von mehr als vier, z. B. von n ebenen Systemen, so findet man auf ähnlichem Wege ausser einer Configuration von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Drehpolen O eine gleiche Anzahl Tangentialpole H und ausserdem $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Theilungspunkte A. Die Configuration dieser $\frac{1}{2}n(n-1)^2$ Punkte H und A besitzt naturgemäss dieselben Eigenschaften, wie sie in Artikel 4 für $n=4$ mitgetheilt wurden. Insbesondere seien folgende Eigenschaften der allgemeinen Configuration hervorgehoben:

a) Alle Theilungspunkte mit gleichem unteren Stellenzeiger bilden eine Gruppe von $n-2$ Punkten $A^r{}_{pq}$, welche um den Tangentialpol H_{pq} derart angeordnet sind, dass

$$H_{pq}A^r{}_{pq} \perp O_{pqr} \quad \text{und} \quad A^r{}_{pq}A^s{}_{pq} \perp O_{pq}O_{rs}$$

(vergl. in Figur 9 den Tangentialpol H_{24} mit seiner Gruppe von $6-2=4$ Theilungspunkten).

b) Alle Theilungspunkte mit gleichem oberen Stellenzeiger bilden eine gewöhnliche Drehpol-Configuration von $n-1$ Systemen.

Die Configuration der Punkte A zerfällt also in n verschiedene Drehpol-Configurationen zu je $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Polen.

Figur 9 stellt eine sechsgliedrige, zwangläufige kinematische Kette dar; dieselbe besitzt 15 Tangentialpole H und 60 Theilungspunkte A. Die Configuration der letzteren zerfällt in sechs Drehpol-Configurationen zu je zehn Polen; in Figur 9 sind die Configurationen A^5 und A^6 vollständig gezeichnet.

7. Geht man von der gegenseitigen Bewegung von n ebenen Systemen zu der einfacheren Bewegung einer aus n Gliedern bestehenden ebenen kinematischen Kette über, so wird die Untersuchung bedeutend erleichtert. In allen jenen Punkten nämlich, die man als Gelenke der Kette bezeichnet, und in welcher zwei Glieder p und q der Kette in dauernder Verbindung verharren, fallen die vier Punkte: Drehpol O_{pq}, Wendepol J_{pq}, Tangentialpol H_{pq}, und somit auch Beschleunigungspol G_{pq}, stets in einen und denselben Punkt zusammen. Solche ausgezeichnete Punkte sollen in der Folge stets nur mit den Ziffern pq bezeichnet werden.

Es sind somit die r gegebenen Gelenke ebenso viele gegebene Tangentialpole.

Bei einer zwangläufigen kinematischen Kette genügt die Annahme der Beschleunigung eines einzigen Punktes eines Gliedes p in Bezug auf ein fremdes Glied q, um die Beschleunigung jedes Punktes eines anderen Gliedes r in Bezug auf jedes fremde Glied s zu bestimmen. Da aber aus jener angenommenen Beschleunigung, dem Drehpol O_{pq} und dem Wende-

pol J_{pq} jener Glieder p und q, sowohl der Beschleunigungspol G_{pq} als auch der Tangentialpol H_{pq} construirt werden kann, so genügt offenbar (ausser den durch die Gelenke gegebenen Tangentialpolen) die Annahme eines einzigen Tangentialpoles, um sämmtliche übrigen zu bestimmen.

Die Annahme dieses einen Tangentialpoles darf nicht beliebig, sondern muss auf der betreffenden Poltangente erfolgen, welche durch die Lage des Drehpoles und des Wendepoles, also durch die geometrische Configuration der Kette, bestimmt ist. Auf dieser Tangente jedoch darf der Tangentialpol beliebig angenommen werden. Für jede angenommene Lage desselben giebt es entsprechende Lagen aller anderen Tangentialpole auf ihren Poltangenten. Nach den Untersuchungen des Artikel 5 kann der Satz ausgesprochen werden:

Alle einander entsprechenden Tangentialpole einer zwangläufigen kinematischen Kette liegen in projectivischen Punktreihen auf ihren Poltangenten.

Sollen zwei nicht durch Gelenke mit einander verbundene Glieder p und q der Kette keine Winkelbeschleunigung λ_{pq} gegeneinander besitzen, so muss H_{pq} unendlich fern sein; die übrigen Tangentialpole entsprechen in diesem Falle dem unendlich fernen Punkte der Poltangente t_{pq}.

8. Im Folgenden sollen Anwendungen der bisher beschriebenen Constructionen der Tangentialpole auf einige wichtigere kinematische Ketten gemacht werden.

Um für das einfache Kurbelviereck 12, 23, 34, 41 (Fig. 10) die zum Drehpol O_{13} gehörige Poltangente linear zu construiren, genügt es eine beliebige Gerade $mn \perp O_{13}O_{24}$ anzunehmen und

$$pn \perp 134, \quad pm \perp 123$$

zu ziehen; dann ist p ein Punkt der Poltangente t_{13}. In ähnlicher Weise kann die Poltangente t_{24} linear construirt werden.

Nimmt man nun auf t_{13} den Tangentialpol H_{13} beliebig an, so findet man den sechsten Tangentialpol H_{24} in folgender Weise:

Man verbindet H_{13} mit 12, zieht

$$23A^1_{23} \perp 123, \quad 23A^4_{23} \perp 234, \quad A^1_{23}A^4_{23} \perp 23,\ 41$$

und verbindet 34 mit A^4_{23}; der Schnitt dieser Geraden mit t_{24} ist der gesuchte Tangentialpol H_{24}.

Oder: Man verbindet H_{13} mit 34, zieht

$$41A^3_{41} \perp 134, \quad 41A^2_{41} \perp 124, \quad A^3_{41}A^2_{41} \perp 41,\ 23$$

und verbindet 12 mit A^2_{41}; der Schnitt dieser Geraden mit t_{24} ist ebenfalls H_{24}. Ebenso könnte H_{24} noch auf zwei andere Arten gefunden werden, wenn man statt 12 und 41 die übrigen zwei Gelenke 23 und 34 benützt.

Die Punktreihen $H_{13} H_{24}$ auf den Poltangenten $t_{13} t_{24}$ sind projectivisch; $O_{13} O_{24}$ sind entsprechende Punkte. Projicirt man beide Punktreihen von diesen Punkten aus, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, die den Strahl $O_{13} O_{24}$ entsprechend gemein haben; die Büschel schneiden sich also in einer Geraden.

Man kann zeigen, dass diese Schnittlinie s durch den Schnittpunkt S der Diagonalen 12, 34 und 23, 41 des Kurbelviereckes geht und auf der Linie $O_{13} O_{24}$ senkrecht steht. Denn, wenn man die Punktreihen $H_{13} H_{24}$ durch Parallelstrahlenbüschel $h_{13} h_{24}$ senkrecht zu $O_{13} O_{24}$ projicirt, so liegen diese in Involution, wie später gezeigt werden soll, und es entsprechen die durch O_{13} und O_{24} gehenden Strahlen $h^0_{13} h^0_{24}$ doppelt einander. Da ihr Schnitt der Geraden s angehören muss, so steht s zu $O_{13} O_{24}$ senkrecht.

Projicirt man die Punktreihen H_{13} und H_{24} auf t_{13} und t_{24} aus 12 und 34, so sind diese Büschel projectivisch; in den vier projectivischen Büscheln:

$$O_{13}(t_{24}), \quad 34(t_{24}), \quad 12(t_{13}), \quad O_{24}(t_{13})$$

entsprechen einander folgende Strahlen:

$$\begin{array}{llll} O_{13} O_{24}, & 34\, O_{24}, & 12\, O_{13}, & O_{24} O_{13}, \\ O_{13} 34, & 34\, O_{13}, & 12\, O_{24}, & O_{24} 12. \end{array}$$

Projicirt man ebenso die Punktreihen H_{13} und H_{24} auf t_{13} und t_{24} aus 23 und 41, so entsprechen in den vier projectivischen Büscheln

$$O_{13}(t_{24}), \quad 23(t_{24}), \quad 41(t_{13}), \quad O_{24}(t_{13})$$

einander folgende Strahlen:

$$O_{13} 23, \quad 23\, O_{13}, \quad 41\, O_{24}, \quad O_{24} 41.$$

Es entsprechen somit in den Büscheln $O_{13}(t_{24})$ und $O_{24}(t_{13})$ den Strahlen

die Strahlen:
$$\begin{array}{lll} O_{13} O_{24}, & O_{13} 34, & O_{13} 23 \\ O_{24} O_{13}, & O_{24} 12, & O_{24} 41. \end{array}$$

Somit entsprechen sich auch die Strahlen $O_{13} S$ und $O_{24} S$, da diese zu den früher genannten harmonisch liegen. Demnach ist auch S ein Punkt der Geraden s.

Diese Bemerkung liefert eine einfache Construction des Tangentialpoles H_{24} aus H_{13} (Fig. 11). Man verbinde H_{13} mit O_{24} bis zum Schnitte S_1 mit der Linie s, die im Schnitte S der Diagonalen des Kurbelviereckes senkrecht auf $O_{13} O_{24}$ errichtet wird; dann liefert $S_1 O_{13}$ im Schnitte mit t_{24} den Punkt H_{24}.

Sollen die Glieder 2 und 4 in dem betreffenden Augenblicke keine Winkelbeschleunigung λ_{24} gegen einander besitzen, so muss H_{24} im Unendlichen liegen; den zugehörigen Tangentialpol H^∞_{13} der Glieder 1 und 3 bekommt man, wenn man $O_{13} S_2 \,||\, t_{24}$ zieht und S_2 mit O_{24} verbindet; im Schnitte von $S_2 O_{24}$ mit t_{13} liegt H^∞_{13}.

Auf demselben Wege findet man H_{24}^{∞}, wenn die Glieder 1 und 3 keine relative Winkelbeschleunigung λ_{13} besitzen sollen. Die Punkte H_{13}^{∞} und H_{24}^{∞} liegen in einer Senkrechten auf $O_{13}O_{24}$, nämlich in dem Centralstrahl der oben erwähnten involutorischen Parallel-Strahlenbüschel $h_{13}h_{24}$.

Die Punkte $A^1{}_{24}A^2{}_{13}A^3{}_{24}A^4{}_{13}$ in Figur 10 haben für das Kurbelviereck besondere Bedeutung. Wir wollen sie in Figur 12 mit $B_1B_2B_3B_4$ bezeichnen; sie liegen auf jenen Gliedern, welche ihr Stellenzeiger angiebt. Diese Punkte B geben ein ausgezeichnetes Bild über die Vertheilung der gegenseitigen Winkelbeschleunigungen der Glieder des Kurbelviereckes. Sie besitzen, wie in Artikel 3 gezeigt wurde, die barycentrischen Ausdrücke:

$$\lambda_{42}\,.\,B_1 = \lambda_{41}\,.\,O_{41} + \lambda_{12}\,.\,O_{12},\quad \lambda_{13}\,.\,B_2 = \lambda_{12}\,.\,O_{12} + \lambda_{23}\,.\,O_{23},$$

$$\lambda_{24}\,.\,B_3 = \lambda_{23}\,.\,O_{23} + \lambda_{34}\,.\,O_{34},\quad \lambda_{31}\,.\,B_4 = \lambda_{34}\,.\,O_{34} + \lambda_{41}\,.\,O_{41}.$$

Ferner lassen sich leicht folgende Eigenschaften nachweisen:
Es ist jederzeit
$$B_1B_3 \parallel B_2B_4 \perp O_{13}O_{24}.$$

Die Verbindungslinien B_1B_2 und B_3B_4, sowie B_1B_4 und B_2B_3 schneiden sich auf den Diagonalen des Kurbelviereckes $O_{14}O_{23}$ bezw. $O_{12}O_{34}$; die Ausdrücke dieser Schnittpunkte T und R sind nämlich:

$$R \equiv \lambda_{12}O_{12} - \lambda_{34}O_{34} \equiv \lambda_{13}B_2 - \lambda_{24}\,.\,B_3 \equiv \lambda_{42}B_1 - \lambda_{31}\,.\,B_4,$$

$$T \equiv \lambda_{23}.O_{23} - \lambda_{41}.O_{41} \equiv \lambda_{24}.B_3 - \lambda_{31}.B_4 \equiv \lambda_{13}.B_2 - \lambda_{42}.B_1.$$

Hieraus und aus oben stehenden Ausdrücken ergeben sich für die zwischen den vier Gliedern vorhandenen sechs verschiedenen Winkelbeschleunigungen λ folgende 15 Verhältnisse:

$$O_{12}O_{23} : O_{23}B_2 : B_2O_{12} = \lambda_{31} : \lambda_{12} : \lambda_{23},$$

$$O_{23}O_{34} : O_{34}B_3 : B_3O_{23} = \lambda_{42} : \lambda_{23} : \lambda_{34},$$

$$O_{34}O_{41} : O_{41}B_4 : B_4O_{34} = \lambda_{13} : \lambda_{34} : \lambda_{41},$$

$$O_{41}O_{12} : O_{12}B_1 : B_1O_{41} = \lambda_{24} : \lambda_{41} : \lambda_{12},$$

$$O_{12}R : RO_{34} = \lambda_{34} : -\lambda_{12},$$

$$O_{23}T : TO_{41} = \lambda_{41} : -\lambda_{23},$$

$$B_1B_3 : B_2B_4 = \lambda_{13} : \lambda_{24}.$$

Die Geraden B_1B_3 und B_2B_4 für alle möglichen Beschleunigungszustände des Kurbelviereckes bilden zwei involutorische Parallel-Strahlenbüschel b_{13} und b_{24}; denn für

$$\lambda_{23} = 0 \text{ fällt } B_2 \text{ nach } O_{12},\; B_3 \text{ nach } O_{34},$$

$$\lambda_{14} = 0 \;\;\text{„}\;\; B_1 \;\;\text{„}\;\; O_{12},\; B_4 \;\;\text{„}\;\; O_{34};$$

die Geraden b' der beiden Büschel entsprechen also einander doppelt. Ebenso entsprechen sich jene Strahlen doppelt, welche durch O_{23} und O_{41}, sowie durch O_{24} und O_{13} gehen.

Die Parallelstrahlenbüschel b_{13} und b_{24} stehen mit den Parallelstrahlenbüscheln h_{13} und h_{24}, welche früher erwähnt wurden, in der Beziehung, dass b_{13} ähnlich mit h_{13}, b_{24} ähnlich mit h_{24} ist (vergl. Fig. 10).

Die im Endlichen gelegenen Doppelstrahlen der ähnlichen Strahlenbüschel sind $b^0_{13} h^0_{13}$ bezw. $b^0_{24} h^0_{24}$. Schneidet man die vier Parallelstrahlenbüschel $h_{13} b_{13}$, $h_{24} b_{24}$ durch die Gerade $O_{13} O_{24}$ in vier Punktreihen und sind $P_{13} Q_{13}$, $P_{24} Q_{24}$ je zwei entsprechende Punkte derselben, so ist aus dem Dreiecke mnp:

$$O_{13} P_{13} : O_{13} Q_{13} = \cos(\alpha + \alpha_1) : \cos\alpha \cos\alpha_1$$

und analog

$$O_{24} P_{24} : O_{24} Q_{24} = \cos(\beta + \beta_1) : \cos\beta \cos\beta_1.$$

Wählt man P_{13} in O_{24}, P_{24} in O_{13} und setzt $O_{13} O_{24} = a$, so ist

$$O_{13} Q_{13} = a \cdot \frac{\cos\alpha \cos\alpha_1}{\cos(\alpha+\alpha_1)}, \quad O_{24} Q_{24} = a \cdot \frac{\cos\beta \cos\beta_1}{\cos(\beta+\beta_1)}.$$

Die Parallelstrahlenbüschel $b_{13} b_{24}$ schneiden die Gerade $O_{13} O_{24}$ in zwei involutorischen Punktreihen; sollen $Q_{13} Q_{24}$, $R_{13} R_{24}$ entsprechende Punktpaare dieser Involution sein, so muss die Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{O_{13} R_{13}}{O_{24} R_{13}} : \frac{O_{13} Q_{13}}{O_{24} Q_{13}} = \frac{O_{24} R_{24}}{O_{13} R_{24}} : \frac{O_{24} Q_{24}}{O_{13} Q_{24}}.$$

Wählt man $R_{13} R_{24}$ dort, wo die durch 12 und 34 gehenden Strahlen der involutorischen Strahlenbüschel $b_{13} b_{24}$ die Gerade $O_{13} O_{24}$ treffen, so ist

$$O_{13} R_{13} : R_{13} O_{24} = \operatorname{tang}\beta : \operatorname{tang}\alpha_1,$$

$$O_{24} R_{24} : R_{24} O_{13} = \operatorname{tang}\alpha : \operatorname{tang}\beta_1;$$

dazu kommt von oben:

$$O_{13} Q_{13} : O_{24} Q_{24} = \frac{\cos\alpha \cos\alpha_1}{\cos(\alpha+\alpha_1)} : \frac{\cos\beta \cos\beta_1}{\cos(\beta+\beta_1)}.$$

Diese drei Proportionen erfüllen aber die oben stehende Bedingung der Involution und es sind somit $Q_{13} Q_{24}$ doppelt entsprechende Punkte derselben. Damit ist aber bewiesen, dass $O_{13} O_{24}$ doppelt entsprechende Punkte der Punktreihen $P_{13} P_{24}$ sind, und dass die Parallelstrahlenbüschel $h_{13} h_{24}$ thatsächlich involutorisch sind.

9. In Figur 13 ist eine sechsgliedrige kinematische Kette dargestellt (Watt'scher Mechanismus nach Burmester). Es sollen die Tangentialpole derselben bestimmt werden, wenn einer derselben, z. B. H_{13}, gegeben ist.

Der Tangentialpol H_{24} wird aus dem Kurbelviereck 1 2 3 4 nach vorigem Artikel bestimmt.

Um H_{45} zu ermitteln, benütze man das Schema:

$$H_{24} H_{43} H_{32} \text{(Poldreiung)} H_{85} \ldots h_{45},$$

das heisst, nach Artikel 5a wird folgendermassen construirt:

Man verbinde H_{24} mit 23, errichte in 34 eine Senkrechte auf O_{234} bis zum Schnitte A^2_{34} mit jener Verbindungslinie, ziehe

$$34A^5_{34} \perp 345, \quad A^2_{34}A^5_{34} \perp 34O_{25},$$

dann ist $A^5_{34}35$ eine Linie h_{45}, in welcher H_{45} liegt.

Ferner liegt H_{45} auch in der Poltangente t_{45}; diese wird entweder auf bekannte Weise durch Winkelübertragung gewonnen oder oft zweckmässiger und linear durch Fällung dreier Senkrechten:

$$mn \perp O_{45}O_{36}, \quad mp \perp 345, \quad np \perp 456,$$

dann ist p ein Punkt der Poltangente t_{45}.

Kennt man H_{45} als Schnittpunkt der Linien h_{45} und t_{45}, so kann H_{36} aus dem Kurbelviereck 3456 nach der im vorigen Artikel beschriebenen Methode construirt werden (in Figur 13 nicht durchgeführt).

Um den Tangentialpol H_{15} zu ermitteln, benütze man das Schema:

$$\left.\begin{array}{l} H_{14}H_{43}H_{31}\,(\text{Poldreiung})\,H_{35}\,\ldots\,h_{15} \\ H_{12}H_{24}H_{41}\,(\text{Poldreiung})\,H_{45}\,\ldots\,h'_{15} \end{array}\right\} H_{15}.$$

Man ziehe also $H_{13}A^4_{13} \perp 134$ bis zum Schnitte mit 14, 34, ferner

$$H_{13}A^5_{13} \perp 135, \quad A^4_{13}A^5_{13} \perp O_{13}O_{45},$$

so ist $35A^5_{13}$ eine den Punkt H_{15} tragende Gerade h_{15}.

Endlich ziehe man $14A^2_{14} \perp 124$ bis zum Schnitte mit $12H_{24}$,

$$14A^5_{14} \perp 145, \quad A^2_{14}A^5_{14} \perp 14O_{25},$$

so ist $H_{45}A^5_{14}$ eine zweite durch H_{15} gehende Gerade h'_{15}. Im Schnitte von h_{15} und h'_{15} liegt H_{15}.

In ähnlicher Weise werden die noch übrigen Tangentialpole bestimmt.

Figur 14 stellt eine andere sechsgliedrige kinematische Kette (Stephenson-Mechanismus nach Burmester) dar. Von den Tangentialpolen sei H_{24} auf der Poltangente t_{24} gegeben. Um hieraus irgend einen anderen Tangentialpol zu construiren, bediene man sich der in Artikel 5a) und b) mitgetheilten Constructionen. Z. B. zur Bestimmung des Tangentialpoles H_{45} benütze man das Schema:

$$\left.\begin{array}{l} H_{12}H_{24}H_{41}\,(\text{Poldreiung})\,H_{25}\,\ldots\,h_{45} \\ H_{24}H_{46}H_{65}H_{52}\,(\text{Polvierung})\,\ldots\,h'_{45} \end{array}\right\} H_{45}.$$

Man zieht also $H_{24}A^1_{24} \perp 124$ bis zum Schnitte mit 12, 14, sodann

$$H_{24}A^5_{24} \perp 245, \quad A^1_{24}A^5_{24} \perp O_{24}O_{15};$$

dann ist $25A^5_{24}$ eine Gerade h_{45} [Construction a)].

Ferner ziehe man

$$ab \perp O_{45}O_{26}, \quad ac \perp 245, \quad bc \perp 456,$$

dann ist die Verbindungslinie von c mit dem Schnitte d der Geraden 56, 46 und $25H_{24}$ eine Gerade h'_{45}. Im Schnitte von h_{45} und h'_{45} liegt der gesuchte Tangentialpol H_{45}.

In analoger Weise werden die übrigen Tangentialpole bestimmt.

Für die meisten kinematischen Ketten werden die oben erwähnten Constructionen a) und b) zur Bestimmung der Tangentialpole ausreichen. Eine interessante Ausnahme behandelt der folgende Artikel.

10. Um die Tangentialpole der in Figur 15 und 16 dargestellten achtgliedrigen kinematischen Kette (Dreispannmechanismus nach Burmester, Interferenzkurbelkette nach Rittershaus) zu bestimmen, wenn z. B. der Tangentialpol H_{13} gegeben (und somit nach Artikel 8 auch H_{23} bekannt) ist, schlage man folgenden Weg ein.

Zunächst ermittle man nach Artikel 5a aus den Tangentialpolen:

$$H_{12}H_{23}H_{31} \text{ (Poldreiung) } H_{15} \text{ die Geraden } h_{25}h_{35},$$

$$H_{12}H_{23}H_{31} \quad \text{"} \quad H_{26} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad h_{36}h_{16},$$

$$H_{12}H_{23}H_{31} \quad \text{"} \quad H_{37} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad h_{17}h_{27},$$

worin, wie bisher, h_{mn} eine Gerade bedeutet, in welcher der Tangentialpol H_{mn} liegen muss.

Nimmt man nun auf der Geraden h_{16} einen beliebigen Punkt h_{16} als Tangentialpol an, so lässt sich der zugehörige Tangentialpol h_{14} in folgender Weise bestimmen. Es ergiebt sich nach Artikel 5a) aus

$$h_{16}H_{62}H_{21} \text{ (Poldreiung) } H_{46} \text{ eine Gerade } a^4_{16}, \; 46$$

und nach Artikel 5b) aus

$$h_{16}H_{64}H_{45}H_{51} \text{ (Polvierung) eine Gerade } c, \; s;$$

der Schnitt beider ist h_{14}. Durchläuft h_{16} alle Punkte der Geraden h_{16}, so beschreibt h_{14} ebenfalls eine Gerade h_{14}, welche durch den Schnittpunkt d der Geraden 15, 54 und 26, 64 gehen muss; denn, fällt h_{16} mit 26 zusammen, so fällt a^4_{16} nach 26 und s nach d. Es ist also dh_{14} eine Gerade, auf welcher der Tangentialpol H_{14} liegen muss.

In analoger Weise kann man aus

$$\left.\begin{array}{l} h_{27}H_{73}H_{32} \text{ (Poldreiung) } H_{47} \\ h_{27}H_{74}H_{46}H_{62} \text{ (Polvierung)} \end{array}\right\} \text{ eine Gerade } h_{24}$$

und aus

$$\left.\begin{array}{l} h_{36}H_{62}H_{23} \text{ (Poldreiung) } H_{46} \\ h_{36}H_{64}H_{47}H_{73} \text{ (Polvierung)} \end{array}\right\} \text{ eine Gerade } h_{34}$$

bestimmen, auf welcher die Tangentialpole H_{24} bezw. H_{34} liegen. Hierbei geht h_{24} durch den Schnitt e der Geraden 26, 64 und 37, 74, h_{34} durch den Schnitt f der Geraden 37, 74 und 15, 54. Aus den drei Geraden $h_{14}h_{24}h_{34}$ und den gegebenen Tangentialpolen 12, 23, H_{13} kann man nun nach der in Artikel 5c) mitgetheilten einfachen Construction mit Hilfe der auf einer Geraden a^4 liegenden Punkte $A^4_{12}A^4_{23}A^4_{31}$ die Tangentialpole $H_{14}H_{24}H_{34}$ finden.

Uebrigens kann jeder dieser Punkte auch für sich ermittelt werden. Um z. B. H_{14} zu finden, suche man die Gerade h_{14}, wie oben, sodann in gleicher Weise aus

$$\left.\begin{matrix} h_{25} H_{51} H_{12} H_{45} \\ h_{25} H_{54} H_{46} H_{62} \end{matrix}\right\} \text{eine Gerade } h'_{14};$$

im Schnitte von h_{14} und h'_{14} liegt H_{14}. Hierbei ist h_{25} ein beliebiger Punkt der Geraden h_{25}.

Um die Tangentialpole $H_{56} H_{67} H_{75}$ zu ermitteln, suche man zunächst drei durch sie gehende Gerade $h_{56} h_{67} h_{75}$ (Fig. 16). Jede von ihnen, z. B. h_{56}, wird nach derselben Methode zu bestimmen sein, wie früher h_{14}. Man nehme auf der Geraden h_{16} einen beliebigen Punkt h_{16} als Tangentialpol an, bestimme nach Artikel 5a) aus

$$h_{16} H_{62} H_{21} \text{ (Poldreiung) } H_{51} \text{ eine Gerade } a^5_{16}, 15$$

und nach Artikel 5b) aus

$$h_{16} H_{64} H_{45} H_{51} \text{ (Polvierung) eine Gerade } c, s.$$

Der Schnitt beider Geraden liefert den zu h_{16} gehörigen Tangentialpol h_{56}. Durchläuft h_{16} alle Punkte der Geraden h_{16}, so beschreibt h_{56} ebenfalls eine Gerade h_{56}, welche durch den Schnitt d der Verbindungslinien 15, 26 und 45, 46 gehen muss; denn, fällt der Tangentialpol h_{16} nach 26, so liegt daselbst auch a^5_{16} und s fällt nach d. Es ist also dh_{56} die gesuchte Gerade h_{56}.

In anderer Weise könnte h_{56} nach dem Schema

$$\left.\begin{matrix} h_{25} H_{51} H_{12} H_{62} \\ h_{25} H_{54} H_{46} H_{62} \end{matrix}\right\} h_{56}$$

ermittelt werden. Analog finden wir die Gerade h_{67} aus

$$\left.\begin{matrix} h_{27} H_{73} H_{32} H_{62} \\ h_{27} H_{74} H_{46} H_{62} \end{matrix}\right\} h_{67},$$

oder aus

$$\left.\begin{matrix} h_{36} H_{62} H_{23} H_{73} \\ h_{36} H_{64} H_{47} H_{73} \end{matrix}\right\} h_{67}$$

und endlich die Gerade h_{75} aus

$$\left.\begin{matrix} h_{35} H_{51} H_{13} H_{73} \\ h_{35} H_{54} H_{47} H_{73} \end{matrix}\right\} h_{75},$$

oder aus

$$\left.\begin{matrix} h_{17} H_{73} H_{31} H_{51} \\ h_{17} H_{74} H_{45} H_{51} \end{matrix}\right\} h_{75}.$$

Die Geraden $h_{56} h_{67} h_{75}$ liefern nun im Vereine mit den drei gegebenen Tangentialpolen 45, 46, 47 nach der in Artikel 5d) beschriebenen Con-

struction die drei Tangentialpole $H_{56} H_{67} H_{75}$. Man könnte übrigens jeden derselben auch auf indirectem Wege finden.

So ist z. B. H_{56} nach dem Schema

$$\left.\begin{array}{l} H_{14} H_{45} H_{51} \text{ (Poldreiung) } H_{46} \\ H_{24} H_{46} H_{62} \text{ (Poldreiung) } H_{45} \end{array}\right\} H_{56}$$

vollständig bestimmt.

Die Bestimmung der noch übrigen Tangentialpole H_{25}, H_{35}, H_{36}, H_{16}, H_{17}, H_{27}, sowie $H_{48} H_{58} H_{68}$ unterliegt jetzt keinen Schwierigkeiten mehr; die Construction bietet nichts Neues. Für die sechs ersterwähnten Punkte sind überdies schon sechs Gerade $h_{25} h_{35}$ etc. bekannt, auf denen sie liegen.

11. Mit Hilfe der in Artikel 5 mitgetheilten und in den Artikeln 7—10 auf kinematische Ketten angewendeten Constructionen lässt sich nun, wie bereits angedeutet wurde, die Aufgabe lösen: Den Beschleunigungspol G_{pq} der relativen Bewegung irgend zweier Glieder p und q einer zwangläufigen kinematischen Kette zu finden, wenn der Beschleunigungspol G_{rs} irgend zweier anderen Glieder r und s gegeben ist (Gelenke ausgenommen).

Man bestimme nämlich den Drehpol O_{pq}, ferner den Wendepol J_{pq} und den Tangentialpol H_{pq} in der von mir angegebenen Weise; dann liegt der Beschleunigungspol G_{pq} im Fusspunkte der Senkrechten von O_{pq} auf $J_{pq} H_{pq}$.

Die Bestimmung der Punkte J_{pq} und H_{pq} kann völlig unabhängig von einander erfolgen, was für die Controle und Genauigkeit der Construction auch zu empfehlen sein wird; der Winkel $J_{pq} O_{pq} H_{pq}$ muss dann ein rechter sein.

Sollte die Ermittelung des Wendepoles J_{pq} umständlich sein, wie dies in wenigen Ausnahmefällen vielleicht eintrifft, so wird doch stets auf bequeme Weise eine Gerade i_{pq} anzugeben sein, auf welcher J_{pq} liegen muss; dann ist J_{pq} aus O_{pq} und H_{pq} leicht zu ermitteln.

Analoges gilt, wenn der Tangentialpol H_{pq} umständliche Constructionen erfordert, was wohl selten eintreten wird.

Meistens sind sowohl J_{pq} und H_{pq} bequem direct zu construiren.

Figur 17 zeigt eine sechsgliederige kinematische Kette, von welcher der Beschleunigungspol G_{13} der Glieder 1 und 3 gegeben ist; es wurden auf dem soeben beschriebenen Wege die Beschleunigungspole G_{24}, G_{45}, G_{51}, G_{26} ermittelt und eingezeichnet.

XVI.

Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche durch Punkte, Tangenten und Normalen bestimmt sind.

Von

Dr. A. Wiman,

Docent an der Universität in Lund.

---

1. In den folgenden Entwickelungen beabsichtige ich darzulegen, dass die Resultate, welche Steiner* bezüglich der obigen Aufgabe gegeben hat, nur zum Theil richtig sind. Doch sind die Steiner'schen Ergebnisse seither von Herrn Sporer** wieder abgeleitet.

Nach Sporer bestimmt man nun die Anzahl Kegelschnitte, welche zu a Punkten, b Tangenten und c Normalen, wo

$$a+b+c=5,$$

gehören, in der folgenden Weise. Man betrachte das System Kegelschnitte, welche durch a Punkte, b Tangenten und nur $c-1$ Normalen bestimmt sind. Es sei schon bekannt, dass durch jeden Punkt α Kegelschnitte dieses Systems gehen, und dass jede Gerade von β Kegelschnitten berührt wird. Dann ergiebt sich unmittelbar der Satz, dass, wenn der Berührungspunkt einer Tangente T eines Kegelschnittes des Systems auf einer festen Geraden G liegt, so ist die Enveloppe der Tangente T eine Curve von der Klasse $\alpha+\beta$ mit G als β-facher Tangente. Hieraus wird nun die Folgerung gezogen, dass $\alpha+\beta$ Kegelschnitte des durch a Punkte, b Tangenten und $c-1$ Normalen bestimmten Systems eine neue Normale G besitzen. Die Erledigung der Fälle mit c Normalen wird somit auf diejenigen mit $c-1$ Normalen zurückgeführt, und man braucht von vornherein das Problem nur für den Fall, wo keine bestimmende Normalen auftreten, gelöst zu haben.

Hinsichtlich dieser Methode bemerke ich, dass die uneigentlichen Lösungen mit Vorsicht ausgeschieden werden sollen. Herr Sporer scheint aber nicht bemerkt zu haben, dass in den Fällen, wo drei oder mehr bestimmende Normalen gegeben sind, immer uneigentliche Lösungen auf-

---

* Gesammelte Werke Bd. 2 S. 683.

** Diese Zeitschrift 1890 35. Jahrgang S. 237.

treten. Als Beispiel nehme ich den durch zwei Punkte und drei Normalen bestimmten Fall. Es ist einleuchtend, dass man hier die uneigentliche Lösung von der Verbindungsgeraden der beiden Punkte und der unendlich fernen Geraden erhält. Ferner enthält das System Kegelschnitte, welches durch einen Punkt und drei Normalen bestimmt ist, ∞^1 uneigentliche Lösungen, welche aus der unendlich fernen Geraden und je einer Geraden durch den gegebenen Punkt bestehen; diese Lösungen gelten aber auch noch, falls eine vierte bestimmende Normale hinzukommt. Ebenso finden wir, dass ∞^2 uneigentliche Kegelschnitte fünf gegebene Geraden zu Normalen haben, nämlich diejenigen, welche aus der unendlich fernen Geraden und je einer beliebigen Geraden in der Ebene bestehen. Somit tritt die Eigenthümlichkeit ein, dass Steiner für die Fälle mit vier oder fünf Normalen ausser den eigentlichen Lösungen auch eine gewisse Anzahl uneigentliche mitgenommen hat, da es doch deren unendlich viele giebt.

Die besprochene Methode kann indessen leicht dahin modificirt werden, dass ihre Giltigkeit in allen Fällen beibehalten wird. Von den α Kegelschnitten eines Systems, welche durch einen unendlich fernen Punkt gehen, mögen γ in der obigen Weise nothwendig zerfallen, so dass nur $\alpha - \gamma$ eigentlich sind. Die Enveloppe von der Klasse $\alpha + \beta$ der Tangenten der Systemkegelschnitte, welche auf einer festen Geraden G berühren, hat somit die unendlich ferne Gerade als γ-fache Tangente, und man ersieht leicht, dass im Allgemeinen die bezügliche Enveloppe von der unendlich fernen Geraden weder in G noch in dem in Bezug auf die imaginären Kreispunkte conjugirten Punkt berührt wird. Durch den letzterwähnten Punkt gehen somit

$$\alpha + \beta - \gamma$$

andere Tangenten, welche also eben so vielen eigentlichen Kegelschnitten angehören, welche die Gerade G senkrecht durchschneiden.

2. Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch fünf Punkte, vier Punkte und eine Tangente, drei Punkte und zwei Tangenten, zwei Punkte und drei Tangenten, einen Punkt und vier Tangenten, fünf Tangenten bestimmt sind, werden bekanntlich durch die bezüglichen Zahlen 1, 2, 4, 4, 2, 1 angegeben. Dabei können höchst zwei der bestimmenden Punkte unendlich entfernt liegen. Man erhält so unmittelbar die Anzahl Kegelschnitte, welche eine Gerade senkrecht durchschneiden, wenn sie übrigens durch vier Punkte, drei Punkte und eine Tangente, zwei Punkte und zwei Tangenten, einen Punkt und drei Tangenten, vier Tangenten bestimmt sind, nämlich 3, 6, 8, 6, 3, wobei ein bestimmender Punkt in unendlicher Entfernung liegen darf. Weiter finden wir für zwei Normalen und drei Punkte, zwei Punkte und eine Tangente, einen Punkt und zwei Tangenten, drei Tangenten die zugehörigen Zahlen 9, 14, 14, 9.

Um die Anzahl Kegelschnitte, welche durch zwei Punkte P_1, P_2 gehen und drei Gerade N_1, N_2, N_3 zu Normalen haben, zu finden, gehen wir zu den vier Zahlen zurück, welche aussagen, wie viele Kegelschnitte durch P_1, P_2 und die unendlich fernen Punkte N_1^∞, N_2^∞, N_3^∞ gehen, bez. durch P_1, P_2, N_1^∞, N_2^∞ gehen und N_3 berühren, bez. durch P_1, P_2, N_1^∞ gehen und N_2, N_3 berühren, bez. durch P_1, P_2 gehen und N_1, N_2, N_3 berühren. Wir erhalten für die eigentlichen Lösungen die Zahlen 0, 2, 4, 4. Dann suchen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche N_3 senkrecht durchschneiden, durch P_1, P_2 gehen und entweder durch N_1^∞, N_2^∞ gehen, oder durch N_1^∞ gehen und N_2 berühren, oder endlich N_1 und N_2 berühren; wir finden 2, 6, 8. Nun bestimmen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche N_2 und N_3 zu Normalen haben, durch P_1 und P_2 gehen und entweder durch N_1^∞ gehen oder N_1 berühren, und zwar erhalten wir 8, 14. Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch P_1, P_2 gehen und N_1, N_2, N_3 zu Normalen haben, ist somit

$$8 + 14 = 22.$$

Das Bildungsgesetz ist evident:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 2 & & 4 & & 4 \\ & 2 & & 6 & & 8 & \\ & & 8 & & 14 & & \\ & & & 22. & & & \end{array}$$

Um die Anzahl Kegelschnitte zu bestimmen, welche durch einen Punkt P_1 gehen, eine Gerade T_1 berühren und drei Normalen N_1, N_2, N_3 besitzen, suchen wir in derselben Weise zuerst die Anzahl Kegelschnitte, welche durch P_1 gehen, T_1 berühren und sich zu N_1, N_2, N_3 wie im vorhergehenden Falle verhalten; wir erkennen als Ausgangszahlen 0, 4, 4, 2 und bilden hieraus in gewohnter Weise:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 4 & & 4 & & 2 \\ & 4 & & 8 & & 6 & \\ & & 12 & & 14 & & \\ & & & 26. & & & \end{array}$$

26 Kegelschnitte besitzen somit die verlangte Eigenschaft.

Nun suchen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche zwei Gerade berühren und drei Gerade zu Normalen haben. Wir gehen wie in den vorhergehenden Fällen zu den vier Ausgangszahlen 0, 4, 2, 1 zurück und bilden daraus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & 4 & & 6 & & 3 & \\ & & 10 & & 9 & & \\ & & & 19. & & & \end{array}$$

Die Zahl der Lösungen ist somit 19.

Es stellt sich so die Frage auf, wie viele Kegelschnitte durch einen Punkt P_1 gehen und vier Gerade N_1, N_2, N_3, N_4 zu Normalen haben. Hier müssen wir fünf Ausgangszahlen suchen, wo die N_i und ihre unendlich fernen Punkte die analoge Rolle wie in den schon erörterten Fällen spielen. Wir erhalten leicht für diese Zahlen 0, 0, 4, 4, 2 und bilden daraus:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 0 & & 4 & & 4 & & 2 \\ & 0 & & 4 & & 8 & & 6 & \\ & & 4 & & 12 & & 14 & & \\ & & & 16 & & 26 & & & \\ & & & & 42. & & & & \end{array}$$

Also ist die gesuchte Anzahl 42.

Ebenso bestimmen wir die Anzahl Kegelschnitte, welche eine Gerade T_1 berühren und vier Gerade N_1, N_2, N_3, N_4 zu Normalen haben. Diese Zahl ist 33 und wird in der folgenden Weise gebildet:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 0 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & 0 & & 4 & & 6 & & 3 & \\ & & 4 & & 10 & & 9 & & \\ & & & 14 & & 19 & & & \\ & & & & 33. & & & & \end{array}$$

Es erübrigt noch die Anzahl Kegelschnitte zu bestimmen, welche fünf gegebene Gerade N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 zu Normalen haben. Aus den sechs Zahlen 0, 0, 0, 4, 2, 1 erhalten wir:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 4 & & 2 & & 1 \\ & 0 & & 0 & & 4 & & 6 & & 3 & \\ & & 0 & & 4 & & 10 & & 9 & & \\ & & & 4 & & 14 & & 19 & & & \\ & & & & 18 & & 33 & & & & \\ & & & & & 51. & & & & & \end{array}$$

Zu fünf gegebenen Normalen hat man somit 51 Kegelschnitte.

Für die Lösungen in den hier erörterten Fällen mit 3, 4, 5 Normalen hatte Steiner die Zahlen

$$23, \quad 28, \quad 23, \quad 51, \quad 51, \quad 102$$

gegeben.

Bezeichnen wir die Anzahl endlicher Punkte mit P, unendlicher Punkte mit P^{∞}, Tangenten mit T und Normalen mit N, so ergiebt sich uns für die durch die bezüglichen Bedingungen bestimmten Kegelschnitte die Anzahl L der Lösungen durch folgendes Schema:

Nr.	P	P^{∞}	T	N	L	Nr.	P	P^{∞}	T	N	L
1	4	.	.	1	3	15	1	.	2	2	14
2	2	2	.	1	2	16	.	1	2	2	10
3	3	.	1	1	6	17	.	.	3	2	9
4	1	2	1	1	4	18	2	.	.	3	22
5	2	.	2	1	8	19	1	1	.	3	16
6	.	2	2	1	4	20	.	2	.	3	4
7	1	.	3	1	6	21	1	.	1	3	26
8	.	.	4	1	3	22	.	1	1	3	14
9	3	.	.	2	9	23	.	.	2	3	19
10	2	1	.	2	8	24	1	.	.	4	42
11	1	2	.	2	4	25	.	1	.	4	18
12	2	.	1	2	14	26	.	.	1	4	33
13	1	1	1	2	12	27	.	.	.	5	51
14	.	2	1	2	4						

Doch kann in den Fällen 1, 3, 5, 7 ein gegebener Punkt P in unendlicher Entfernung liegen. Das Bildungsgesetz möchte ich noch einmal hervorheben:

Die Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und a_1 unendliche Punkte gehen, b Gerade berühren und c Gerade zu Normalen haben, wo

$$a + a_1 + b + c = 5,$$

ist gleich der Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und $a_1 + 1$ unendliche Punkte gehen, b Gerade berühren und $c - 1$ Gerade zu Normalen haben, zusammengenommen mit der Anzahl Kegelschnitte, welche durch a endliche und a_1 unendliche Punkte gehen, $b + 1$ Gerade berühren und $c - 1$ Gerade zu Normalen haben.

3. Das Kegelschnittsystem bestehe nun aus Parabeln, das heisst, die unendlich ferne Gerade sei gemeinsame Tangente. Das System sei von der Beschaffenheit, dass α Parabeln durch einen beliebigen Punkt P gehen und β eine beliebige Gerade G berühren. Es soll die Anzahl Parabeln bestimmt werden, welche die beliebige Gerade G senkrecht durchschneiden. Die Enveloppe einer Tangente eines Kegelschnitts des Systems, deren Berührungspunkt auf der Geraden G liegt, ist natürlich auch hier von der Klasse $\alpha + \beta$ mit G als β-facher Tangente.

Wir nehmen an, dass durch den unendlich fernen Punkt G^{∞} der Geraden G α_1 eigentliche Parabeln nebst einer Zahl zerfallender Kegelschnitte gehen. Von G^{∞} gehen an die erwähnte Enveloppe G als β-fache Tangente und die unendlich ferne Gerade als α-fache Tangente. Man ersieht aber leicht, dass die Enveloppe in G^{∞} in α_1 Zweigen berührt wird, entsprechend

den α_1 genannten Parabeln, so dass für einen anderen Punkt auf der unendlich fernen Geraden diese Gerade nur als $(\alpha - \alpha_1)$-fache Tangente auftritt und somit $\alpha_1 + \beta$ andere Tangenten der Enveloppe davon ausgehen. Die Zahl der Parabeln, welche die Gerade G zur Normalen haben, ist somit $\alpha_1 + \beta$ und auf dieselbe Weise zusammengesetzt, wie im Falle eines allgemeinen Kegelschnittsystemes.

Wir erhalten nun leicht in Bezug auf die Lösungen der Parabeln, welche durch Punkte P, Achsenrichtung P^∞, Tangenten T und Normalen N bestimmt sind, das folgende Schema:

Nr.	P	P^∞	T	N	L	Nr.	P	P^∞	T	N	L
1	3	.	.	1	5	9	1	1	.	2	2
2	2	1	.	1	2	10	1	.	1	2	6
3	2	.	1	1	6	11	.	1	1	2	1
4	1	1	1	1	2	12	.	.	2	2	3
5	1	.	2	1	4	13	1	.	.	3	8
6	.	1	2	1	1	14	.	1	.	3	1
7	.	.	3	1	2	15	.	.	1	3	4
8	2	.	.	2	8	16	.	.	.	4	5

Kleinere Mittheilungen.

XXIII. Zur Transformation eines Systemes linearer partieller Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir zur Abkürzung:

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

wo die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1 \ldots b_n$ Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so sei zur Integration das System von m-linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben:

$$A(z) = 0, \quad B(z) = 0, \ldots M(z) = 0.$$

Sind nun

$$1) \quad \begin{cases} \beta_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ \beta_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \beta_{n-1} = g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

die $n-1$ verschiedenen Lösungen der Gleichung $B(z) = 0$, so lassen sich die übrigen Differentialgleichungen durch Einführung der Grössen

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$$

als unabhängige Variable für die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ transformiren. Da die $n-1$ β-Lösungen von $B(z) = 0$ sind, so wird jede beliebige Function derselben eine Lösung von $B(z)$ sein, z. B. $\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1})$. Es besteht nun die Aufgabe, diejenige Function Φ zu finden, welche die Gleichungen

$$A(z) = 0, \quad C(z) = 0 \ldots M(z) = 0$$

zugleich befriedigt. Betrachten wir der Einfachheit wegen nur die erste Gleichung $A(z) = 0$, und führen wir darin die Function Φ ein, so geht dieselbe über in

$$a_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1} + a_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = 0.$$

Setzen wir
$$a_1 \frac{\partial \beta_i}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial \beta_i}{\partial x_n} = A(\beta_i),$$
so erhalten wir

$$2) \qquad A(\beta_1)\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + A(\beta_2)\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} + \cdots + A(\beta_{n-1})\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0.$$

Führt man in $A(\beta_1), \dots A(\beta_{n-1})$ für die $x_1, \dots x_{n-1}$ die Variabeln $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ vermittelst der Gleichungen 1) ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung mit den Variabeln $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}, x_n$. Unter besonderen Bedingungen fällt die Variable x_n bei dieser Transformation heraus. So fällt sie heraus, wenn $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$ ein Jacobi'sches System bilden, das heisst,
$$AB(z) - BA(z) = 0$$
eine Identität ist. Ferner fällt die Variable x_n heraus, wenn $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$ ein vollständiges System bilden, das heisst, wenn
$$AB(z) - BA(z) = 0$$
wird vermöge der Gleichungen $A(z) = 0$ und $B(z) = 0$. Es ist nun noch der Fall möglich, dass x_n, oder eine Function von x_n, als Factor in
$$A(\beta_1), A(\beta_2) \dots A(\beta_{n-1})$$
auftritt. Alsdann würde die Differentialgleichung 2) nach Division ihrer beiden Seiten durch x_n, oder die betreffende Function von x_n, ebenfalls von x_n frei sein, und man hätte dann eine Differentialgleichung mit $n-1$ Variabeln erhalten. Dieser Fall soll hier genau untersucht werden.

Ist β irgend eines aus der Reihe $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$, so ist
$$A(\beta) = a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = l(x_1, x_2 \dots x_n),$$
wenn wir für β die betreffende Function aus dem Systeme 1) einsetzen. Drücken wir jetzt die $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ vermittelst des Systems 1) als Functionen von $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, x_n$ aus, und setzen wir diese erhaltenen Functionen für $x_1 \dots x_{n-1}$ ein, so möge $l(x_1, x_2 \dots x_n)$ übergehen in
$$\psi(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}, x_n).$$

Diese Function ψ soll nun die Form haben:
$$g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}),$$
wo $g(x_n)$ eine bestimmte Function von x_n, und φ eine solche von $\beta_1, \dots \beta_{n-1}$ ist. Setzen wir in $g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1})$ für die β die betreffenden Functionen g des Systems 1), so wird die Gleichung
$$l(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n) = g(x_n)\varphi[g_1, g_2, \dots g_{n-1}]$$
eine Identität. Hierbei ist zu beachten, dass $g_1, g_2, \dots g_{n-1}$ Functionen von $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$ sind. Differentiiren wir diese Identität nach $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} = g(x_n)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_1}\right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_2} = g(x_n)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_2}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial l}{\partial x_{n-1}} = g(x_n)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right].$$

Multipliciren wir jetzt der Reihe nach die Gleichungen mit

$$\frac{\partial x_1}{\partial x^n},\quad \frac{\partial x_2}{\partial x_n},\ldots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$$

und addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial l}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} \\ &= g(x_n)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial g_1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial g_2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial g_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_n}\right].\end{aligned}\right.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist Null, da sämmtliche

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_n}$$

Null sind. Setzen wir nämlich in irgend einer Gleichung des Systemes 1), z. B. $\beta = g(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für die $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die aus 1) gewonnenen Ausdrücke ein, so wird $\beta = g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Identität. Es sollen nun $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, x_n$ unabhängige Variable sein, mithin muss, wenn wir nach x_n diese Identität differentiiren, die Gleichung bestehen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_n}.$$

Es ist also

$$3)\qquad \frac{\partial l}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Denken wir uns jetzt in $l(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für die $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ die betreffenden Functionen von $\beta_1, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}, x_n$ eingesetzt und alsdann nach x_n differentiirt, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial l}{\partial x_n} + \frac{\partial l}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial l}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}$$

wo $\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right)$ bedeutet, dass die $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ als Functionen von

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$$

und x_n angesehen werden sollen. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist bis auf das erste Glied Null, und dementsprechend ist:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial l}{\partial x_n},$$

das heisst, durch die Substitutionen der Functionen von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, x_n$ für $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ wird kein neues x_n eingeführt. Dieses Resultat lässt sich durch folgenden Satz ausdrücken:

„Substituirt man in dem Ausdrucke $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für die $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ die sich aus dem System

$$\beta_1 = g_1(x_1, \ldots x_n),$$
$$\beta_2 = g_2(x_1, \ldots x_n),$$
$$\beta_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \ldots x_n)$$

ergebenden Functionen von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, x_n$, so wird durch diese Substitution kein neues x_n eingeführt, das heisst, es ist

$$\left(\frac{\partial l}{\partial x_n}\right)=\frac{\partial l}{\partial x_n}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich Schlüsse über die Form von $l(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ziehen, wenn nach der Transformation dieser Ausdruck in ein Product zerfallen soll, dessen einer Factor eine Function von x_n und dessen anderer Factor eine Function von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ ist.

1. Ist $$l(x_1, \ldots x_n) = g(x_n)\psi(g_1, \quad g_2, \ldots g_{n-1}),$$
   wo die g die Functionen des Systemes 1) sind, so wird nach Substitution der betreffenden Ausdrücke für die $x_1, \ldots x_{n-1}$ der Ausdruck l übergehen in $g(x_n)\psi(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1})$. In diesem Falle braucht man für die g nur die betreffenden β zu setzen, um den transformirten Ausdruck zu erhalten.
2. Soll $l(x_1 \ldots x_n)$ in das betreffende Product zerfallen, so darf der andere Factor kein x_n enthalten. Es muss also l in der Form sich darstellen lassen:
   $$l(x_1, x_2, \ldots x_n) = g(x_n)\psi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}).$$
   Wenn wir nämlich für $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die betreffenden Functionen von $\beta_1, \ldots \beta_{n-1}, x_n$ einführen, so wird nach dem vorhergehenden Satz kein neues x_n eingeführt. Es wird dann $\psi(x_1, x_2 \ldots x_{n-1})$ übergehen in $\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1})$. Enthielte nun $\psi(x_1, \ldots x_{n-1})$ x_n explicit, so würde auch $\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1})$ dieses x_n explicit enthalten. Dies widerspricht unserer Annahme, also muss l schon vor der Transformation in das Product $g(x_n)\psi(x_1, \ldots x_{n-1})$ zerfallen, wo $\psi(x_1 \ldots x_{n-1})$ kein x_n explicit enthält.
3. Soll $l(x_1 \ldots x_n)$ nicht in ein Product zerfallen, und ist der erste Fall ausgeschlossen, so wird nach der Transformation kein x_n oder keine Function von x_n als Factor sich absondern lassen, da ja durch die Transformation kein neues x_n eingeführt wird.

Dieses Ergebniss lässt sich durch folgenden Satz wiedergeben:
„Ist der Ausdruck

$$A(\beta) = a_1 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = l(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

gegeben, wo die a Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind und wo

$$\beta = g(x_1, \ldots x_n)$$

eine Gleichung des Systemes

$$\beta_1 = g_1(x_1 \ldots x_n), \quad \beta_2 \cdot g_2(x_1 \ldots x_n), \ldots \beta_{n-1} \cdot g_{n-1}(x_1, \ldots x_n)$$

ist, sollen die $x_1 \ldots x_{n-1}$ durch Functionen von $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}, x_n$ ersetzt werden, welche sich aus dem gegebenen System ergeben, und soll $A(\beta)$ die Form

$$g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1})$$

annehmen, so ist dies nur möglich, wenn $l(x_1 \ldots x_n)$ schon die Form

$$g(x_n)\psi(x_1 \ldots x_{n-1})$$

besitzt, oder

$$l(x_1 \ldots x_n) = g(x_n)\varphi(g_1, g_2, \ldots g_{n-1})$$

ist, wo $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}$ die Functionen des gegebenen Systemes sind."

Aus der Form, in welcher $l(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sich darstellen lässt, ersehen wir, dass stets diejenige Variable x als unabhängige neben den $\beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ genommen werden muss, welche selbst oder deren Function als Factor in dem Ausdruck $l(x_1 \ldots x_n)$ auftritt. Ist nun

$$A(\beta_1) = g(x_n)\varphi_1(\beta_1 \ldots \beta_{n-1}),$$
$$A(\beta_2) = g(x_n)\varphi_2(\beta_1 \ldots \beta_{n-1}),$$
$$A(\beta_{n-1}) = g(x_n)\varphi_{n-1}(\beta_1 \ldots \beta_{n-1}),$$

so geht die Differentialgleichung 2) nach Division ihrer beiden Seiten durch $g(x_n)$ über in:

$$\varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} + \cdots + \varphi_{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0.$$

Es ist also die gegebene Differentialgleichung $A(z) = 0$ vermittelst der $n-1$ Lösungen der gegebenen Differentialgleichung $B(z) = 0$ übergeführt in eine Differentialgleichung mit $n-1$ unabhängigen Variablen, ohne dass beide Gleichungen ein Jacobi'sches oder ein vollständiges System bilden. Dafür tritt die Bedingung ein, dass die $n-1$ Ausdrücke $A(\beta)$ einen gemeinsamen Factor $g(x_n)$ haben. Das, was wir bei $A(z) = 0$ vorausgesetzt haben, können wir auch bei den übrigen $m-2$ Differentialgleichungen

$$C(z) = 0, \quad D(z) = 0, \ldots M(z) = 0$$

annehmen. Alsdann gelangen wir zu dem Satz:

„Ist ein System aus m-linearen partiellen Differentialgleichungen gegeben von der Form:

$$A(z) = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(z) = b_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + b_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M(z) = m_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + m_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

und sind die $n-1$ verschiedenen Lösungen von $B(z)=0$ bekannt, so lassen sich die übrigen Differentialgleichungen in solche mit $n-1$ Variabeln transformiren, ohne dass die Differentialgleichungen mit $B(z)=0$ die Jacobi'sche Bedingung erfüllen, sobald die

$$A(\beta_1)\ldots A(\beta_{n-1});\quad C(\beta_1)\ldots C(\beta_{n-1}),\ldots M(\beta_1),\ldots M(\beta_{n-1})$$

die Formen annehmen:

$$g_c(x_i)\,\varphi_{1,c}(\beta_1\ldots\beta_{n-1}),$$

$$g_c(x_i)\,\varphi_{2,c}(\beta_1,\ldots\beta_{n-1})\ldots g_c(x_i)\,\varphi_{n-1,c}(\beta_1\ldots\beta_{n-1})\ldots$$

$$g_m(x_k)\,\varphi_{1,m}(\beta_1\ldots\beta_{n-1})\ldots g_m(x_k)\,\varphi_{n-1,m}(\beta_1\ldots\beta_{n-1})."$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Functionen g für die Systeme

$$A,\ C,\ D,\ldots M$$

und deren Argumente verschieden sein können, wir werden stets folgendes System von Differentialgleichungen mit $n-1$ Variabeln erhalten:

$$3)\quad \begin{cases} A'(\Phi) = \varphi_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \cdots + \varphi_{n-1} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0, \\ C'(\Phi) = \varphi_{1,c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \cdots + \varphi_{n-1,c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M'(\Phi) = \varphi_{1,m} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} + \cdots + \varphi_{n-1,m} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_{n-1}} = 0. \end{cases}$$

Wollen wir mit diesem Systeme 3) dieselbe Transformation vornehmen, und soll das System kein Jacobi'sches oder vollständiges sein, so müssen

$$A'(\Phi),\quad g'(\Phi),\ldots M'(\Phi)$$

bestimmte Formen annehmen. Es seien die $n-2$ verschiedenen Lösungen von $C(\Phi)=0$ bekannt:

$$4)\quad \begin{cases} \beta'_1 = g'_1(\beta_1\ldots\beta_{n-1}), \\ \beta'_2 = g'_2(\beta_1\ldots\beta_{n-1}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta'_{n-1} = g'_{n-2}(\beta_1\ldots\beta_{n-1}). \end{cases}$$

Es lassen sich aus diesem Systeme $n-2$ β als Functionen der

$$\beta'_1\ldots\beta'_{n-2}\quad\text{und}\quad \beta_{n-1}$$

ausdrücken. Alsdann geht $A'(\Phi)$ über in:

$$A'(\beta'_1)\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_1}+A'(\beta'_2)\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_2}+\cdots+A'(\beta'_{n-2})\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_{n-2}}=0,$$

wo die $A'(\beta')$ Functionen von

$$\beta'_1,\ \beta'_2\ldots\beta'_{n-2},\ \beta_{n-1}$$

sind. Soll nun die Differentialgleichung nur $n-2$ Variable enthalten, und soll die Jacobi'sche Bedingung nicht erfüllt werden, so muss β_{n-1}, oder eine Function von β_{n-1} in jedem $A'(\beta')$ als Factor auftreten, das heisst, es muss $A'(\beta')$ von der Form

$$g'(\beta_{n-1})\varphi'(\beta'_1\ldots\beta'_{n-2})$$

sein. Hierdurch geht die Differentialgleichung über in:

$$\varphi'_1\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_1}+\varphi'_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_2}+\cdots+\varphi'_{n-2}\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_{n-2}}=0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass $A'(\beta')$ proportional $A(\beta')$ ist. Nach unserer Annahme ist nämlich:

$$a_1\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial\beta_1}{\partial x_n}=g(x_n)\varphi_1(\beta_1,\ldots\beta_{n-1}),$$

$$a_1\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\beta_2}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial\beta_2}{\partial x_n}=g(x_n)\varphi_2(\beta_1,\ldots\beta_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_n}=g(x_n)\varphi_{n-1}(\beta_1,\ldots\beta_{n-1}).$$

Multipliciren wir jetzt der Reihe nach die Gleichungen mit

$$\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_1},\quad\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_2},\ldots\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_{n-1}}$$

und addiren sie, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}a_1\left\{\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_{n-1}}\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_1}\right\}+\cdots\\+a_{n-1}\left\{\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_{n-1}}+\cdots+\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_{n-1}}\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right\}+\cdots\\+a_n\left\{\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_{n-1}}\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_n}\right\}\\=g(x_n)\left\{\varphi_1\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_1}+\varphi_2\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_2}+\cdots\varphi_{n-1}\frac{\partial\beta'_1}{\partial\beta_{n-1}}\right\}.\end{aligned}$$

Die Ausdrücke innerhalb der Klammern auf der linken Seite sind die partiellen Differentialquotienten der β' nach x, wenn wir uns die β' als Functionen von $x_1, x_2,\ldots x_n$ ausgedrückt denken. Gemäss unserer Bezeichnungsweise wird dann die linke Seite $A(\beta'_1)$. Der Ausdruck innerhalb der Klammer auf der rechten Seite ist nach unserer Bezeichnungsweise $A'(\beta'_1)$.

Wir haben also erhalten:

$$A(\beta'_1) = g(x_n)A'(\beta'_1).$$

Dasselbe lässt sich auch für die anderen β' nachweisen, so dass allgemein

$$A(\beta') = g(x_n)A'(\beta')$$

ist. Diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn auf der rechten Seite für die β die Functionen von $x_1 \dots x_n$ aus dem Systeme 1) eingeführt werden. Soll jetzt $A'(\beta')$ in das Product zerfallen

$$g'(\beta_{n-1})\varphi'(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}),$$

so wird

$$A(\beta') = g(x_n)g'(\beta_{n-1})\varphi'(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}).$$

Führen wir für die $\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2}$ die $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ vermittelst des Systemes 4) ein, so wird in Folge des vorhin bewiesenen Satzes

$$A(\beta') = g(x_n)g'(\beta_{n-1})\psi'(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-2}).$$

Diese Gleichung wird zu einer Identität, wenn rechts die $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$ durch die Functionen von $x_1 \dots x_n$ ersetzt werden. Damit die angesagte Transformation möglich ist, müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
A(\beta'_1) &= g(x_n)g'(g_{n-1})\varphi'_1(\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
A(\beta'_{n-2}) &= g(x_n)g'(g_{n-1})\varphi'_{n-2}(\beta'_1, \beta'_2 \dots \beta'_{n-2}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
D(\beta'_1) &= g_d(x_n)g'_d(g_{n-1})\varphi'_{1,d}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
D(\beta'_{n-2}) &= g_d(x_n)g'_d(g_{n-1})\varphi'_{n-2,d}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
M(\beta'_n) &= g_m(x_n)g'_m(g_{n-1})\varphi'_{1,m}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
M(\beta'_{n-2}) &= g_m(x_n)g'_m(g_{n-1})\varphi'_{n-2,m}(\beta'_1 \dots \beta'_{n-2}),
\end{aligned}$$

wo g_{n-1} die betreffende Function des Systemes ist.

Man kann nun die Transformation des Systemes mit $m-2$ Gleichungen weiter führen, wenn man die $n-3$ verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$D(\beta'_1) = \frac{\partial\psi}{\partial\beta'_1} + D(\beta'_2)\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_2} + \dots + D(\beta'_{n-2})\frac{\partial\psi}{\partial\beta'_{n-2}} = 0$$

zu Hilfe nimmt. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die bei den

$$A(\beta'), \; C(\beta'), \; D(\beta') \dots$$

auftretenden Factoren bei den späteren $A(\beta^{(k)})$ sich stets wiederholen.

Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob es solche Coefficienten a giebt, dass $A(\beta)$ die verlangte Form

$$g(x_n)\varphi(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1})$$

annimmt. Es lassen sich stets $n-1$ a so bestimmen, dass die $A(\beta)$ die verlangte Form erhalten, man muss sich hierbei nur erinnern, dass die β

die $n-1$ verschiedenen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung sind, und mithin ihre Functional-Determinante niemals Null sein kann.

Die Methode, die Lösungen einer Differentialgleichung zur Transformation anderer zu benutzen, in der von uns angenommenen Form, finden wir schon bei Boole (Mansion: Partielle Differentialgleichungen). Boole setzt hier ein vollständiges System voraus, um eine Variable bei der Transformation herausfallen lassen zu können. Es geschieht dies durch die Jacobi'sche Bedingung:
$$AB(z)-BA(z)=0,$$
welche identisch erfüllt werden kann, oder vermöge der Gleichungen $A(z)=0$ und $B(z)$ befriedigt wird. Ist nun β eine Lösung von $B(z)=0$, so muss vermöge dieser Bedingung $A(\beta)$ auch eine Lösung von $B(z)=0$ sein. Es ist nämlich
$$A[B(\beta)]=B[A(\beta)],\quad B(\beta)=0,$$
also ist $B[A(\beta)]=0$, das heisst, $A(\beta)$ ist eine Lösung von $B(z)=0$. Diese Bedingung fällt bei der von uns beschriebenen Methode fort, und wird ersetzt durch die Bedingung, dass eine Variable oder eine Function von ihr bei der Transformation sich absondern lässt, so dass die $A(\beta)$ die Form
$$g(x_n)\varphi(\beta_1\ldots\beta_{n-1})$$
annehmen. Die Jacobi'sche Bedingung wird aber auch in unserem Fall erfüllt, das heisst, das System wird ein vollständiges, wenn $g(x_n)$ sich auf 1 oder auf eine Constante reducirt. Um dies zu zeigen, stellen wir uns die Aufgabe, $BA(\beta)$ zu berechnen, wenn
$$A(\beta)=g(x_n)\varphi(\beta_1,\ \beta_2\ldots\beta_{n-1})$$
ist. Es ist
$$\frac{\partial A(\beta)}{\partial x_1}=g(x_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_1};\ \ldots\ \frac{\partial A(\beta)}{\partial x_{n-1}}=g(x_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_{n-1}},$$
$$\frac{\partial A(\beta)}{\partial x_n}=g(x_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_n}+\varphi(\beta_1\ldots\beta_{n-1})\frac{\partial g}{\partial x_n}.$$

Bilden wir nun die Differentialgleichung $BA(\beta)=0$, so erhalten wir:
$$b_1g(x_n)\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_1}+b_2g(x_n)\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_2}+\cdots+b_ng(x_n)\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_n}$$
$$+b_n\varphi\frac{\partial g}{\partial x_n}=BA(\beta).$$

Ordnen wir jetzt auf andere Weise, so erhalten wir:
$$g(x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}\left\{b_1\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}+\cdots+b_n\frac{\partial\beta_1}{\partial x_n}\right\}+\cdots+g(x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_{n-1}}\left\{b_1\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_1}+\cdots+b_n\frac{\partial\beta_{n-1}}{\partial x_n}\right\}$$
$$+b_n\varphi\frac{\partial g}{\partial x_n}=BA(\beta).$$

Da die $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$ Lösungen von $B(z) = 0$ sind, so sind die Ausdrücke in den Klammern Null, und es wird

$$BA(\beta) = b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n}.$$

Soll jetzt die Jacobi'sche Bedingung erfüllt werden, also $A(\beta)$ eine Lösung von $B(z) = 0$ sein, so muss

$$b_n \varphi \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

sein. Dies ist nur möglich, wenn $\frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$ ist, was bedeutet, dass g eine Constante sein muss, denn g ist nur eine Function von x_n. In jedem anderen Falle tritt bei der Transformation x_n auf. Wir haben hier beiläufig bewiesen, dass, wenn in einem vollständigen Systeme linearer partieller Differentialgleichungen die verschiedenen Lösungen der einen von ihnen zur Transformation benutzt werden, das System auf ein solches mit $n-1$ Variabeln sich reducirt. Wir sind also zu folgendem wichtigen Resultat gelangt:

„Ist ein System von m-linearen partiellen Differentialgleichungen mit n-unabhängigen Variablen gegeben, deren zweites Glied Null ist, so lässt sich dieses System unter Benutzung der $n-1$ verschiedenen Lösung einer diesem System angehörenden Differentialgleichung in ein System von $m-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variabeln transformiren, ohne dass die Jacobi'sche Bedingung

$$AB(z) - AB(z) = 0$$

erfüllt wird, wenn bei der Transformation eine Variable oder eine Function von ihr als Factor heraustritt. Reducirt sich diese Function auf eine Constante, so ist das System ein vollständiges, und die Jacobi'sche Bedingung wird erfüllt."

Diese Transformation lässt sich auf das neu erhaltene System von $m-1$ Gleichungen anwenden. Es fällt die eine Variable heraus, sobald diese oder eine Function von ihr als Factor auftritt, oder wenn die Gleichungen ein vollständiges System bilden. Soll ein System von m-Gleichungen ein vollständiges sein, so sind $\frac{m(m-1)}{2}$ Bedingungen zu erfüllen. Erfüllen in dem gegebenen System von m-Gleichungen nur k-Gleichungen die $\frac{k(k-1)}{2}$ Bedingungen eines vollständigen Systemes, so bleiben

$$\frac{m(m-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$$

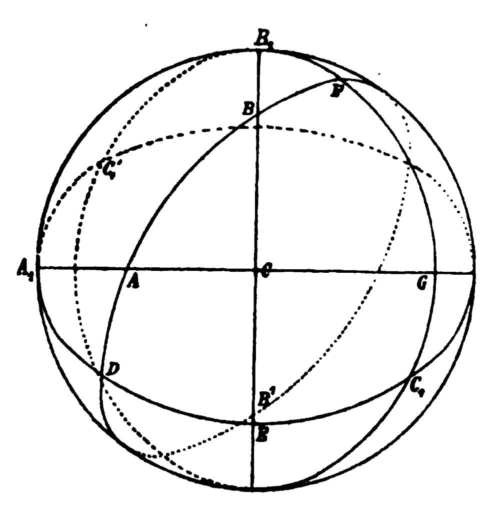
Bedingungen unerfüllt. Diese werden ersetzt durch die Bedingung des Absonderns. In diesem Falle hat das System der m partiellen Differentialgleichungen eine gemeinsame Lösung, obgleich es kein vollständiges ist, was nach Früherem nicht der Fall zu sein schien.

Stettin, Januar 1895. Dr. Ernst Schultz.

XXIV. Der dem Pythagorischen Lehrsatz entsprechende Satz der Sphärik.

Der Satz lautet:

„Verlängert man bei einem rechtwinkligen Kugeldreiecke, von dessen Seiten keine ein Quadrant oder grösser als ein Quadrant ist, die Seiten bis zum Durchschnitte mit den Seiten des reciproken Dreiecks, so entsteht über jeder Seite ein durch sie, die Verlängerungen der anstossenden und die ihr entsprechende Seite des reciproken Dreiecks gebildetes Viereck. Von diesen Vierecken ist dasjenige über der Hypotenuse der Summe derer über den Katheten gleich."



(Entsprechende Seiten zweier reciproker Dreiecke sind diejenigen, die zu derselben Höhenlinie gehören; bezeichnet man als Höhenlinien diejenigen Hauptkreise, die durch die Ecken eines Dreiecks senkrecht zu den gegenüber liegenden Seiten gezogen sind, so sind, wie leicht zu ersehen, die Höhenlinien eines Dreiecks gleichzeitig die seines reciproken.)

Beweis. Im Dreiecke ABC sei C ein Rechter, dann ist im reciproken Dreiecke, $A_1B_1C_1$, die Seite A_1B_1 ein Quadrant.

Durch Verlängerung der Seiten von ABC entsteht über AB das Viereck ABB_1A_1, über CB das Viereck $CBFG$, und über AC endlich das Viereck $ACED$.

C ist der Pol von A_1B_1, also ist A_1CB_1 ein Oktant, dessen Inhalt gleich ω, somit

$$1)\qquad A_1B_1BA + \Delta ABC = \omega.$$

Drücken wir die Winkel BAC und ABC nach Rechten aus, so dass

$$\sphericalangle BAC = \alpha\cdot\frac{\pi}{2},\quad \sphericalangle ABC = \beta\cdot\frac{\pi}{2} \text{ ist,}$$

so ist, weil A der Pol von FG, B der von DE,

$$\Delta FAG = \alpha.\omega,\ \text{d. h. } FBCG + \Delta ABC = \alpha.\omega;$$

$$\Delta DBE = \beta.\omega,\ \text{d. h. } DACE + \Delta ABC = \beta.\omega;\ \text{addirt:}$$

$$\text{a)}\qquad FBCG + DACE + 2\Delta ABC = (\alpha+\beta)\omega.$$

Nun ist der sphärische Excess des Dreiecks ABC gleich

$$(\alpha+\beta-1)\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ somit}$$

b) $$\Delta ABC = (\alpha+\beta-1)\omega$$

und durch Subtraction dieser Gleichung von a):

2) $$FBCG + DACE + \Delta ABC = \omega.$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$A_1B_1BA = FBCG + DACE.$$

Kreuznach. Dr. August Wilhelm Velten.

XXV. Die Schraubenflächen constanter mittlerer Krümmung.

Verleiht man jedem Punkt einer in der $[xz]$-Ebene gelegenen Curve $z = f(x)$ eine schraubenförmige Bewegung um die z-Achse, so ergeben sich die Coordinaten der so erzeugten Schraubenfläche in folgender Form als Functionen zweier Veränderlichen:

$$x = v\,.\cos u,\quad y = v\,.\sin u,\quad z = g\,.u + f(v).$$

Die Curven $v = constans$ geben die Schraubenlinien auf der Fläche, die Curven $u = constans$ sind Verticalschnitte; g ist die Constante der schraubenförmigen Bewegung, deren 2π-faches Multiplum die Ganghöhe derselben liefert.

Die mittlere Krümmung der Schraubenfläche ergiebt sich in folgender Gestalt:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\cdot\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2 f^1(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f^1(v)^2}}\right\}.^*$$

Wir fordern nun, dass die Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien in allen Punkten der Fläche gleich einer Constanten $-\frac{2}{a}$ sei.

Die erste Integration ergiebt unter Einführung der Constanten b:

$$\frac{v^2 f^1(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f^1(v)^2}} = \frac{v^2+ab}{a}.$$

---

* Enneper schreibt irrthümlicher Weise:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = v\cdot\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2 f^1(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f^1(v)^2}}\right\}.$$

Dieser Irrthum ist jedoch für das bei ihm Folgende belanglos; cf. Enneper: Analytisch-geometrische Untersuchungen in dieser Zeitschrift, Jahrg. 1864 S. 11.

Die linke Seite, also auch $f^1(v)$, wird gleich Null für den Werth $v^2 = -ab$; für diesen Werth von v^2 ist die Tangente der Curve $z = f(x)$ vertical gerichtet. Kann dies wirklich eintreten, so müssen a und b ungleiche Zeichen haben. Wir unterscheiden demnach zunächst die beiden Fälle:

$$1)\quad a > 0 > b; \qquad 2)\quad b > 0 > a.$$

Die Annahme 3) $b = 0$ veranlasst bedeutende Vereinfachung des Schlussergebnisses.

Setzen wir 4) $\frac{1}{a} = 0$, so erhalten wir die Minimalfläche unter den Schraubenflächen, für die bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0$$

charakteristisch ist.

Die Voraussetzung 5) $\frac{1}{a} = b = 0$ zieht nach sich:

$$f^1(v) = 0, \quad f(v) = const;$$

sie ergiebt also die Schraubenfläche mit Leitebene (à plan directeur), welche gebildet wird durch die Binormalen einer Schraubenlinie, welche sämmtlich die z-Achse rechtwinklig schneiden. Als Minimalfläche ist dieselbe seit Meusnier (Mém. sur la courb. des surf. 1776) bekannt.

6) Als letzten Fall werden wir den behandeln, dass die Constante g der Schraubenbewegung gleich Null gesetzt wird, wodurch wir zu den Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung gelangen.

1) Es sei $a > 0 > b$.

Die obige Gleichung ergiebt nach Anwendung der Substitution $v^2 = w$:

$$f(v) = \frac{1}{2}\int \frac{(w + ab)(w + g^2)\,dw}{w\sqrt{(w + g^2)(a^2 w - [w + ab]^2)}}.$$

Da $v = \sqrt{w}$ ist, so dürfen wir nur positive Werthe für w zulassen. Da alsdann $w + g^2$ stets positiv ist, so ist zur Reellität der Wurzel im Nenner erforderlich, dass der Factor

$$a^2 w - [w + ab]^2 = -(w - \alpha)(w - \beta) > 0$$

ist. Damit diese Bedingung erfüllt sei, muss eine der Ungleichungen

$$\alpha \gtrless w \gtrless \beta$$

richtig sein, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ ist. Hier bedeuten:

$$\alpha = \frac{a^2 - 2ab + a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}, \quad \beta = \frac{a^2 - 2ab - a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}.$$

In der Erwägung, dass $a > 0$, $b < 0$ ist, erkennen wir leicht, dass α und β reell und positiv sind, dass ferner $\alpha > \beta$ ist, der Werthbereich der Variabeln w also vollständig festgelegt ist.

Um das vorliegende elliptische Integral für $f(v)$ auf die Normalform zu bringen, benutzen wir die Substitution:

$$w = \frac{\beta + g^2 k^2 \varrho}{1 - k^2 \varrho}, \quad k^2 = \frac{\alpha - \beta}{g^2 + \alpha},$$

die so geartet ist, dass den Werthen $-g^2$, β, α, ∞ von w die Werthe ∞, 0, 1, $\frac{1}{k^2}$ von ϱ entsprechen.

Wir stellen fest, dass k^2, der Modul des zu erwartenden elliptischen Integrals in der Normalform, positiv ist und die Einheit nicht erreicht. Folgendes Ergebniss hat die erwähnte Substitution:

$$f(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{g^2 + \beta}{\sqrt{g^2 + \alpha}} \int \frac{\frac{1}{1 - k^2 \varrho} + \frac{ab}{\beta + g^2 k^2 \varrho}}{\sqrt{\varrho(1-\varrho)(1 - k^2 \varrho)}} d\varrho;$$

die weitere Substitution $\varrho = \sin^2 \varphi$ erzeugt folgende Gestalt:

$$f(v) = \frac{g^2 + \beta}{\sqrt{g^2 + \alpha}} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi . \Delta^2\varphi} + \frac{\sqrt{\alpha}(g^2 + \beta)}{\sqrt{\beta(g^2 + \alpha)}} \cdot \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta\varphi} = I + II,$$

wenn

$$\Delta^2 \varphi = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

und

$$n = \frac{g^2 k^2}{\beta}$$

ist. Das Zeichen der Wurzeln ist in Erwägung der Gleichung

$$\sqrt{\alpha\beta} = ab$$

zu wählen. Die weitere Behandlung dieser Integrale besteht in der Einführung der Jacobi'schen Bezeichnungen für die elliptischen Functionen und deren Darstellung durch die Θ-Function. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \psi,$$

so dass $\varphi = am\,\psi$ ist,

$$E(\psi) = \int \Delta^2 am\,\psi\, d\psi.$$

Dann wird:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi . \Delta\varphi} = -\frac{k^2}{k'^2} \cdot \frac{\sin am\,\psi \cos am\,\psi}{\Delta am\,\psi} + \frac{E(\psi)}{k'^2},$$

(cf. Durège: Theorie der elliptischen Functionen, 4. Aufl. § 19, S. 74 und 75), worin k' den zu k gehörigen complementären Modulus bedeutet.

Wir bezeichnen nun mit K bezw. K' das vollständige Integral erster Gattung für den Modul k bezw. k', mit E das vollständige Integral zweiter Gattung für den Modul k.

Ferner definiren wir in bekannter Weise:

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi \cdot \frac{K}{K'}},$$

$$\Theta(\psi) = 1 + 2 \sum_1^\infty {}_n (-1)^n q^{(n^2)} \cos \frac{n \pi \psi}{K},$$

$$H(\psi) = 2 \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \sqrt[4]{q^{[(2n+1)^2]}} \sin \frac{(2n+1) \cdot \pi \psi}{2K}.$$

(cf. Durège, l. c. §§ 54, 65, 68). Dann besteht die Gleichung:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi . \Delta^2\varphi} = -\frac{\sqrt{\alpha - \beta}\sqrt{g^2 + \alpha}}{g^2 + \beta} \cdot \frac{H(\psi) H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} + \frac{g^2 + \alpha}{g^2 + \beta} \cdot \frac{E}{K} \psi + \frac{g^2 + \alpha}{g^2 + \beta} \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Dabei bedeutet Θ' den Differentialquotienten von Θ nach ψ. Wir erhalten also:

$$I = -\sqrt{\alpha - \beta} \frac{H(\psi) H(\psi + K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi + K)} + \sqrt{g^2 + \alpha} \cdot \frac{E}{K} \psi + \sqrt{g^2 + \alpha} \frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

In dem Integral dritter Gattung in II kann n jeden Werth von 0 bis ∞ annehmen. Um von der Legendre'schen Normalform zur Jacobi'schen zu gelangen, setzen wir:

$$n = \frac{g^2 k^2}{\beta} = -k^2 \sin^2 am\, i\omega = k^2 \tang^2 am(\omega, k'),$$

woraus sich $\sin am(\omega, k')$ und $\Delta am(\omega, k')$ leicht berechnen lassen.

Bezeichnen wir das Integral dritter Gattung in der Jacobi'schen Normalform mit $II(\psi)$, so ergiebt sich im vorliegenden Falle:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)\Delta\varphi} = \psi + \frac{g\sqrt{\beta} . \sqrt{g^2 + \alpha}}{\sqrt{\alpha} . (g^2 + \beta)} i II(\psi, i\omega)$$

(cf. Durège, l. c. § 69).

Führen wir nunmehr auch hier (unter Benutzung der Gleichungen Durège § 67,1 und § 71,1) die Θ-Functionen ein, so kommt:

$$i II(\psi, i\omega) = -\frac{g . \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} . \sqrt{g^2 + \alpha}} \psi + \frac{\pi . \psi\omega}{2KK'} + \frac{\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')} \psi + \frac{1}{2} i \log \frac{\Theta(\psi - i\omega)}{\Theta(\psi + i\omega)}.$$

Berücksichtigen wir nun die Beziehungen:

$$\Theta(\psi \pm i\omega) = \left[1 + \sum_1^\infty {}_n(-1)^n q^{(n^2)} \cos\frac{n\pi\omega}{K}\left(e^{-\frac{n\pi\omega}{K}} + e^{\frac{n\pi\omega}{K}}\right)\right]$$

$$\mp i \sum_1^\infty {}_n(-1)^n q^{(n^2)} \sin\frac{n\pi\omega}{K}\cdot\left(e^{-\frac{n\pi\omega}{K}} - e^{\frac{n\pi\omega}{K}}\right)$$

$$= A \mp iB;$$

$$\frac{1}{2}\, i \log\frac{A+iB}{A-iB} = -\operatorname{arc\,tang}\frac{A}{B},$$

so heisst unser zweiter Term:

$$II = \psi\left[\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{g^2+\alpha}} + \frac{g\pi\omega}{2KK'} + \frac{g\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')}\right] - g \operatorname{arc\,tang}\frac{A}{B}.$$

Unser Schlussergebniss ist das folgende:

$$f(v) = I + II = \psi\left(\sqrt{(g^2+\alpha}\cdot\frac{E}{K} + \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{g^2+\alpha}} + \frac{g\pi\omega}{2KK'} + \frac{g\Theta'(\omega, k')}{\Theta(\omega, k')}\right)$$

$$-\sqrt{\alpha-\beta}\cdot\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)} + \sqrt{g^2+\alpha}\,\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)} - g \operatorname{arc\,tang}\frac{A}{B}.$$

Der Gang der numerischen Rechnung ist folgender:

Nachdem α und β (bezw. a und b), sowie g als Data der Aufgabe festgelegt sind, nimmt man für ω einen zwischen α und β liegenden Werth an, berechnet mit Hilfe desselben zunächst ϱ, dann φ.

Alsdann liefert die Gleichung

$$\psi = F(\varphi, k)$$

den Werth für ψ. Da nun ferner

$$\sin am(\omega, k') = \sqrt{\frac{g^2}{g^2+\beta}} = \sin\sigma$$

ist, so folgt:

$$\omega = F(\sigma, k').$$

Die so gefundenen Werthe sind in die Schlussformel einzusetzen.

2) Es sei $b > 0 > a$.

Die Behandlung dieses Falles ist der des vorhergehenden genau analog. Es besteht aber die Ungleichung $\beta > \alpha$. Deshalb ist überall die Stellung von α und β zu vertauschen.

3) Es sei $b = 0$,

Das zu transformirende Integral nimmt die Form an:

$$f(v) = \frac{1}{2}\int\frac{(g^2+\omega)\,d\omega}{\sqrt{\omega(g^2+\omega)(a^2-\omega)}}.$$

Die Wurzel bleibt reell, so lange die stets positive Veränderliche w in den Grenzen 0 und a^2 sich bewegt. Da nun für $b=0$ die im Falle 1) mit α und β bezeichneten Grenzen des Werthbereiches von w in a^2 und 0 übergehen, so ist die hier anzuwendende Substitution aus der allgemeinen durch $b=0$ herzuleiten.

Wir erhalten somit auch ein richtiges Ergebniss, wenn wir in der Schlussformel $b=0$ setzen:

$$f(v)=\sqrt{g^2+a^2}\cdot\frac{E}{K}\psi - a\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)}$$
$$+\sqrt{g^2+a^2}\cdot\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

4) Es sei $\frac{1}{a}=0$.

Die Differentialgleichung der Minimalschraubenfläche lautet:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\right\}=0.$$

Da $\frac{1}{v}$ nicht allgemein 0 sein kann, so ergiebt sich nach Einführung einer Integrationsconstante b:

$$f(v)=b\int\frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2+g^2}{v^2-b^2}}\,dv+c$$
$$=b\int\frac{v\,dv}{\sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}$$
$$+bg^2\int\frac{dv}{v\sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}+c$$
$$=b(P+g^2Q)+c.$$

Zur Ausrechnung des Integrals P verhilft die Substitution $v^2=t$:

$$P=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{(v^2+g^2)}+\sqrt{v^2-b^2}}{\sqrt{(v^2+g^2)}-\sqrt{(v^2-b^2)}}.$$

Von diesem Werthe unterscheidet sich nur durch die additive Constante

$$\log\sqrt{g^2+b^2},$$

quod licet, der folgende:

$$P=\log[\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}].$$

Die Substitution $v^2=t$ verhilft auch zur Auswerthung von Q.

$$Q=\frac{1}{gb}\,arc\,tang\frac{v^2+\sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}{gb}.$$

Von diesem Werthe unterscheidet sich nur durch die additive Constante

$$g \,.\, arc\,tang \frac{b}{g},$$

quod licet, der folgende:

$$Q = g\,arc\,tang \frac{g}{b} \sqrt{\frac{v^2 - b^2}{v^2 + g^2}}.$$

Wir erhalten also:

$$f(v) = b \log (\sqrt{v^2 + g^2} + \sqrt{v^2 - b^2})$$

$$+ g\,arc\,tang \frac{v^2 + \sqrt{(v^2 + g^2)(v^2 - b^2)}}{g\,b} + c.$$

Durch die obigen Bemerkungen ist die (bis auf Entstellungen durch Druckfehler) völlige Uebereinstimmung unseres Ergebnisses mit denen von Enneper [diese Zeitschrift, Jahrgang IX, 1864, S. 111] und von Scherk (Crelle 13, Jahrgang 1834) nachgewiesen.

Letzterer fand seinen Werth durch Integration der Differentialgleichung der Minimalflächen, ersterer auf eine der vorliegenden entsprechende Art.

Aus der Differentialgleichung der die Minimalfläche erzeugenden Curve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b}{x} \sqrt{\frac{x^2 + g^2}{x^2 - b^2}}$$

ist ersichtlich, dass die Tangentenwerthe im Intervall

$$b < x < \infty$$

reell und positiv sind, aber von ∞ bis 0 abnehmen. Somit entfernt sich die Curve immer weiter von der x-Achse, der sie die concave Seite zuwendet.

5) Es sei $\frac{1}{a} = b = 0.$

Dieser Fall ist schon oben erledigt.

6) Es sei $g = 0.$

Für die Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung erhalten wir die Differentialgleichung:

$$\frac{v f'(v)}{1 + f'(v)^2} = \frac{v^2 + ab}{a}.$$

Hier greifen nun bezüglich der beiden Constanten a und b dieselben Erwägungen Platz, wie bei den Schraubenflächen. In jedem Falle ist das Integral

$$f(v) = \frac{1}{2} \int \frac{w + ab}{\sqrt{-w(w-\alpha)(w-\beta)}} dw$$

zu transformiren, in welchem

$$\alpha \gtrless w \gtrless \beta$$

sein muss, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ ist. Die Werthe von α und β sind nicht geändert.

Das Ergebniss lautet im ersten Falle:

$$f(v) = \psi\left(\sqrt{\alpha}\cdot\frac{E}{K}+\sqrt{\beta}\right) - \sqrt{\alpha-\beta}\,\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)} + \sqrt{\alpha}\cdot\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Das Ergebniss des zweiten Falles ergiebt sich wiederum durch Vertauschung von α und β.

Für $b = 0$ erhalten wir:

$$f(v) = \int\frac{v\,dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = -\sqrt{a^2-v^2} \text{ (Kugel).}$$

Für $\frac{1}{a} = 0$ ergiebt sich:

$$f(v) = \int\frac{b\,dv}{\sqrt{v^2-b^2}} = \pm\log[\sqrt{v^2-b^2}\pm v].$$

(Rotationsfläche der Kettenlinie).

Sobernheim. Dr. Heckhoff.

XVII.

Homocentrische Brechung des Lichtes durch die Linse.

Von

Dr. L. Burmester.

Professor an der Technischen Hochschule in München.

Hierzu Tafel XIII und XIV Fig. 1—17.

I. Brechung der Lichtstrahlen an der Kugelfläche.

In Anschluss an die Untersuchung der homocentrischen Brechung des Lichtes durch das Prisma* wollen wir die Beziehungen ableiten, welche bei der homocentrischen Brechung des Lichtes durch die Linse auftreten, weil diese homocentrische Brechung, wie es scheint, in ihrer Allgemeinheit noch nicht erkannt wurde. Die Grundlage unserer Darlegungen bildet der aus der geometrischen Optik entlehnte Satz: Einem einfallenden astigmatischen Strahlenbündel, welches an der Trennungsfläche zweier Medien gebrochen wird, entspricht im Allgemeinen ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, und wenn insbesondere das einfallende Strahlenbündel ein unendlich dünnes centrales ist, so entspricht auch diesem im Allgemeinen ein gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel.

Wir betrachten zuerst die Brechung eines unendlich dünnen, centralen Strahlenbündels, dessen Strahlen von einem Punkt ausgehen, oder nach einem Punkt gerichtet sind, an einer Kugelfläche als Trennungsfläche zweier brechender Medien, um in dem gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel die beiden Brennlinien und die beiden Bildpunkte zu bestimmen, welche dem Lichtpunkt des einfallenden Strahlenbündels entsprechen. Gehen in Figur 1 Tafel XIII die Strahlen eines unendlich dünnen, centralen Strahlenbündels von einem Punkt A aus, und ist $a\Theta$ der Hauptstrahl dieses

* Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1895. Bd. 40. S. 65.

Strahlenbündels, der die Kugelfläche K in einem Punkt Θ trifft, so erfolgt die Brechung des Hauptstrahles $a\Theta$ in einer durch $a\Theta$ und dem Mittelpunkt M der Kugelfläche gelegten Ebene, die wir als Zeichnungsebene nehmen. Diese Ebene schneidet die Kugelfläche K in einem grössten Kreis, den wir ebenfalls mit K bezeichnen. Um zu dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ den entsprechenden Hauptstrahl $\Theta\alpha$ des gebrochenen astigmatischen Strahlenbündels zu erhalten, nehmen wir an, es sei n der Brechungsindex von dem Medium der einfallenden Strahlen gegen das Medium der gebrochenen Strahlen, beschreiben um M die Kreise z, ζ, deren Radien resp. gleich $M\Theta . n$ und $M\Theta : n$ sind. Hierauf ziehen wir von dem Schnittpunkt Z, den der Kreis z mit dem verlängerten Hauptstrahl $a\Theta$ bildet, den Radius ZM, der den Kreis ζ in dem Punkt Z trifft, dann ist $\Theta\mathsf{Z}$ der gebrochene Hauptstrahl $\Theta\,\alpha$.

Zum Beweise dieser Construction, die von Weierstrass* stammt, bezeichnen wir mit e den Einfallswinkel $N\Theta a$ und mit ε den Brechungswinkel $M\Theta\alpha$. Die Dreiecke $M\Theta Z$, $M\mathsf{Z}\Theta$ sind ähnlich, weil sie bei M einen gemeinsamen Winkel haben und

$$\frac{MZ}{M\Theta} = n = \frac{M\Theta}{M\mathsf{Z}}$$

ist. Demnach ist der Winkel $MZ\Theta = e$ und $M\mathsf{Z}\Theta = \varepsilon$; folglich ergiebt sich

$$\frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = \frac{MZ}{M\Theta} = n,$$

oder

$$\frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = \frac{M\Theta}{M\mathsf{Z}} = n.$$

Wir betrachten nun (Fig. 2) in dem von einem Lichtpunkt A ausgehenden, unendlich dünnen Strahlenbündel den Strahlenfächer, der in der Einfallsebene $a\Theta\alpha$ liegt und in derselben gebrochen wird. Denken wir uns in der Einfallsebene einen von A ausgehenden Strahl angenommen, der mit dem Hauptstrahl $a\Theta$ einen unendlich kleinen Winkel bildet, so schneidet der entsprechende, gebrochene Strahl den Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in einem Punkt A_1, in dem sich die gebrochenen Strahlen vereinen, die dem einfallenden Strahlenfächer entsprechen. Der Punkt A_1 ist dann der erste Bildpunkt und die in A_1 auf der Ebene $a\Theta\alpha$ senkrechte Gerade ist die erste Brennlinie in dem gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel. Der erste Bildpunkt A_1, der einem Lichtpunkt A entspricht, ist in mannig-

* Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht 1889 Bd. 2 S. 135 erwähnt Schellbach, dass diese Construction von Weierstrass mitgetheilt wurde im Bericht der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Wien 1856, Druckjahr 1858. Daselbst ist nur angeführt, dass Weierstrass einen Vortrag, „Dioptrische Constructionen“, gehalten hat.

faltiger Weise bestimmt worden*; und wir wollen hier noch eine kinematische Ableitung einer neuen Construction des ersten Bildpunktes mittheilen. Denken wir uns einen einfallenden Strahl $a\Theta$ in der Einfallsebene als Tangente an einer Curve i bewegt, dann umhüllt der zugehörige gebrochene Strahl $\Theta\alpha$ eine Curve ι. Während einer unendlich kleinen Bewegung dreht sich der Strahl $a\Theta$ um den Berührungspunkt A und der gebrochene Strahl $\Theta\alpha$ um den Berührungspunkt A_1. Nehmen wir nun an, es habe während dieser unendlich kleinen Bewegung der Punkt Z auf dem Kreise z eine Geschwindigkeit gleich ZM, die wir aus ihrer Richtung um Z nach ZM, also um einen rechten Winkel drehen und in dieser Lage als lothrechte Geschwindigkeit des Punktes Z bezeichnen**, dann bewegt sich der Punkt Z auf dem Kreise ζ mit der lothrechten Geschwindigkeit ZM. Ziehen wir zu MZ die Parallele ΘU, welche die Centrale AM in dem Punkt U trifft, und auf AZ die Senkrechte UV, die $M\Theta$ in V schneidet, so ist ΘV die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt Θ auf dem Kreise K bewegt. Der Punkt A_1, in welchem der Strahl $\Theta\alpha$ die Curve ι berührt, ergiebt sich demnach, wenn wir auf $\Theta\alpha$ die Senkrechte VW bis an ΘU, und die Gerade WM ziehen, welche auf dem Strahl $\Theta\alpha$ den Punkt A_1 bestimmt.

Nach dieser Construction entspricht einer Reihe von Lichtpunkten $A \ldots$ auf einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $\mathsf{A}_1 \ldots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$, und diese beiden projectiven Punktreihen befinden sich in perspectiver Lage, weil im Punkt Θ zwei entsprechende Punkte zusammen fallen. Demnach gehen die Verbindungsgeraden $A\mathsf{A}_1, \ldots$ der entsprechenden Punkte durch einen Punkt G. Nehmen wir den Punkt Z auf $a\Theta$ als virtuellen Lichtpunkt, so ist nach der Construction der Punkt Z der entsprechende erste Bildpunkt. Dies folgt auch aus der allgemeineren Beziehung, dass allen auf die Kugelfläche K treffenden Strahlen, die nach dem Punkt Z gerichtet sind, gebrochene Strahlen entsprechen, welche sich in dem Punkt Z schneiden.

Bezeichnen wir mit D, Δ_1 die Fusspunkte der von M auf $a\Theta$, $\Theta\alpha$ gefällten Senkrechten und nehmen wir den Fusspunkt D auf dem Hauptstrahl $a\Theta$ als einen virtuellen Lichtpunkt, so entspricht demselben gemäss der Construction der Fusspunkt Δ_1 auf $\Theta\alpha$ als erster Bildpunkt. Diese Beziehung ergiebt sich auch, wenn wir annehmen, der Punkt Θ bewege sich

* De l'Hospital, Analyse des infiniment petits. 2. Ed. Paris 1716. p. 121. — Reusch, Poggendorf's Annalen 1867. Bd. 130 S. 497. — Hermann, Ueber schiefen Durchgang der Strahlenbündel durch Linsen. 1874. S. 10. — Lippich, Denkschriften der k. k. Akademie. Wien 1877. Bd. 38 S. 8. — Kessler, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1884. Bd. 29 S. 67. Gleichen, Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes. 1889. S. 31. Mannheim, Géométrie cinématique. Paris 1894. p. 66.

** L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888. Bd. 1 S. 64.

auf dem Kreise K und der Hauptstrahl $a\Theta$ berühre in D einen um M beschriebenen Kreis, dann berührt auch der Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in Δ_1 einen um M beschriebenen Kreis. Die Geraden ZZ, $D\Delta_1$ schneiden sich also in dem genannten Punkt G.

Es ist der Winkel $DM\Delta_1 = Z\Theta Z$, ferner

$$\frac{MD}{M\Delta_1} = \frac{\sin e}{\sin \varepsilon} = n, \quad \frac{\Theta Z}{\Theta Z} = \frac{MZ}{M\Theta} = n,$$

also

$$\frac{MD}{M\Delta_1} = \frac{\Theta Z}{\Theta Z}.$$

Demnach sind die Dreiecke $MD\Delta_1$, ΘZZ ähnlich und folglich ist die Gerade $D\Delta_1$ senkrecht auf der Geraden MZ.

Diese Beziehung führt zu der folgenden bekannten Construction des ersten Bildpunktes. Ist zu einem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der entsprechende gebrochene Hauptstrahl $\Theta\alpha$ in der angegebenen Weise construirt, dann ziehen wir von dem Mittelpunkt M auf $a\Theta$ oder $\Theta\alpha$ eine Senkrechte, z. B. auf $a\Theta$ die Senkrechte MD, fällen von D auf MZ die Senkrechte DG und ziehen die Gerade AG, welche auf $\Theta\alpha$ den zum Lichtpunkt A gehörenden ersten Bildpunkt A_1 bestimmt.

Um den Punkt G rechnerisch zu bestimmen, ziehen wir zu $\Theta\alpha$ die Parallele GA_{t1}, zu $a\Theta$ die Parallele $G\mathrm{A}_{u1}$ und bezeichnen mit r den Radius der Kugelfläche K. Es ist die Strecke

$$\Theta A_{t1} = \mathrm{A}_{u1}G = GZ\frac{\sin e}{\sin(e-\varepsilon)} = MZ\frac{\sin e \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)} = \frac{M\Theta}{n}\,\frac{\sin e \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)},$$

also

$$\Theta A_{t1} = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin(e-\varepsilon)}. \tag{1}$$

Ferner ist die Strecke

$$\Theta \mathrm{A}_{u1} = A_{t1}G = GZ\,\frac{\sin \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)} = MZ\frac{\sin \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)} = M\Theta\,.\,n\,\frac{\sin \varepsilon \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)},$$

also

$$\Theta \mathrm{A}_{u1} = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)}. \tag{2}$$

Setzen wir $\Theta A = x_1$, $\Theta \mathrm{A}_1 = \chi_1$, $\Theta A_{t1} = f$, $\Theta \mathrm{A}_{u1} = \varphi_1$, und nehmen wir die Strecken x_1, f_1 entgegen der Richtung des einfallenden Hauptstrahles $a\Theta$ positiv, die Strecken χ_1, φ_1 in der Richtung des gebrochenen Hauptstrahles Θa positiv, so erhalten wir:

$$\frac{f_1}{x_1} + \frac{\varphi_1}{\chi_1} = 1. \tag{3}$$

Betrachten wir in dem von einem Lichtpunkte A ausgehenden unendlich dünnen Strahlenbündel den Strahlenfächer, dessen Ebene durch den Hauptstrahl $a\Theta$ geht und auf der Ebene $a\Theta\alpha$ senkrecht steht, so entspricht diesem einfallenden Strahlenfächer ein gebrochener Strahlenfächer, dessen Ebene durch den Hauptstrahl $\Theta\alpha$ geht, senkrecht auf der Ebene $a\Theta\alpha$ steht, und dessen Strahlen sich in dem Schnittpunkt A_2 des Hauptstrahles $\Theta\alpha$

und der Centralen AM vereinen. Der Punkt A_2 auf dem Hauptstrahl $\Theta\alpha$ ist hiernach der zweite Bildpunkt und die in der Einfallebene $a\Theta\alpha$ liegende Centrale $M\mathsf{A}_2$ ist die zweite Brennlinie des gebrochenen, astigmatischen Strahlenbündels.

Einer Reihe von Lichtpunkten $A\ldots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ entspricht demnach eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $\mathsf{A}_2\ldots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$, weil die Verbindungsgeraden $A\mathsf{A}_2\ldots$ durch den Mittelpunkt M gehen. Ziehen wir zu $\Theta\alpha$ die Parallele MA_{s2}, ferner zu $a\Theta$ die Parallele $M\mathsf{A}_{v2}$, so ergiebt sich, weil $M\Theta = r$ gesetzt wurde,

$$4)\qquad \Theta A_{s2} = \mathsf{A}_{v2}M = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(e-\varepsilon)},$$

$$5)\qquad \Theta \mathsf{A}_{v2} = A_{s2}M = \frac{r \sin e}{\sin(e-\varepsilon)}.$$

Setzen wir $\Theta A = x_2$, $\Theta\mathsf{A}_2 = \chi_2$, $\Theta A_{s2} = f_2$, $\Theta\mathsf{A}_{v2} = \varphi_2$, nehmen wir die Strecken x_2, f_2, sowie die Strecken χ_2, φ_2 in gleichem Sinne positiv, wie die Strecken x_1, f_1 und χ_1, φ_1 in Gleichung 3), so erhalten wir:

$$6)\qquad \frac{f_2}{x_2} + \frac{\varphi_2}{\chi_2} = 1.$$

Nehmen wir auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ eine Reihe von Lichtpunkten $A\ldots$ an, dann entsprechen derselben eine projective Reihe erster Bildpunkt $\mathsf{A}_1\ldots$ und eine projective Reihe zweiter Bildpunkte $\mathsf{A}_2\ldots$ auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$. Diese beiden Reihen von ersten Bildpunkten $\mathsf{A}_1\ldots$ und zweiten Bildpunkten $\mathsf{A}_2\ldots$ sind demnach projectiv und haben auf dem Hauptstrahl $\Theta\alpha$ die Doppelpunkte Θ, Z. Wenn wir von dem Doppelpunkt Θ absehen, in welchem der Lichtpunkt mit den beiden zugehörigen ersten und zweiten Bildpunkten identisch ist, so ist auf dem einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ der Punkt Z der einzige Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt Z auf dem gebrochenen Hauptstrahl $\Theta\alpha$ entspricht; denn im Punkt Z fällt der entsprechende erste Bildpunkt mit dem entsprechenden zweiten Bildpunkt zusammen. Setzen wir $x_1 = x_2$, dann folgt aus den Gleichungen 3) und 6) für die projectiven Punktreihen $\mathsf{A}_1\ldots$ und $\mathsf{A}_2\ldots$ die Gleichung

$$7)\qquad \frac{f_1}{1-\dfrac{\varphi_1}{\chi_1}} = \frac{f_2}{1-\dfrac{\varphi_2}{\chi_2}}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich auch jene Doppelpunkte, wenn wir $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ setzen; denn dann erhalten wir erstens den Werth $\chi = 0$, durch welchen der Doppelpunkt Θ bestimmt wird, und zweitens den Werth

$$8)\qquad \chi = \frac{f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1}{f_1 - f_2} = \Theta\mathsf{Z},$$

durch welchen der Doppelpunkt Z auch bestimmt wird.

Ist der Hauptstrahl $a\Theta$ senkrecht auf die Kugelfläche K gerichtet, dann sind die Winkel $e = 0$, $\varepsilon = 0$ und die Ausdrücke:

$$9) \qquad f_1 = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_1 = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)},$$

$$10) \qquad f_2 = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin(e - \varepsilon)}, \quad \varphi_2 = \frac{r \sin e}{\sin(e - \varepsilon)},$$

welche die Formen $\frac{0}{0}$ erhalten, liefern, wenn wir $\sin \varepsilon = \frac{\sin e}{n}$ einsetzen, hierauf Zähler und Nenner nach e differentiiren, oder auch einfacher

$$\sin e = e, \quad \sin \varepsilon = \varepsilon, \quad n\varepsilon = e$$

setzen*

$$11) \qquad f_1 = \frac{r}{n-1}, \quad \varphi_1 = \frac{rn}{n-1},$$

$$12) \qquad f_2 = \frac{r}{n-1}, \quad \varphi_2 = \frac{rn}{n-1}.$$

Hiernach ist $f_1 = f_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$, es fällt also der Punkt G mit dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K zusammen und dies ergiebt sich auch unmittelbar aus der Construction des Punktes G. Die beiden Punktreihen $\mathsf{A}_1\ldots$ und $\mathsf{A}_2\ldots$ sind demnach in diesem Falle identisch und jedem Lichtpunkt auf einem central einfallenden Hauptstrahl entspricht ein homocentrischer Bildpunkt. Einer Reihe von Lichtpunkten $A\ldots$ auf einem central einfallenden Hauptstrahl entspricht eine projective Reihe von homocentrischen Bildpunkten $\mathsf{A}\ldots$, und es sind die Punkte Θ, M Doppelpunkte dieser beiden projectiven Punktreihen.

Um entsprechende Punkte dieser beiden projectiven Punktreihen $A\ldots$ und $\mathsf{A}\ldots$ zu erhalten, ziehen wir in Figur 3 durch den Eintrittspunkt Θ und den Mittelpunkt M die Senkrechten $\Theta\mathfrak{a}$, Mm auf den centralen Hauptstrahl aM und nehmen auf der Senkrechten Mm die Punkte P, Π, so dass $MP : M\Pi = n : 1$ ist. Dann ergiebt sich zu einem Punkt A der entsprechende Punkt A, indem wir die Gerade AP ziehen, welche die Senkrechte $\Theta\mathfrak{a}$ im Punkt $\mathfrak{A}$ schneidet, und ferner die Gerade $\Pi\mathfrak{A}$ ziehen, die den entsprechenden Punkt A bestimmt.** Ebenso erhalten wir zu dem Punkt A' den entsprechenden Punkt A' durch die Geraden $P\mathfrak{A}'$, $\Pi\mathfrak{A}'$. Zu dem unendlich fernen Punkt A_v^∞ der Punktreihe $A\ldots$ ergiebt sich durch die zu aM Parallele $P\mathfrak{A}_v$ und die Gerade $\Pi\mathfrak{A}_v$ der entsprechende Punkt, der Brennpunkt A_v. Ebenso erhalten wir zu dem unendlich fernen Punkt

* A. Gleichen, Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes. 1889. S. 44.

** G. Ferraris, Die Fundamental-Eigenschaften der dioptrischen Instrumente. Deutsch von F. Lippich. 1879. S. 7.

A_s^∞ der Punktreihe A..., indem wir $\Pi\mathfrak{A}_s$ parallel aM und die Gerade $P\mathfrak{A}_s$ ziehen, den entsprechenden Punkt, den Brennpunkt A_s; und es ist

$$\Theta A_s = f_1 = \frac{r}{n-1}, \quad \Theta A_v = \varphi_1 = \frac{rn}{n-1}.$$

Um noch eine andere Construction auszuführen, nehmen wir an, es sei der eine der Brennpunkte, z. B. A_v, gegeben. Wir ziehen durch Θ eine beliebige Gerade $\Theta\mathfrak{a}_0$ und zu derselben die Parallele $A_v\mathfrak{M}$, welche jene Senkrechte Mm im Punkt $\mathfrak{M}$ trifft. Wenn wir dann durch die Punkte $AA'A_s\ldots$ Senkrechte auf $a\Theta$ ziehen, welche die Gerade $\Theta\mathfrak{a}_0$ in den Punkten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{A}_{0s}\ldots$ schneidet, dann liefern die Geraden $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{M}\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{M}\mathfrak{A}_{0s}$ die entsprechenden Punkte AA', $A_s^\infty\ldots$

II. Homocentricität bei der Brechung der Lichtstrahlen durch die Linse.

Zwei in Figur 4 gegebene Kugelflächen K, K', deren Mittelpunkte M, M' sind, bilden die bei der Strahlenbrechung in Betracht kommende Begrenzung einer Linse. Die Verbindungsgerade MM' dieser Mittelpunkte heisst die Linsenachse und eine durch dieselbe gelegte Ebene heisst eine Meridianebene der Linse. Eine Meridianebene schneidet die beiden Kugelflächen K, K' in zwei grössten Kreisen, die wir ebenfalls mit K, K' bezeichnen. Wir nehmen in einer Meridianebene einen einfallenden Hauptstrahl $a\Theta$ an, diesem entspricht der in der Linse gebrochene Hauptstrahl $\Theta\Theta'$, der auch mit α bezeichnet ist, und der austretende Hauptstrahl $\Theta'a'$. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Medien an beiden Seiten der Linse verschieden sind. Wir bezeichnen den Brechungsindex vom Medium der einfallenden Strahlen gegen die Linse mit n und vom Medium der austretenden Strahlen gegen die Linse mit n'. Ferner sei r der Radius der Kugel K und r' der Radius der Kugel K'.

Um den in der Linse gebrochenen Hauptstrahl α und den austretenden Hauptstrahl a' in der angegebenen Weise zu construiren, beschreiben wir um M die Kreise s, ζ mit den Radien $r.n$ und $r:n$, ebenso um M' die Kreise s', ζ' mit den Radien $r'.n'$ und $r':n'$. Der einfallende Hauptstrahl a bestimmt auf dem Kreis s den Punkt Z, und die Gerade ZM liefert auf dem Kreis ζ den Punkt Z und dadurch den in der Linse gebrochenen Hauptstrahl ΘZ resp. α. Dieser Hauptstrahl α schneidet den Kreis ζ' in dem Punkt Z', und die Gerade M'Z' bildet mit dem Kreis s' den Schnittpunkt Z', durch welchen der austretende Hauptstrahl $\Theta'Z'$ resp. a' bestimmt wird.

Gehen nun von einem Lichtpunkt A des Hauptstrahles a die Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels aus, so entspricht diesem ein in der Linse gebrochenes astigmatisches Strahlenbündel, dessen zweite, in der Meridianebene liegende Brennlinie die Gerade $MA\mathsf{A}_2$ ist, welche auf dem

Hauptstrahl α den zweiten Bildpunkt A_2 bestimmt, und dessen erste auf der Meridianebene senkrechte Brennlinie durch den ersten Bildpunkt A_1 geht. Indem wir $M\Delta_1$ senkrecht auf α und $\Delta_1 G$ senkrecht auf MZ ziehen, ergiebt sich durch die Gerade AG auf dem Hauptstrahl α der erste Bildpunkt A_1.

Dem in der Linse gebrochenen astigmatischen Strahlenbündel entspricht ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel, dessen zweite in der Meridianebene liegende Brennlinie die Gerade $M'A'_2A_2$ ist, welche auf dem Hauptstrahl a' den zweiten Bildpunkt A'_2 bestimmt, und dessen erste auf der Meridianebene senkrechte Brennlinie durch den ersten Bildpunkt A'_1 geht. Indem wir $M'\Delta'_1$ senkrecht auf α und Δ'_1G' senkrecht auf $M'Z'$ ziehen, erhalten wir durch die Gerade $G'A_1$ auf dem Hauptstrahl a' den ersten Bildpunkt A'_1. Hiernach entspricht einem einfallenden unendlich dünnen Strahlenbündel, dessen Strahlen von einem Lichtpunkt A ausgehen oder nach demselben gerichtet sind, ein austretendes astigmatisches Strahlenbündel mit dem ersten Bildpunkt A'_1 und den zweiten Bildpunkt A'_2. Gemäss der Bestimmung dieser beiden Bildpunkte gehört zu einer Reihe von Lichtpunkten $A\ldots$ auf dem einfallenden Hauptstrahl a eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A'_1\ldots$ und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A'_2\ldots$ auf dem entsprechenden austretenden Hauptstrahl a'. Wenn nun diese beiden projectiven Punktreihen $A'_1\ldots$ und $A'_2\ldots$ zwei reelle Doppelpunkte A'_p, A'_q besitzen, so entsprechen diesen in der Punktreihe $A\ldots$ zwei Lichtpunkte A_p, A_q, denen die Doppelpunkte A'_p, A'_q als homocentrische Bildpunkte entsprechen. Ebenso ergiebt sich, wenn wir auf dem Hauptstrahl a' eine Reihe von Punkten $A'\ldots$ als Lichtpunkte betrachten, dass derselben eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A_1\ldots$ und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A_2\ldots$ auf dem Hauptstrahl a entspricht. Wir erhalten demnach auch jene beiden Lichtpunkte A_p, A_q als die Doppelpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1\ldots$ und $A_2\ldots$ Hieraus folgt der Satz:

Bei der Brechung der Lichtstrahlen durch eine Linse giebt es auf einem in einer Meridianebene einfallenden Hauptstrahl zwei Lichtpunkte, denen je ein homocentrischer Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl entspricht; diese beiden Lichtpunkte, sowie diese beiden homocentrischen Bildpunkte sind Doppelpunkte je zweier projectiver Punktreihen, und können als solche reell, imaginär sein, oder zusammenfallen.

Diese Beziehung können wir auf beliebig viele Kugelflächen $K, K', K''\ldots$, deren Mittelpunkte $M, M', M''\ldots$ in einer Geraden liegen, erweitern und demnach gilt dieser Satz auch für die Brechung durch beliebig viele centrirte Linsen oder für die Brechung durch beliebig viele Medien, die durch Kugelflächen getrennt sind, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen. Den bekannten Fall, dass jedem Lichtpunkt auf der Achse MM'' ein homo-

centrischer Bildpunkt entspricht, oder insbesondere, dass jedem Lichtpunkt auf der Achse einer Linse ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, lassen wir hier ausser Beachtung.

Nehmen wir in der schematischen Figur 5 auf dem Hauptstrahl a' drei beliebige Punkte A'_x, A_y, A'_z an, so entsprechen diesen auf dem Hauptstrahl α die Punkte $\mathsf{A}_{x1}\mathsf{A}_{y1}\mathsf{A}_{z1}$ und $\mathsf{A}_{x2}\mathsf{A}_{y2}\mathsf{A}_{z2}$, denen ferner auf dem Hauptstrahl a die Punkte $A_{x1}A_{y1}A_{z1}$ und $A_{x2}A_{y2}A_{z2}$ entsprechen. Durch diese drei Paare entsprechender Punkte sind die beiden projectiven Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ bestimmt. Da der Punkt A'_y der Vereinfachung wegen identisch mit Punkt Θ' und der Punkt A'_z auf der Geraden $M'G'$ angenommen wurde, so fallen die beiden Punkte A_{y1}, A_{y2} mit Θ und die beiden Punkte A_{z1}, A_{z2} in einem Punkt zusammen.

Um die Doppelpunkte A_p, A_q dieser beiden projectiven Punktreihen zu construiren, ziehen wir von einem beliebigen Punkt O Gerade nach den Punkten $A_{x1}A_{y1}A_{z1}A_{x2}A_{y2}A_{z2}$ und beschreiben einen durch O gehenden Kreis $\mathfrak{k}$, der diese Geraden resp. in den Punkten $\mathfrak{A}_{x1}\mathfrak{A}_{y1}\mathfrak{A}_{z1}\mathfrak{A}_{x2}\mathfrak{A}_{y2}\mathfrak{A}_{z2}$ schneidet. Die drei Schnittpunkte Ψ_{xy}, Ψ_{yz}, Ψ_{xz} der Gegenseiten des Sechsecks $\mathfrak{A}_{x1}\mathfrak{A}_{y2}\mathfrak{A}_{z1}\mathfrak{A}_{x2}\mathfrak{A}_{y1}\mathfrak{A}_{z2}$ liegen nach dem Pascal'schen Satze in einer Geraden ψ, welche mit dem Kreise $\mathfrak{k}$ zwei Schnittpunkte $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{A}_q$ bildet. Die Geraden $O\mathfrak{A}_p$, $O\mathfrak{A}_q$ bestimmen dann auf dem Hauptstrahl a die Doppelpunkte A_p, A_q und diesen entsprechen als Lichtpunkte die homocentrischen Bildpunkte A'_p, A'_q auf dem Hauptstrahl a', die wir erhalten, wenn wir durch G die Geraden $A_p\mathsf{A}_{p1}$, $A_q\mathsf{A}_{q1}$, durch G' die Geraden $\mathsf{A}_{p1}A'_p$, $\mathsf{A}_{q1}A'_q$ ziehen, oder, wenn wir durch M die Geraden $A_p\mathsf{A}_{p2}$, $A_q\mathsf{A}_{q2}$, durch M' die Geraden $\mathsf{A}_{p2}A'_p$, $\mathsf{A}_{q2}A'_q$ ziehen. Die Doppelpunkte A_p, A_q sind reell, imaginär, oder fallen zusammen, je nachdem die Gerade ψ den Kreis $\mathfrak{k}$ schneidet, nicht schneidet oder berührt.

Diese Construction ist ein specieller Fall der bekannten Construction der beiden in Figur 6 gezeichneten Vierecke $A_p\mathsf{A}_{p1}A'_p\mathsf{A}_{p2}$, $A_q\mathsf{A}_{q1}A'_q\mathsf{A}_{q2}$, deren Seiten resp. durch vier gegebenen Punkte G, G', M', M gehen und deren Ecken resp. auf vier gegebenen Geraden a, α, a', α_2 liegen.* Denn, lassen wir die Gerade α_2 mit der Geraden α zusammenfallen, so erhalten wir den obigen Fall, der bei der homocentrischen Brechung durch eine Linse auftritt.

Wir wollen noch eine andere Construction der Doppelpunkte jener projectiven Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ angeben, von der wir vorzugsweise Gebrauch machen werden bei der Construction der Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen.

Bestimmen wir in Figur 7 auf dem Hauptstrahl a zu dem unendlich fernen Punkt A^{∞}_{u1} der Punktreihe $A_1 \ldots$ den entsprechenden Punkt A_{u2} der

---

* Jacob Steiner's Gesammelte Werke. 1881. Bd. 1 S. 285 und 303.

Punktreihe $A_2 \ldots$, indem wir durch die Punkte G, G', M', M resp. die Geraden $A_{u1}^{\infty} A_{u1}$, $A_{u1} A'_u$, $A'_u A_{u2}$, $A_{u2} A_{u2}$ ziehen; bestimmen wir ferner zu dem unendlich fernen Punkt A_{v2}^{∞} der Punktreihe $A_2 \ldots$ den entsprechenden Punkt A_{v1} der Punktreihe $A_1 \ldots$, indem wir durch die Punkte M, M', G', G resp. die Geraden $A_{v2}^{\infty} A_{v2}$, $A_{v2} A'_v$, $A'_v A_{v1}$, $A_{v1} A_{v1}$ ziehen, dann sind A_{v1}, A_{u2} die Gegenpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ Nehmen wir nun noch einen beliebigen Punkt A'_y auf dem Hauptstrahl a' an, zu dem wir in der angegebenen Weise die beiden entsprechenden Punkte A_{y1}, A_{y2} auf dem Hauptstrahl a ermitteln, so sind die beiden projectiven Punktreihen durch die drei Paar entsprechenden Punkte $A_{u1}^{\infty} A_{y1}$, A_{v1} und $A_{u2} A_{y2} A_{v2}^{\infty}$ bestimmt. Am einfachsten erhalten wir die zwei entsprechenden Punkte A_{y1}, A_{y2}, wenn wir A'_y im Punkt Θ' annehmen; denn dann ergeben sich durch die Geraden $\Theta' G$, $\Theta' M$ die Punkte A_{y1}, A_{y2} auf dem Hauptstrahl a.

Um nun die Doppelpunkte A_p, A_q zu construiren, ziehen wir durch die Gegenpunkte A_{v1}, A_{u2} Senkrechte $A_{v1} O_1$, $A_{u2} O_2$ auf dem Hauptstrahl a und durch die Punkte A_{y1}, A_{y2} zwei beliebige auf einander senkrechte Gerade $A_{y1} O_1$, $A_{y2} O_2$, welche die Senkrechten $A_{v1} O_1$, $A_{u2} O_2$ resp. in den Punkten O_1, O_2 schneiden; dann beschreiben wir über $O_1 O_2$ als Durchmesser einen Kreis $\mathfrak{k}$ und dieser schneidet den Hauptstrahl a in den beiden Doppelpunkten A_p, A_q, die also symmetrisch zur Mitte der Strecke $A_{v1} A_{u2}$ liegen. Werden die beiden auf einander senkrechten Geraden $A_{y1} O_1$, $A_{y2} O_2$ so gezogen, dass sie mit dem Hauptstrahl a einen Winkel von 45^0 bilden, dann ist $A_{v1} O_1 = A_{v1} A_{y1}$ und $A_{u2} O_2 = A_{u2} A_{y2}$. Die Doppelpunkte A_p, A_q sind reell, imaginär, oder fallen zusammen, je nachdem der Kreis $\mathfrak{k}$ den Hauptstrahl a schneidet, nicht schneidet oder berührt.

Liegen in Figur 8 die Punkte M, G auf einer durch Θ' gehenden Geraden und die Punkte M', G' auf einer durch Θ gehenden Geraden, sind ferner die Punkte M, G und M', G' so gelegen, dass einem Punkte A'_x auf dem Hauptstrahl a' ein einziger Punkt A_x auf dem Hauptstrahl a entspricht, schneiden sich also die Geraden $A_x G$, $A'_x G'$ in einem Punkt A_{x1} auf a und schneiden sich ebenso die Geraden $A_x M$, $A'_x M'$ in einem Punkte A_{x2} auf a, dann sind die beiden Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ identisch. Denn den Punkten A'_x, A'_y, A'_z auf dem Hauptstrahl a' entsprechen die Punkte A_x, A_y, A_z auf dem Hauptstrahl a und in jedem der Punkte A_x, A_y, A_z sind je zwei entsprechende Punkte der Punktreihen $A_1 \ldots$, $A_2 \ldots$ vereint. In diesem Falle entspricht jedem Lichtpunkte auf dem Hauptstrahl a ein homocentrischer Bildpunkt auf dem Hauptstrahl a'.

Wenn dieser theoretisch mögliche Fall physikalisch verwirklicht werden kann, so giebt es ausser dem mit der Linsenachse coincidirenden Hauptstrahl noch unendlich viele andere Hauptstrahlen, auf denen jedem Lichtpunkt ein homocentrischer Bildpunkt bei der Brechung durch eine Linse entspricht.

In Figur 9 (Tafel XIV) ist eine biconvexe Linse KK' mit einem einfallenden Hauptstrahl a und den entsprechenden gebrochenen Hauptstrahlen α, a' in einer Meridianebene gezeichnet. Hierbei, sowie in allen folgenden Zeichnungen wird unbeschadet der Allgemeinheit angenommen, dass an beiden Linsenseiten sich dasselbe Medium befindet, und der Brechungsindex $n = n' = \frac{3}{2}$ gesetzt. Es sind M, M' die Mittelpunkte der Kugelflächen K, K', und ferner sind die zugehörigen Punkte G, G' in der angegebenen Weise, wie die Zeichnung zeigt, bestimmt. Um nun auf dem einfallenden Hauptstrahl a die beiden Lichtpunkte A_p, A_q zu construiren, denen homocentrische Bildpunkte A'_p, A'_q auf dem austretenden Hauptstrahl a' entsprechen, bestimmen wir auf a die Gegenpunkte A_{v1}, A_{u2} und zwei entsprechende Punkte A_{y1}, A_{y2}. Wir ziehen durch G und M zu a die Parallelen, die den Hauptstrahl α in den Punkten $\mathsf{A}_{u1}\mathsf{A}_{v2}$ treffen, dann die Gerade $\mathsf{A}_{u1}G'$, durch ihren Schnittpunkt A'_u auf a' die Gerade $M'A'_u$ bis A_{u2} und die Gerade $M\mathsf{A}_{u2}$, welche auf a den Gegenpunkt A_{u2} bestimmt. Ferner ziehen wir die Gerade $\mathsf{A}_{v2}M'$, von ihrem Schnittpunkt A'_v auf a' die Gerade A'_vG' bis A_{v1} und die Gerade $\mathsf{A}_{v1}G$, welche auf a den Gegenpunkt A_{v1} liefert. Durch die Geraden $\Theta'G$, $\Theta'M$ erhalten wir auf a zwei entsprechende Punkte A_{y1}, A_{y2}. Die Doppelpunkte A_p, A_q sind vermittelst des Kreises $\mathfrak{k}$, wie vorhin in Figur 7 angegeben wurde, construirt. Ist einer der Gegenpunkte A_{v1}, A_{u2}, oder sind beide unzugänglich, dann muss man die in Figur 5 angegebene Construction der Doppelpunkte anwenden.

Durch die Gerade MA_p, welche α in A_p trifft, und durch die Gerade $M'\mathsf{A}_p$ ergiebt sich der zum Lichtpunkt A_p gehörende homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem austretenden Hauptstrahl a'. Ebenso erhalten wir durch die Gerade MA_q, welche α in A_q schneidet, und die Gerade $M'\mathsf{A}_q$ bestimmt, zu dem Lichtpunkt A_q den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt A'_q.

Die von dem Lichtpunkt A_p ausgehenden Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen sich nach der Brechung durch die Linse in dem Bildpunkt A'_p, und die nach dem Lichtpunkte A_q gerichteten Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels vereinigen sich nach der Brechung in dem Bildpunkt A'_q.

Wenn bei der biconvexen Linse die Mittelpunkte zusammenfallen, die Kugelflächen K, K' also concentrisch sind, oder die Linse in eine Vollkugel übergeht, so tritt doch keine wesentliche Vereinfachung der Construction der Lichtpunkte A_p, A_q ein. Werden in diesen besonderen Fällen auf allen in einer Meridianebene liegenden Hauptstrahlen, die in einem Punkt Θ einfallen, die Lichtpunkte A_p, A_q bestimmt, dann bilden diese Lichtpunkte eine Curve, die wir Homocentroide nennen. Die Homocentroide ist in diesen speciellen Fällen für alle Eintrittspunkte Θ dieselbe. Ist die Homo-

centroide z. B. für einen Punkt Θ einer Vollkugel construirt, so kann man vermittelst derselben zu einem beliebig angenommenen Lichtpunkt die zugehörigen einfallenden Hauptstrahlen und austretenden Hauptstrahlen bestimmen, und auf diesen letzteren die homocentrischen Bildpunkte construiren, welche dem angenommenen Lichtpunkt entsprechen. Dadurch gelangen wir zur Bestimmung der homocentrischen Verwandtschaft zwischen den Lichtpunkten und entsprechenden homocentrischen Bildpunkten bei der Brechung durch eine Vollkugel.

In dem geometrischen Grenzfall, der eintritt, wenn in Figur 10 der einfallende Hauptstrahl a den Linsenrand der biconvexen Linsen in einem Punkt Θ trifft, haben die beiden projectiven Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ in Θ einen Doppelpunkt A_q. Der andere Doppelpunkt A_p ergiebt sich dann, nachdem die Gegenpunkte A_{v1}, A_{u2} in der angegebenen Weise bestimmt sind, indem wir auf dem Hauptstrahl a die Strecke

$$A_p A_{u2} = A_{v1} A_q$$

machen. Zu dem Lichtpunkt A_p erhalten wir durch die Gerade MA_p, die den Hauptstrahl α in A_p schneidet, und die Gerade $M'A_p$ den entsprechenden homocentrischen Bildpunkt A'_p auf dem Hauptstrahl a'. Auf allen einfallenden Hauptstrahlen, die nach einem Randpunkt Θ gehen, ist dieser Randpunkt ein Lichtpunkt, mit dem der entsprechende homocentrische Bildpunkt coincidirt.

In Figur 11 sind bei einer biconcaven Linse KK' die beiden Lichtpunkte A_p, A_q auf einem einfallenden Hauptstrahl a und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte A'_p, A'_q auf dem austretenden Hauptstrahl a', ebenso wie bei der biconvexen Linse in Figur 9, mit gleicher Bezeichnung bestimmt.

Nehmen wir in Figur 12 eine biconcave Linse KK', bei welcher sich die beiden Kugelflächen K, K' im Punkt Θ berühren, dann entspricht nach der ausgeführten Construction jedem nach dem Berührungspunkt Θ gehenden, einfallenden Hauptstrahl a, der mit der Linsenachse einen Winkel bildet, geometrisch ein austretender Hauptstrahl a', der mit a zusammenliegt. In diesem Falle coincidiren die beiden Doppelpunkte A_p, A_q der projectiven Punktreihen $A_1 \ldots$ und $A_2 \ldots$ im Punkt Θ. Diesem Punkt als Lichtpunkt entspricht ein mit Θ identischer homocentrischer Bildpunkt. Demnach giebt es auf einem solchen einfallenden Hauptstrahl ausser dem Punkt Θ keinen Lichtpunkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht.

Zu einem auf dem Hauptstrahl a angenommenen Lichtpunkt A erhalten wir durch die Gerade GA, die den Hauptstrahl α in A_1 trifft, und durch die Gerade $A_1 G'$, die den Hauptstrahl a', in A'_1 schneidet den entsprechenden ersten Bildpunkt A'_1. Ebenso ergiebt sich durch die Gerade MA, welche auf dem Hauptstrahl α den Punkt A_2 liefert, und durch die Gerade $A_2 M'$ auf dem Hauptstrahl a' der entsprechende zweite Bildpunkt A'_2.

Einer Reihe von Lichtpunkten A auf dem Hauptstrahl a entspricht eine projective Reihe von ersten Bildpunkten $A'_1 \ldots$ und eine projective Reihe von zweiten Bildpunkten $A'_2 \ldots$ auf dem austretenden Hauptstrahl a'; und die Doppelpunkte dieser drei projectiven Punktreihen sind im Punkte Θ vereint.

Bei der biconvexen Linse in Figur 13 ist der einfallende Hauptstrahl a nach dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K gerichtet, also senkrecht zu derselben. Der Hauptstrahl α in der Linse liegt dann mit a zusammen. Um zu dem in Z' befindlichen Punkt A_p auf α nach der Construction in Figur 3 den entsprechenden Punkt A_p auf a zu bestimmen, errichten wir im Mittelpunkt M und im Eintrittspunkt Θ die Senkrechten MP, $\Theta\mathfrak{a}$ auf a, nehmen auf der Senkrechten MP die Punkte P, Π, so dass

$$MP : M\Pi = n : 1 = 3 : 2$$

ist, ziehen die Gerade $\mathsf{A}_p\Pi$, welche die Senkrechte $\Theta\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}_p$ schneidet, dann ergiebt sich durch die Gerade $P\mathfrak{A}_p$ der entsprechende Punkt A_p. Dem Lichtpunkt A_p auf dem Hauptstrahl a entspricht nach der Brechung an der Kugelfläche K der mit Z' coincidirende homocentrische Bildpunkt A_p auf dem Hauptstrahl α. Betrachten wir nun A_p als Lichtpunkt, so entspricht diesem nach der Brechung an der Kugelfläche K' der mit Z' coincidirende homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem Hauptstrahl a'. Demnach gehört zu dem Lichtpunkte A_p auf dem senkrecht zur Kugelfläche K einfallenden Hauptstrahl a der homocentrische Bildpunkt A'_p auf dem austretenden Hauptstrahl a'.

Bestimmen wir so auf jedem nach dem Mittelpunkt M gerichteten Hauptstrahl den Lichtpunkt, welchen ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, dann bilden die Lichtpunkte in einer Meridianebene eine Curve $\mathfrak{z}'$ und die zugehörigen homocentrischen Bildpunkte liegen auf dem Kreis z'. Die nach M gerichteten einfallenden Hauptstrahlen, welche den Kreis ζ' berühren, begrenzen die Curve $\mathfrak{z}'$ und die entsprechenden austretenden Hauptstrahlen begrenzen als geometrische Grenzlagen auf dem Kreis z' das Bogenstück, welches die homocentrischen Bildpunkte erfüllen. Für die Curve $\mathfrak{z}'$, deren geometrische Fortsetzung nicht gezeichnet ist, erhält man eine Gleichung vom vierten Grade, wie sich durch einfache Rechnung ergiebt. Allen Lichtpunkten auf der Rotationsfläche, welche durch Drehung der begrenzten Curve $\mathfrak{z}'$ um die Linsenachse entsteht, entsprechen homocentrische Bildpunkte auf einer Kugelhaube.

Durch die Gerade $\Pi\Theta'$, welche $\Theta\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}_q$ schneidet, und durch die Gerade $P\mathfrak{A}_q$ ergiebt sich zu dem Punkt Θ' auf dem Hauptstrahl α der entsprechende Punkt A_q auf dem Hauptstrahl a. Demnach entspricht dem Lichtpunkt A_q auf dem einfallenden Hauptstrahl a der mit Θ' coincidirende homocentrische Bildpunkt auf dem austretenden Hauptstrahl a' und es ergiebt sich eine punktirt gezeichnete Curve $\mathfrak{k}'$ vom vierten Grade, auf welcher

alle Lichtpunkte liegen, denen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K' entsprechen. Durch Drehung dieser Curve $\mathfrak{k}'$ um die Linsenachse entsteht eine Rotationsfläche, die alle Lichtpunkte enthält, deren homocentrische Bildpunkte sich auf einer Kugelhaube der Kugelfläche K' befinden.

Bei dem speciellen Fall einer planconvexen Linse KK' in Figur 14 sind alle einfallende Hauptstrahlen senkrecht zu der Ebene K gerichtet und zu dem mit Z' coincidirenden Punkt A_p des Hauptstrahles α ergiebt sich der entsprechende Punkt A_p auf dem einfallenden Hauptstrahl a, indem wir den Punkt A_p so bestimmen, dass $\Theta \mathsf{A}_p : \Theta A_p = n : 1 = 3 : 2$ ist. Die Curve $\mathfrak{z}'$ ist dann affin zu dem Kreis ζ' in Bezug auf die Gerade K als Affinitätsachse und demnach ist das physikalisch zur Geltung kommende Curvenstück $\mathfrak{c}\mathfrak{z}'\mathfrak{d}$ eine halbe Ellipse, deren grosse Achse $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ parallel zu K und gleich dem Durchmesser des Kreises ζ' ist. Allen Lichtpunkten in einer Meridianebene auf der halben Ellipse $\mathfrak{c}\mathfrak{z}'\mathfrak{d}$ entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Halbkreis z'.

Ferner ergiebt sich, wenn wir den Punkt A_q so bestimmen, dass $\Theta\Theta' : \Theta A_q = n : 1 = 3 : 2$, ein Stück $\mathfrak{k}'$ einer Ellipse, welche zu dem Kreis K' affin ist in Bezug auf K als Affinitätsachse und allen Lichtpunkten in einer Meridianebene auf dem Ellipsenstück $\mathfrak{k}'$ entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K'. Durch Drehung der halben Ellipse $\mathfrak{z}'$ und des Ellipsenstückes $\mathfrak{k}'$ um die Linsenachse wird resp. ein halbes Rotationsellipsoid und eine Haube eines anderen Rotationsellipsoides erzeugt.

Bei einer biconcaven Linse KK' in Figur 15 gehen die einfallenden Hauptstrahlen von dem Mittelpunkt M der Kugelfläche K aus. Die Curven $\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{k}'$ sind in gleicher Weise, wie in Figur 13 bei der biconvexen Linse, construirt und sind vom vierten Grade. Den Lichtpunkten in einer Meridianebene auf der begrenzten Curve $\mathfrak{z}'$ entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreisbogen z' und den Lichtpunkten auf der begrenzten Curve $\mathfrak{k}'$ entsprechen homocentrische Bildpunkte auf dem Kreis K'. Für eine planconcave Linse ergeben sich die analogen Beziehungen, wie bei der planconvexen Linse in Figur 14.

Wenn der einfallende Hauptstrahl mit der Linsenachse einen kleinen Winkel bildet, werden die Lagenbeziehungen für die Construction der Lichtpunkte A_p, A_q und der entsprechenden homocentrischen Bildpunkte A'_p, A'_q ungünstig, weil dann ungenaue Schnittpunkte auftreten. Zwar kann man durch projective Hilfsconstructionen die erforderlichen Schnittpunkte meist genauer erhalten; aber die Construction wird dadurch umständlich. Wir wollen deshalb noch die Formel ableiten, durch welche man die Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte entsprechen, rechnerisch bestimmen kann; aber die erforderliche Rechnung ist sehr umständlich. Sind in Figur 16 die schiefen Coordinaten des Punktes G mit f_1, φ_1 und des Punktes M mit f_2, φ_2, ferner die Strecken ΘA_1, $\Theta \mathsf{A}_1$, ΘA_2, $\Theta \mathsf{A}_2$

resp. mit x_1, χ_1, x_2, χ_2 bezeichnet und beziehungsweise positiv in den Richtungen Θa, $\Theta\alpha$, dann ist nach Gleichung 3) und 6):

$$\frac{f_1}{x_1}+\frac{\varphi_1}{\chi_1}=1,\quad \frac{f_2}{x_2}+\frac{\varphi_2}{\chi_2}=1.$$

Sind analog die schiefen Coordinaten des Punktes G' mit f'_1, φ'_1 und des Punktes M' mit f'_2, φ'_2, ferner die Strecken $\Theta'A'_1$, $\Theta'A_1$, $\Theta'A'_2$, $\Theta'A_2$ resp. mit x'_1, χ'_1, x'_2, χ'_2 bezeichnet und beziehungsweise positiv in den Richtungen $\Theta'a'$, $\Theta'\alpha$, dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{f'_1}{x'_1}+\frac{\varphi'_1}{\chi'_1}=1,\quad \frac{f'_2}{x'_2}+\frac{\varphi'_2}{\chi'_2}=1.$$

Setzen wir die Strecke $\Theta\Theta'=\delta$, dann ist $\chi_1+\chi'_1=\delta$ und $\chi_2+\chi'_2=\delta$. Hiernach ergiebt sich:

$$13)\qquad \frac{\varphi_1}{1-\frac{f_1}{x_1}}+\frac{\varphi'_1}{1-\frac{f'_1}{x'_1}}=\delta,$$

$$14)\qquad \frac{\varphi_2}{1-\frac{f_2}{x_2}}+\frac{\varphi'_2}{1-\frac{f'_2}{x'_2}}=\delta.$$

Nehmen wir die Punkte A'_1, A'_2 in einem Punkt A' vereint, also $x'_1=x'_2=x'$, und eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen x', dann ergiebt sich für die beiden projectiven Punktreihen $A_1\ldots$ und $A_2\ldots$ auf dem Hauptstrahl $\dot{a}$ die folgende Gleichung:

$$15)\qquad \begin{cases} x_1x_2[f'_1(\varphi_1-\delta)(\varphi_2+\varphi'_2-\delta)-f'_2(\varphi_2-\delta)(\varphi_1+\varphi'_1-\delta)]\\ -x_1[\delta f_2f'_2(\varphi_1+\varphi'_1-\delta)+f'_1f_2(\varphi_1-\delta)(\varphi'_2-\delta)],\\ +x_2[\delta f_1f'_1(\varphi_2+\varphi'_2-\delta)+f_1f'_2(\varphi'_1-\delta)(\varphi_2-\delta)],\\ -\delta f_1f'_1f_2(\varphi'_2-\delta)+\delta f_2f'_2f_1(\varphi'_1-\delta)=0.\end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} P&=f'_1(\varphi_1-\delta)(\varphi_2+\varphi'_2-\delta)-f'_2(\varphi_2-\delta)(\varphi_1+\varphi'_1-\delta)\\ Q_1&=\delta f_2f'_2(\varphi_1+\varphi'_1-\delta)+f'_1f_2(\varphi_1-\delta)(\varphi'_2-\delta)\\ Q_2&=\delta f_1f'_1(\varphi_2+\varphi'_2-\delta)+f_1f'_2(\varphi_1'-\delta)(\varphi_2-\delta)\\ R&=\delta f_1f'_1f_2(\varphi'_2-\delta)-\delta f_2f'_2f_1(\varphi_1'-\delta),\end{aligned}$$

dann erhalten wir:

$$15a)\qquad x_1x_2P-x_1Q_1+x_2Q_2=R.$$

Um die Doppelpunkte der beiden projectiven Punktreihen $A_1\ldots$ und $A_2\ldots$ rechnerisch zu bestimmen, setzen wir $x_1=x_2=x$, dann ergiebt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$16)\qquad x^2P-x(Q_1-Q_2)=R$$

$$17)\qquad x=\frac{Q_1-Q_2\pm\sqrt{4PR+(Q_1-Q_2)^2}}{2P}.$$

Sind in Figur 17 die Radien r, r' der Kugelfläche K, K' und die Linsendicke $JJ' = d$ gegeben, ist der Abstand $\Theta H = h$ des Eintrittspunktes Θ von der Linsenachse und der Einfallswinkel e des Hauptstrahles a angenommen, dann wird der Brechungswinkel ε in der Linse an der Kugelfläche K nach $n \,.\, \sin \varepsilon = \sin e$ berechnet; ferner wird der Brechungswinkel ε' in der Linse an der Kugelfläche K' und der Austrittswinkel e' des Hauptstrahles a' nach $\sin e' = n \sin \varepsilon'$ berechnet.

Nach den Formeln 9) und 10) ist:

$$f_1 = \frac{r \sin \varepsilon \cos^2 e}{\sin (e - \varepsilon)}, \quad \varphi_1 = \frac{r \sin e \cos^2 \varepsilon}{\sin (e - \varepsilon)}, \quad f_2 = \frac{r \sin \varepsilon}{\sin (e - \varepsilon)}, \quad \varphi_2 = \frac{r \sin e}{\sin (e - \varepsilon)},$$

$$f'_1 = \frac{r \sin \varepsilon' \cos^2 e'}{\sin (e' - \varepsilon')}, \quad \varphi'_1 = \frac{r' \sin e' \cos^2 \varepsilon'}{\sin (e' - \varepsilon')}, \quad f'_2 = \frac{r' \sin \varepsilon'}{\sin (e' - \varepsilon')}, \quad \varphi'_2 = \frac{r' \sin e'}{\sin (e' - \varepsilon')}.$$

Durch diese Werthe erhalten wir nach Einsetzung aus 17) die beiden Werthe für x und damit auf dem einfallenden Hauptstrahl a die beiden Lichtpunkte, denen homocentrische Bildpunkte auf dem austretenden Hauptstrahl a' entsprechen. Die Bildpunkte ergeben sich dann durch Rechnung aus 13) oder 14).

Je nachdem

$$4PR + (Q_1 - Q_2)^2 \gtreqless 0$$

ist, sind die Lichtpunkte reell, imaginär oder fallen zusammen.

XVIII.

Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten.

Von

Dr. R. Müller,

Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

Hierzu Tafel XV Fig. 1—7.

Die Focalcurve ist bekanntlich eine circulare Curve dritter Ordnung von der besonderen Beschaffenheit, dass ihr Focalcentrum — das heisst der reelle Schnittpunkt ihrer imaginären Asymptoten — auf der Curve selbst liegt. Sie wird am einfachsten construirt als Erzeugniss eines Kreisbüschels und eines ihm projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen.* Der Mittelpunkt dieses Strahlenbüschels ist ihr Focalcentrum; die Mittelpunkte der Kreise liegen auf einer Geraden, die zur reellen Asymptote parallel ist und den Abstand zwischen dieser und dem Focalcentrum halbirt. Wir bezeichnen dieselbe als die Mittellinie, die — reellen oder imaginären — Grundpunkte des Kreisbüschels als die Grundpunkte der Curve.

Die Focalcurve kann ferner definirt werden als der geometrische Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar; sie ist demnach auch der Ort eines Punktes, welcher die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits durch eine symmetrische Involution projicirt. In der Kinematik der starren ebenen Systeme begegnen wir ihr als Kreispunktcurve, das heisst als dem Orte derjenigen Systempunkte, die in vier auf einander folgenden Systemlagen sich auf einem Kreise befinden.** In dieser Bedeutung spielt sie z. B. in der Lehre von der angenäherten Geradführung eine wichtige Rolle.

* Vergl. Schröter, über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung (Mathematische Annalen Bd. 5 S. 50). Durège, über die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet (daselbst S. 83).

** Burmester: Kinematik I S. 616.

Unter den ebenen Curven dritter Ordnung nimmt die Focalcurve eine ähnlich ausgezeichnete Stellung ein, wie der Kreis unter den Kegelschnitten. Es dürfte deshalb von Nutzen sein, diese specielle Curve eingehender zu untersuchen. Im Folgenden beschränken wir uns immer auf die Betrachtung des allgemeinen Falls, dass die Curve keinen Doppelpunkt hat. Wir beginnen mit der Construction der Focalcurve aus sechs beliebig gewählten Punkten; dazu bedarf es aber zunächst der Ableitung einiger Hilfssätze über circulare Curven dritter Ordnung im Allgemeinen.

§ 1. Construction des Focalcentrums einer durch sieben Punkte gegebenen circularen Curve dritter Ordnung.

Durch sieben beliebig gegebene Punkte $1, 2, \ldots 7$ ist eine circulare Curve dritter Ordnung c eindeutig bestimmt. Beschreibt man durch irgend zwei dieser Punkte, z. B. durch 1 und 2, ein Kreisbüschel, so schneidet jeder solche Kreis die Curve — von den imaginären Kreispunkten I, J abgesehen — noch in zwei weiteren Punkten, und die Verbindungslinie derselben geht bekanntlich durch einen festen Punkt P der c, den Gegenpunkt der vier Punkte $1, 2, I, J$. Dann ist die c das Erzeugniss des Kreisbüschels $12(34\ldots)$ und des ihm projectiven Strahlenbüschels $P(34\ldots)$, mithin ist das Doppelverhältniss der vier von P nach 3, 4, 5, 6 gehenden Strahlen gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Kreise des Büschels 12, und der Punkt P liegt demnach auf dem Kegelschnitte, der durch 3, 4, 5, 6 geht und das Doppelverhältniss $12(3456)$ fasst. Ebenso befindet sich P auf dem Kegelschnitte, der über den Punkten 4, 5, 6, 7 das Doppelverhältniss $12(4567)$ fasst; folglich kann P als der vierte Schnittpunkt beider Kegelschnitte in bekannter Weise linear construirt werden.

Ein Kreis des Büschels zerfällt in die unendlich ferne Gerade der Ebene und in die Gerade 12. Der entsprechende Strahl des Büschels P schneidet die Curve c in ihrem reellen unendlich fernen Punkte U und in einem auf 12 liegenden Punkte Q. Um die zum Punkte U gehörende Asymptote u zu erhalten, betrachte man P und Q als Grundpunkte eines neuen Kreisbüschels und construire zu P, Q, I, J den Gegenpunkt S in derselben Weise, wie vorher den Punkt P als Gegenpunkt von $12IJ$. Nun schneidet der in die Geraden PQ und IJ zerfallende Kreis die Curve c noch in zwei Punkten, die beide mit U zusammenfallen. Die Verbindungslinie derselben ist die Asymptote u, und diese geht also durch den Punkt S. Wählt man demnach zur Erzeugung der Curve c ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte auf einer Parallelen zur reellen Asymptote liegen, so ist der Mittelpunkt des zugehörigen Strahlenbüschels der Asymptotenschnittpunkt S.*

* In anderer Weise abgeleitet von Durège, diese Zeitschrift Bd. 14 S. 368.

Ist die Parallele zu u, welche die Grundpunkte des erzeugenden Kreisbüschels verbindet, unendlich benachbart zur unendlich fernen Geraden, so sind die Grundpunkte selbst unendlich benachbart zu den imaginären Kreispunkten I, J, und das Kreisbüschel verwandelt sich in ein Büschel concentrischer Kreise um das Focalcentrum F der Curve c. Dann folgt aus dem vorhergehenden Satze: Jeder Kreis um das Focalcentrum F schneidet die Curve c in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Asymptotenschnittpunkt S geht. Oder: Die Mittelsenkrechten aller Sehnen, welche die Curve c auf den durch den Asymptotenschnittpunkt S gehenden Strahlen abschneidet, gehen durch das Focalcentrum F.*

Sind demnach die Punkte P, Q, S ermittelt, so fälle man auf irgend zwei Strahlen des Büschels S, z. B. auf $S3$, $S4$, Lothe aus den Mittelpunkten der entsprechenden Kreise $PQ3$, $PQ4$; dieselben schneiden sich im Focalcentrum F.

Die Curve c construirt man am einfachsten als Erzeugniss des Kreisbüschels PQ und des ihm projectiven Strahlenbüschels S, wobei die Strahlen von S senkrecht sind auf den Geraden, die den Punkt F mit den Mittelpunkten der entsprechenden Kreise verbinden.

§ 2. Sätze über Büschel von circularen Curven dritter Ordnung.

Acht Punkte $IJ12\ldots6$ bestimmen ein Büschel von Curven dritter Ordnung; durch Angabe der Tangente in einem der Grundpunkte, z. B. in I, wird eine bestimmte Curve c des Büschels eindeutig definirt. Ordnet man demnach in den Strahlenbüscheln um I und J immer zwei solche Strahlen i und j einander als entsprechend zu, die in diesen Punkten dieselbe Curve c berühren, so sind die Strahlenbüschel projectiv auf einander bezogen, und der Schnittpunkt F von i und j beschreibt einen durch die Punkte I und J gehenden Kegelschnitt f (Fig. 1). Fallen nun die Punkte I und J mit den imaginären Kreispunkten zusammen, so wird c eine circulare Curve dritter Ordnung, F ihr Focalcentrum, und dann ergiebt sich der Satz: Die Focalcentra eines Büschels von circularen Curven dritter Ordnung erfüllen einen Kreis f.

In Figur 1 geht durch jeden Punkt U der Geraden IJ eine bestimmte Curve c des Büschels. Hierdurch wird die in der Geraden IJ liegende Punktreihe $UU'U''\ldots$ projectiv bezogen auf das Büschel $ii'i''\ldots$ der zugehörigen Tangenten in I und folglich auch auf die Punktreihe $FF'F''\ldots$, deren Träger der Kegelschnitt f ist. Lässt man den Punkt U mit I zusammenfallen, so berührt die zugehörige Curve c die Gerade IJ in I,

* Auf andere Weise erhalten von Eckardt, diese Zeitschrift Bd. 10 S. 321.

also wird i identisch mit IJ und F identisch mit J. Wird andererseits der Punkt J der Reihe $UU'U''\ldots$ zugewiesen, so entspricht ihm in $FF'F''\ldots$ der Punkt I. Bezeichnet man demnach mit U_1 den vierten harmonischen Punkt zu I, J, U, mit F_1 den entsprechenden Punkt auf f, so sind auch J, I, F, F_1 vier harmonische Punkte, folglich geht die Gerade FF_1 durch den Pol der Geraden IJ in Bezug auf f. — Seien jetzt wieder I, J die imaginären Kreispunkte der Ebene. Dann liegen die Punkte F, F_1 auf einem Durchmesser des Kreises f, und die Punkte U, U_1 gehören zu zwei circularen Curven c, c_1, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen. Das heisst: In dem Büschel von circularen Curven dritter Ordnung haben je zwei Curven, deren Asymptoten einen rechten Winkel einschliessen, zu Focalcentren immer zwei Gegenpunkte des Kreises f.

Verbindet man endlich in Figur 1 einen beliebigen Punkt F_0 des Kegelschnitts f mit entsprechenden Punkten der Punktreihen $UU'U''\ldots$ und $FF'F''\ldots$, so erhält man zwei projective Strahlenbüschel, in denen die Strahlen F_0I, F_0J einander doppelt entsprechen; die beiden Büschel bilden demnach eine Involution, von welcher F_0I, F_0J ein Paar entsprechende Strahlen sind. In dem besonderen Falle, wo I und J die imaginären Kreispunkte darstellen, ist diese Involution symmetrisch, weil ihre Doppelstrahlen durch I und J harmonisch getrennt werden. Hieraus folgt: Die Geraden, welche die reellen unendlich fernen Punkte, sowie die entsprechenden Focalcentra des Büschels von circularen Curven dritter Ordnung mit einem beliebigen Punkte F_0 des Kreises f verbinden, sind die Paare einer symmetrischen Involution.

§ 3. Die Focalcurve als Sonderfall der circularen Curve dritter Ordnung. Ein charakteristischer Kreis.

Schreibt man die Gleichung einer circularen Curve dritter Ordnung c für rechtwinklige Coordinaten in der Form:

$$1)\qquad (\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}y)(x^2+y^2)+\mathfrak{c}x^2+\mathfrak{d}xy+\mathfrak{e}y^2+\mathfrak{f}x+\mathfrak{g}y+\mathfrak{h}=0,$$

so erhält man die Coordinaten ξ, η des Focalcentrums F, indem man ausdrückt, dass jede der Geraden, die F mit den imaginären Kreispunkten verbinden, nur einen endlichen Punkt mit der c gemein hat; dann ergiebt sich nach einfacher Rechnung:

$$2)\qquad \xi=-\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{c}-\mathfrak{e})+\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{2(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)},\quad \eta=-\frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{e}-\mathfrak{c})+\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{2(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)}.$$

Die Curve c ist eine Focalcurve, wenn sie durch den Punkt F hindurchgeht, wenn also die Coordinaten ξ, η der Gleichung 1) identisch genügen. Nun ist nach 2):

$$\mathfrak{c}\xi^2 + \mathfrak{d}\xi\eta + \mathfrak{e}\eta^2 = \frac{(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}^2\mathfrak{e})\{(\mathfrak{c}-\mathfrak{e})^2 + \mathfrak{d}^2\}}{4(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{a}^2\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}^2\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}(\xi^2+\eta^2),$$

mithin:

$$(\mathfrak{a}\xi + \mathfrak{b}\eta)(\xi^2+\eta^2) + \mathfrak{c}\xi^2 + \mathfrak{d}\xi\eta + \mathfrak{e}\eta^2 = \frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}{2}(\xi^2+\eta^2).$$

Die Gleichung 1) stellt also eine Focalcurve dar, sobald der Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}{2}(\xi^2+\eta^2) + \mathfrak{f}\xi + \mathfrak{g}\eta + \mathfrak{h}$$

verschwindet; oder, anders ausgedrückt, die circulare Curve dritter Ordnung c ist eine Focalcurve, wenn der Kreis k

$$3)\qquad \frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}{2}(x^2+y^2) + \mathfrak{f}x + \mathfrak{g}y + \mathfrak{h} = 0$$

durch ihr Focalcentrum geht.

Die Curve c und der Kreis k stehen in einer einfachen geometrischen Beziehung. Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung die linken Seiten der Gleichungen 1) und 3) bez. mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}$ und setzt

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{K} = \mathfrak{D} = (\mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}'y)(x^2+y^2) + \mathfrak{c}'x^2 + \mathfrak{d}'xy + \mathfrak{e}'y^2 + \mathfrak{f}'x + \mathfrak{g}'y + \mathfrak{h}',$$

so ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}' = \frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{e}}{2}$, $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}' = \frac{\mathfrak{e}-\mathfrak{c}}{2}$, $\mathfrak{f}' = \mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' = 0$, $\mathfrak{c}' + \mathfrak{e}' = 0$, $\mathfrak{c}' - \mathfrak{e}' = \mathfrak{c} - \mathfrak{e}$. Dann wird durch die Gleichung $\mathfrak{D} = 0$ eine circulare Curve dritter Ordnung d dargestellt, die im Coordinaten-Anfangspunkte einen Doppelpunkt hat, deren reelle Asymptote parallel ist zur reellen Asymptote von c und deren Focalcentrum zufolge der Gleichungen 2) mit F zusammenfällt. Dieselbe ist überdies eine Focalcurve, denn es ist:

$$\frac{\mathfrak{c}'+\mathfrak{e}'}{2}(\xi^2+\eta^2) + \mathfrak{f}'\xi + \mathfrak{g}'\eta + \mathfrak{h}' = 0.$$

Die Curven c und d schneiden sich, von den unendlich fernen Punkten abgesehen, noch in vier endlichen Punkten, und diese liegen sämmtlich auf dem Kreise k.

Man kann nun zu jedem Punkte P der Ebene eine Focalcurve d construiren, die in P einen Doppelpunkt besitzt, und die mit der gegebenen Curve c das Focalcentrum F, sowie den reellen unendlich fernen Punkt gemein hat; und zwar wird durch diese $3+5+1$ Bedingungen die Curve d eindeutig bestimmt. Hierdurch wird aber auch jedem Punkte P in Bezug auf die Curve c ein bestimmter Kreis k zugeordnet, der die vier endlichen Schnittpunkte von c und d enthält und der immer dann und nur dann durch das Focalcentrum F geht, wenn die c eine Focalcurve ist. Der so definirte Kreis k soll im Folgenden als der dem Punkte P in Bezug auf die Curve c zugeordnete Kreis bezeichnet werden.

Liegt der Punkt P auf c, so zählt er für zwei Schnittpunkte der Curven c und d, und dann berührt der zugeordnete Kreis k die Curve c in P. In diesem Falle ergiebt sich eine einfache Construction des Kreises k. Wählt man nämlich den Punkt P zum Coordinaten-Anfangspunkt und zieht die y-Achse parallel zur reellen Asymptote u von c, so hat man für die Curve c, die Asymptote u und den Kreis k bez. die Gleichungen:

$$x(x^2+y^2)+\mathfrak{c}x^2+\mathfrak{d}xy+\mathfrak{e}y^2+\mathfrak{f}x+\mathfrak{g}y=0,$$

$$x+\mathfrak{e}=0,$$

$$\frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}}{2}(x^2+y^2)+\mathfrak{f}x+\mathfrak{g}y=0$$

und für den Punkt F wird

$$\xi=-\frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{e}}{2}.$$

Sind nun Q und R bez. die Schnittpunkte der y-Achse mit c und k, V der Schnittpunkt der x-Achse mit u, so ist:

$$PQ=-\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{e}},$$

$$PR=-\frac{2\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}+\mathfrak{e}},$$

$$PV=-\mathfrak{e},$$

also

$$QR=\frac{\mathfrak{g}(\mathfrak{c}-\mathfrak{e})}{\mathfrak{e}(\mathfrak{c}+\mathfrak{e})}$$

und

$$\frac{PR}{QR}=-\frac{2\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{e}}=-\frac{PV}{\xi}.$$

Kennt man demnach von der Curve c des Focalcentrum F, die Asymptote u, auf einer Parallelen zu u die Punkte P und Q und in P die Tangente p — was zur eindeutigen Bestimmung von c gerade ausreicht — so ziehe man PV senkrecht zu u, PG senkrecht zu PQ, QW parallel und gleich zu FG (Fig. 2). Dann geht der gesuchte Kreis k durch den Schnittpunkt R von VW mit PQ und berührt in P die Gerade p.

Die Coefficienten der Gleichung 3) sind linear zusammengesetzt aus den Coefficienten der Gleichung 1). Bestimmt man also zum Punkte P in Bezug auf zwei circulare Curven dritter Ordnung $\mathfrak{C}=0$ und $\mathfrak{C}'=0$ die zugeordneten Kreise $\mathfrak{K}=0$ und $\mathfrak{K}'=0$, so entspricht demselben Punkte P in Bezug auf die Curve $\mathfrak{C}-\lambda\mathfrak{C}'=0$ der Kreis $\mathfrak{K}-\lambda\mathfrak{K}'=0$. Hieraus folgt: Die einem Punkte P in Bezug auf ein Büschel von circularen Curven dritter Ordnung zugeordneten Kreise bilden gleichfalls ein Büschel.

§ 4. Construction der Focalcurve aus sechs beliebig gewählten Punkten.

Sechs beliebig gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmen ein Büschel von circularen Curven dritter Ordnung c, c', c''... und einen Kreis f als Ort der zugehörigen Focalcentra F, F' F''... Construirt man für irgend einen Punkt P der Ebene in Bezug auf c, c', c''... die zugeordneten Kreise k, k', k''..., so ist das entstehende Kreisbüschel projectiv bezogen auf die Punktreihe $FF'F''$.... Verbindet man also einen beliebigen Punkt F_0 des Kreises f mit F, F' F''..., so ist auch das Strahlenbüschel $F_0(FF'F'')$ projectiv zu dem Kreisbüschel $kk'k''$..., und dann erzeugen beide eine circulare Curve dritter Ordnung z. Dieselbe schneidet den Kreis f in F_0 und überdies in drei endlichen Punkten F_I, F_{II}, F_{III}, und diese gehören als Focalcentra zu drei bestimmten Curven c_I, c_{II}, c_{III} des Büschels $cc'c''$... Nun ist F_I als Punkt der Curve z der eine Schnittpunkt des Strahls F_0F_I mit dem entsprechenden Kreise k_I des Büschels $kk'k''$...; dem Punkt P wird also in Bezug auf c_I ein Kreis k_I zugeordnet, der durch das zugehörige Focalcentrum F_I geht, mithin ist c_I nach einem der vorher abgeleiteten Sätze eine Focalcurve. Hieraus folgt: *Durch sechs gegebene Punkte gehen im Allgemeinen drei Focalcurven.*

Die Construction der Focalcurven c_I, c_{II}, c_{III} erfordert demnach die Bestimmung des Kreises f und der Curve z. Um einen Punkt von f zu erhalten, füge man zu den sechs gegebenen Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 einen siebenten Punkt U beliebig hinzu und construire für die so bestimmte Curve c das Focalcentrum F. Dabei lässt man den Punkt U zweckmässig zusammenfallen mit dem unendlich fernen Punkte einer Geraden, die zwei der gegebenen Punkte verbindet. Sei etwa U der unendlich ferne Punkt der Geraden 12, so lege man durch die Punkte 1 und 2 das Kreisbüschel $12(3456U)$ und bestimme zunächst den Punkt S, in welchem die Curve c ihre Asymptote u schneidet. Nach § 1 ergiebt sich S als der vierte Schnittpunkt zweier Hyperbeln $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$, die bez. durch die Punkte 3, 4, 5, U und 3, 4, 6, U gehen und die Doppelverhältnisse $12(345U)$ und $12(346U)$ fassen. Die Ausführung dieser Construction gestaltet sich in folgender Weise (Fig. 3).

Errichtet man zu den Geraden 13, 14, 15, 16 bez. Lothe in den Punkten 3, 4, 5, 6 und bestimmt ihre Schnittpunkte 3′, 4′, 5′, 6′ mit einer durch 2 senkrecht zu 12 gezogenen Geraden, so liegen die Punkte 3′, 4′, 5′, 6′ bez. auf den Kreisen 123, 124, 125, 126, folglich ist das Doppelverhältniss

$$12(345U) = (3'4'5'\infty) = \frac{3'5'}{4'5'}.$$

Man ziehe nun durch 5 zu 12 eine Parallele, welche 34 in 5_0 schneidet, mache auf einer durch 3 beliebig gelegten Geraden, z. B. auf 13, die Strecken

$$34'' = 3'4', \quad 35'' = 3'5',$$

bestimme den Schnittpunkt $\mathfrak{S}$ von $44''$ und $5_0 5''$ und ziehe die Gerade $\mathfrak{S}\mathfrak{V}$ parallel zu 13 bis 34. Dann ist das Doppelverhältniss

$$(3\,4\,5_0\,\mathfrak{V}) = (3\,4''\,5''\,\infty) = \frac{3'5'}{4'5'} = 12(3\,4\,5\,U),$$

mithin ist die Gerade $\mathfrak{V}U$ eine Asymptote der Hyperbel $\mathfrak{v}$.

Macht man ferner auf 13 die Strecke $36'' = 3'6'$ und zieht $6\,6_0$ parallel zu 12 bis 34, darauf $6_0 6''$ bis $\mathfrak{T}$ auf $44''$ und $\mathfrak{T}\mathfrak{W}$ parallel zu 13 bis 34, so bestimmen die Punkte 3, 4, 6, U mit der Asymptote $\mathfrak{W}U$ die Hyperbel $\mathfrak{w}$.

Um jetzt den vierten Schnittpunkt S der Hyperbeln $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ zu ermitteln, construire man zunächst den zweiten Schnittpunkt 6^* der Geraden 36 mit $\mathfrak{v}$, sowie den zweiten Schnittpunkt 5^* von 45 mit $\mathfrak{w}$. In dem der Hyperbel $\mathfrak{v}$ eingeschriebenen Fünfeck $3\,4\,5\,U\,6^*$ schneidet die Tangente des Punktes U die gegenüberliegende Seite 34 in $\mathfrak{V}$; treffen sich also 36 und $5U$ in $\mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{V}\mathfrak{Q}$ die Pascal'sche Gerade, und dann geht $U6^*$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{R}$ von 45 und $\mathfrak{V}\mathfrak{Q}$. Ebenso findet man 5^* durch folgende Construction:

$$\mathfrak{Q}' = 45,\ 6U; \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{W}\mathfrak{Q}',\ 36; \quad 5^* = 45,\ U\mathfrak{R}'.$$

Die Hyperbeln $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ bestimmen nun ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten 3, 4, U, S. Legt man durch zwei derselben, etwa 3 und 4, einen festen Kegelschnitt, z. B. das Geradenpaar 36, 45, so schneidet dieser alle Kegelschnitte des Büschels noch in Punktpaaren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt $\mathfrak{P}$ der Geraden US gehen. Die Hyperbeln $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ treffen jenen festen Kegelschnitt bez. in 6^* und 5, sowie in 6 und 5^*; demnach ist $\mathfrak{P}$ der Schnittpunkt von 6^*5 und $6\,5^*$, und dann liegt S auf der zu 12 parallelen Geraden $\mathfrak{P}U$, d. h. $\mathfrak{P}U$ ist die reelle Asymptote u der Curve c. Ein dritter Kegelschnitt des Büschels wird dargestellt durch das Geradenpaar $3U$, $4S$. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ bez. die Schnittpunkte von $3U$ und 45, sowie von $4S$ und 36, so geht die Gerade $\mathfrak{N}\mathfrak{N}'$ gleichfalls durch $\mathfrak{P}$, folglich ist

$$\mathfrak{N}' = 36,\ \mathfrak{P}\mathfrak{N}; \quad S = \mathfrak{P}U,\ 4\mathfrak{N}'.$$

Mit Hilfe des Asymptotenschnittpunktes S erhält man unmittelbar das gesuchte Focalcentrum F der Curve c. Die Geraden $1\,3'$, $1\,4'$ schneiden nämlich die Mittelsenkrechte der Strecke 12 bez. in den Mittelpunkten $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ der Kreise 123, 124. Fällt man von $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ bez. Lothe auf $S3$, $S4$, so treffen sich dieselben nach § 1 im Punkte F.

Man construire nun in ganz derselben Weise das Focalcentrum F' der circularen Curve dritter Ordnung c', die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6,

sowie durch den unendlich fernen Punkt U' der Geraden 13 geht. Nach dem letzten Satze in § 2 bilden die Strahlen, welche F und U, F' und U' mit irgend einem Punkte des Kreises f, z. B. mit dem zu F unendlich benachbarten Punkte verbinden, zwei Paare einer symmetrischen Involution. Zieht man also durch F die Gerade t so, dass der Winkel $F'Ft$ gleich ist dem Winkel UFU', so berührt t in F den Kreis f, der durch F, F', t demnach bestimmt ist.

Um zweitens die Curve s zu ermitteln, ersetzt man zweckmässig den vorher mit P bezeichneten Punkt durch einen der sechs gegebenen Punkte, z. B. durch 1. Dann sind zunächst die dem Punkte 1 in Bezug auf die Curven c, c', c''... zugeordneten Kreise k, k', k''... zu construiren. Fällt man in Figur 3 von F auf $S1$ ein Loth, welches die Mittelsenkrechte der Strecke 12 in $\mathfrak{M}_1$ schneidet, so gehört zu dem Mittelpunkte $\mathfrak{M}_1$ ein Kreis, der die Curve c im Punkte 1 berührt; zieht man also durch 1 die Gerade p senkrecht zu $1\mathfrak{M}_1$, so ist dieselbe die Tangente der c im Punkte 1. Aus den Punkten F, 1, 2 und den Geraden u und p ergiebt sich nach Figur 2 der Kreis k.

Construirt man ebenso für die Curve c' im Punkte 1 die Tangente p' und den Kreis k', so bestimmen k und k' den zweiten Grundpunkt des Kreisbüschels $kk'k''$...

Sei ferner U'' der unendlich ferne Punkt der Geraden 14, c'' die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, U'' gehende circulare Curve dritter Ordnung. Dann findet man auf dem Kreise f das zugehörige Focalcentrum F'', indem man den Winkel $F'FF''$ gleich macht dem Winkel $U''FU'$. Fällt man von 2 und 3 Lothe auf die Geraden, welche F'' bez. mit den Mittelpunkten der Kreise 124 und 134 verbinden, so treffen sich dieselben im Asymptotenschnittpunkte S'', und nun ergiebt sich wie vorhin die Tangente p'' der Curve c'' im Punkte 1.

Von den beiden projectiven Strahlenbüscheln $F(tF'F''...)$ und $1(pp'p''...)$ kennt man somit drei Paare entsprechender Strahlen. Dadurch wird aber auch das Strahlenbüschel $F(tF'F''...)$ projectiv bezogen auf das Kreisbüschel $kk'k''$..., und dann erzeugen beide die Curve s, welche den Kreis f in den Punkten F, F_I, F_{II}, F_{III} durchschneidet.

Es ist endlich die Focalcurve selbst zu construiren, die z. B. den Punkt F_I zum Focalcentrum hat. Macht man den Winkel $U'FU_I$ gleich dem Winkel F_IFF', so liefert die Gerade FU_I den unendlich fernen Punkt U_I der gesuchten Curve c_I. Man könnte nun den zugehörigen Asymptotenschnittpunkt S_I nach § 1 bestimmen aus der Bedingung, dass das Strahlenbüschel $S_I(F_I 1 2 3 U_I)$ projectiv sein muss einem Büschel concentrischer Kreise, die um den Punkt F_I bez. mit den Radien Null, F_I1, F_I2, F_I3, $F_IU_I = \infty$ beschrieben werden; dann würde man S_I in analoger Weise wie vorher den Punkt S erhalten als den vierten Schnittpunkt zweier Hyperbeln, welche bereits die Punkte F_I, 1, U_I mit einander ge-

mein haben. Einfacher ist es aber, statt des Punktes S_I die Mittellinie m_I der Curve c_I zu construiren, nach einem Verfahren, das im folgenden Paragraphen abgeleitet wird.

§ 5. Construction der Focalcurve aus dem Focalcentrum, dem reellen unendlich fernen Punkt und drei beliebigen anderen Punkten.

Von einer Focalcurve, die wir jetzt wieder kurz mit c bezeichnen, seien gegeben das Focalcentrum F, der reelle unendlich ferne Punkt U und drei beliebige andere Punkte 1, 2, 3 (Fig. 4). Der Punkt U bestimmt die Richtung der unbekannten Mittellinie m. Versteht man unter M_1, M_2, M_3 bez. die Schnittpunkte der Geraden $F1$, $F2$, $F3$ mit m, so schneiden sich die Kreise, welche M_1, M_2, M_3 zu Mittelpunkten haben und bez. durch 1, 2, 3 gehen, in den beiden reellen oder imaginären Grundpunkten der Curve c; sie haben also jedenfalls eine gemeinschaftliche Chordale $\mathfrak{m}$.

Man ziehe nun in der Richtung nach U, aber sonst beliebig, die Geraden q, r..., bestimme ihre Schnittpunkte Q_1, R_1, ... Q_2, R_2, ... Q_3, R_3... bez. mit den Geraden $F1$, $F2$, $F3$ und beschreibe um die Punkte der ersten Punktreihe Kreise durch 1, ebenso um jeden Punkt der zweiten und dritten Punktreihe einen Kreis bez. durch 2 und 3. Dadurch entstehen drei projective Kreisbüschel mit je zwei in 1, 2, 3 vereinigten Grundpunkten. Es seien ferner $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$... bez. die Chordalen der Kreise um Q_1 und Q_3, um R_1 und R_3..., sowie $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{r}_2$... die Chordalen der Kreise um Q_2 und Q_3, R_2 und R_3... Würden dann z. B. $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ mit einander zusammenfallen, so wären sie identisch mit der Geraden $\mathfrak{m}$, und q wäre die Mittellinie der Curve c.

Haben zwei projective Kreisbüschel die unendlich ferne Gerade entsprechend gemein, so bilden die Chordalen entsprechender Kreise ein Strahlenbüschel, das zu den Kreisbüscheln projectiv ist. Denn die beiden Kreisbüschel erzeugen eine circulare Curve dritter Ordnung, und jeder Kreis des einen Büschels schneidet dieselbe in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt der Curve geht. Diese Verbindungslinie ist aber die Chordale, welche der Kreis mit dem entsprechenden Kreise des anderen Büschels gemein hat. — Im vorliegenden Falle sind also die Parallelstrahlenbüschel $\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1$... und $\mathfrak{q}_2\mathfrak{r}_2$... projectiv zu dem Kreisbüschel $3(Q_3R_3...)$ und folglich auch projectiv zu dem Parallelstrahlenbüschel qr... Dem durch F gehenden Strahle des letzteren entsprechen drei concentrische Kreise um F, und diese haben die unendlich ferne Gerade zur gemeinschaftlichen Chordale; die Büschel $\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1$... und $\mathfrak{q}_2\mathfrak{r}_2$... sind demnach einander ähnlich.

Um den endlichen Doppelstrahl $\mathfrak{m}$ derselben zu construiren, genügt die Kenntniss von zwei Strahlenpaaren $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$. Wählt man als q die unendlich ferne Gerade, so gehen $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ bez. durch die Schnittpunkte des

in 3 zu $F3$ errichteten Lothes mit den Geraden, die in 1 und 2 bez. auf $F1$, $F2$ senkrecht stehen. Schneiden $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ die Gerade r in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ irgend eine Parallele v zu r in $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, so geht die Gerade $\mathfrak{m}$ durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{R}_1\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{R}_2\mathfrak{V}_2$.

Das Parallelstrahlenbüschel $\mathfrak{m}\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\ldots$ trifft die Gerade r in der Punktreihe $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_1\ldots$, und diese ist projectiv zu der Punktreihe $M_3Q_3R_3\ldots$, in welcher das Parallelstrahlenbüschel $mqr\ldots$ die Gerade $F3$ schneidet. Dabei entspricht dem Punkte F der zweiten Punktreihe der unendlich ferne Punkt der ersten, und da auch der Punkt Q_3 unendlich fern ist, so sind $\mathfrak{Q}_1$ und F die Gegenpunkte beider Reihen. Dann geht die perspective Achse x der Punktreihen durch $\mathfrak{R}_1$ parallel zu $\mathfrak{Q}_1F$; zieht man also $\mathfrak{M}F$ bis X auf x und durch X die Gerade XM_3 parallel zu r, so ist XM_3 die gesuchte Mittellinie m.

Beschreibt man um M_3 einen Kreis durch den Punkt 3, so bestimmt derselbe ein Kreisbüschel, das $\mathfrak{m}$ zur Chordale hat. Dasselbe erzeugt die Curve c in Verbindung mit dem Strahlenbüschel F, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen.

§ 6. Die Focalcurven durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.

In Figur 5 sind AA', BB', CC' die drei Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits. Construirt man für jedes der Dreiecke ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ den umschriebenen Kreis, so schneiden sich diese vier Kreise bekanntlich in einem Punkte F_I, dem Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Dann erfüllen die Brennpunkte aller dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte eine Focalcurve c_I, welche durch die sechs Eckpunkte geht, den Punkt F_I zum Focalcentrum hat und deren Mittellinie m_I die Mittelpunkte der drei Diagonalen AA', BB', CC' verbindet.* Wir bezeichnen dieselbe im Folgenden als die Brennpunktscurve des gegebenen Vierseits.

Jede Seite des Vierseits bildet mit dem Kreise, der durch die drei nicht auf ihr liegenden Eckpunkte geht, eine ausgeartete Curve des Büschels von circularen Curven dritter Ordnung, welches A, A', B, B', C C' zu Grundpunkten hat. Demnach liegen die Mittelpunkte der vier Kreise mit dem Punkte F_I auf dem Kreise f, der nach § 2 die Focalcentra aller Curven des Büschels enthält, und dieser ist also im vorliegenden Falle ohne Weiteres bekannt. Da ferner durch den Punkt F_I bereits fünf Curven des Büschels gehen, so ist derselbe der neunte Grundpunkt des Büschels. Mithin ergiebt sich der Satz: Alle circularen Curven dritter Ordnung, welche durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits gehen, enthalten auch den Brennpunkt der dem Vier-

* Durège, Mathematische Annalen Bd. 5 S. 90.

seit eingeschriebenen Parabel. Diejenige Curve des Büschels, die diesen Brennpunkt zum Focalcentrum hat, ist die Brennpunktscurve des Vierseits.

Gegenwärtig ist also von den drei Lösungen der in § 4 behandelten Aufgabe die eine, nämlich die Curve c_I, direct gegeben, und es ist demnach zu erwarten, dass auch die beiden noch fehlenden Lösungen c_{II} und c_{III} sich in weit einfacherer Weise werden construiren lassen, als in dem vorher betrachteten allgemeinen Falle. In der That ergiebt sich eine solche Construction mit Hilfe einiger Sätze, die wir im nächsten Paragraphen ableiten werden.

Vorher möge noch ein interessanter Sonderfall erwähnt werden, in welchem alle drei Lösungen unmittelbar vorliegen. Derselbe tritt ein, wenn zweimal zwei Seiten des gegebenen Vierseits auf einander senkrecht stehen. Sind in Figur 6 die Geraden $A'B'$ und AB' bez. senkrecht auf AB und $A'B$, so ist B' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABA', also auch BB' senkrecht auf AA'. Dann gehen die vier Kreise ABC, $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ durch den Schnittpunkt von AA' und BB'; derselbe ist folglich das Focalcentrum F_I der Brennpunktscurve c_I. Unter den durch F_I gehenden Strahlen schneiden zwei die Curve c_I bez. in A, A' und B, B', und die beiden Kreise über den Durchmessern AA', BB' treffen sich in C und C'; mithin sind C, C' die Grundpunkte der c_I. Construirt man nun die c_I in bekannter Weise aus dem Kreisbüschel CC' und dem Strahlenbüschel F_I, so entspricht dem Kreise $CC'F_I$ der Durchmesser F_IS_I, der die c_I in F_I berührt und in S_I schneidet. Die Punkte F_I und S_I haben aber gleiche Entfernungen von der Mittellinie der Curve, mithin geht durch S_I die reelle Asymptote u_I.

Zwei Kreise über den Durchmessern AB' und $A'B$ schneiden sich in C' und F_I, folglich ist der Punkt C das Focalcentrum einer zweiten Focalcurve c_{II} mit den Grundpunkten C' und F_I. Ebenso wird die dritte Focalcurve c_{III} bestimmt durch das Focalcentrum C' und die Grundpunkte C und F_I; der früher mit f bezeichnete Kreis geht demnach durch die Punkte C, C', F_I und hat zum Mittelpunkte den Schnittpunkt der Mittellinien m_I, m_{II}, m_{III}. Construirt man zu den Punkten C und C' bez. die Gegenpunkte S_{II} und S_{III}, so sind die Asymptoten u_I, u_{II}, u_{III} die Höhen des Dreiecks $S_IS_{II}S_{III}$; sie schneiden sich also in einem Punkte.

§ 7. Die drei Systeme von conjugirten Punkten auf einer zweitheiligen Focalcurve.

Wenn aus einem Punkte Q einer Curve dritter Ordnung c vier reelle Tangenten an dieselbe gehen, so ist die Curve zweitheilig und der Punkt Q befindet sich auf dem unpaaren Zuge derselben. Die zugehörigen Berührungspunkte P, P', P'', P''' werden als ein Punktquadrupel der c bezeichnet. Nennt man ferner zwei Punkte der c einander con-

conjugirt, wenn sie denselben Tangentialpunkt besitzen, so können die Punkte jenes Quadrupels auf drei verschiedene Arten zu Paaren conjugirter Punkte zusammengefasst werden. Aus jedem solchen Paare erhält man neue Paare derselben Art, indem man das Paar aus beliebigen Punkten der Curve auf dieselbe projicirt. Auf diese Weise entstehen aus den Paaren PP', PP'', PP''' drei verschiedene Systeme von conjugirten Punkten. Die Geraden, welche die Paare desselben Systems mit irgend einem Punkte der Curve verbinden, bilden bekanntlich eine Involution.

Ist c eine Focalcurve, so sind die imaginären Kreispunkte I, J ein Paar conjugirte Punkte mit dem Focalcentrum als Tangentialpunkt. Dann werden alle Paare desjenigen der drei Systeme, zu welchem das Paar I, J gehört, aus jedem Curvenpunkte durch eine symmetrische Involution projicirt. Dieses System nimmt also gegenüber den beiden anderen Systemen eine ausgezeichnete Stellung ein; wir bezeichnen es im Folgenden kurz als das symmetrische System von conjugirten Punkten.

Bilden nun wieder die Punkte P, P', P'', P''' ein Quadrupel der Focalcurve c, so geht dieselbe auch durch die Diagonalpunkte Q', Q'', Q''' des vollständigen Vierecks $PP'P''P'''$. Entspricht dem Punkte P in dem symmetrischen System etwa der Punkt P', so ist $P''P'''$ ein Paar derselben Art, und dann werden alle Paare dieses Systems aus dem Schnittpunkte Q' der Geraden PP' und $P''P'''$ durch eine symmetrische Involution projicirt, welche PP' und $P''P'''$ zu Doppelstrahlen hat; mithin steht PP' senkrecht auf $P''P'''$. Bei jeder Focalcurve bilden demnach die Punkte eines Quadrupels ein Viereck, in welchem zwei Gegenseiten einen rechten Winkel einschliessen. Die beiden Paare des Quadrupels, deren Verbindungslinien auf einander senkrecht stehen, gehören zu dem symmetrischen System conjugirter Punkte. Umgekehrt findet man leicht: Wenn bei einer Focalcurve zwei Paare von conjugirten Punkten des symmetrischen Systems Verbindungslinien haben, die auf einander senkrecht stehen, so bilden die beiden Paare ein Punktquadrupel. Und ferner: Wenn eine circulare Curve dritter Ordnung ein Quadrupel besitzt, von welchem zwei Gegenseiten einen rechten Winkel einschliessen, so ist die Curve im Allgemeinen eine Focalcurve. Ist nämlich PP' senkrecht auf $P''P'''$, so existirt immer eine Focalcurve, aus deren Punkten die Paare PP' und $P''P'''$ durch eine symmetrische Involution projicirt werden, und diese geht auch durch die Diagonalpunkte Q', Q'', Q''' des gegebenen Vierecks. Andererseits ist durch die sieben Punkte P, P', P'', P''', Q', Q'', Q''' eine circulare Curve dritter Ordnung im Allgemeinen eindeutig bestimmt — wenn nicht diese sieben Punkte mit den imaginären Kreispunkten die Grundpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung bilden. Wir kommen auf diesen Ausnahmefall weiter unten wieder zurück.

Eine Focalcurve ist bekanntlich eintheilig oder zweitheilig, je nachdem ihre Grundpunkte imaginär oder reell sind. Wird in Figur 7 eine zweitheilige Focalcurve c gegeben durch das Focalcentrum F und die Grundpunkte G und H, so ist ihre reelle Asymptote u senkrecht auf GH; dieselbe schneidet c in dem Gegenpunkte S des Punktes F auf dem durch F, G, H gehenden Kreise. Betrachtet man die c als Erzeugniss des Strahlenbüschels F und des ihm projectiven Kreisbüschels GH, so entspricht dem Strahl SG der Kreis des Büschels, dessen Mittelpunkt auf FG liegt, und dieser berührt die c in G; folglich ist SG die Tangente der Curve in G. Dasselbe gilt vom Punkte H, und da auch die Gerade SF die Curve in F berührt, so bilden die Punkte F, G, H und der reelle unendlich ferne Punkt U ein Quadrupel mit dem Tangentialpunkt S. Nun ist die Gerade GH senkrecht auf FU; mithin sind GH, FU zwei Paare des symmetrischen Systems conjugirter Punkte, d. h.: Bei jeder zweitheiligen Focalcurve sind die beiden Grundpunkte und ebenso das Focalcentrum und der reelle unendlich ferne Punkt zwei Paare conjugirter Punkte von derselben Art, wie die imaginären Kreispunkte.

Legt man aus einem Punkte einer Curve dritter Ordnung die vier Tangenten an die Curve, so bleibt das Doppelverhältniss derselben bekanntlich constant, wenn der Punkt auf der Curve fortrückt. Im Falle der Focalcurve findet man, wie hier nur beiläufig erwähnt werden soll, für die aus dem Punkte S an die Curve gehenden Tangenten das Doppelverhältniss:

$$S(GHFU) = \frac{\sin GSF}{\sin HSF} : \frac{\sin GSU}{\sin HSU} = \left(\frac{\sin GSF}{\sin HSF}\right)^2 = \left(\frac{FG}{FH}\right)^2.$$

Dieses invariante Doppelverhältniss eines Tangentenquadrupels ist also gleich dem Quadrat des Verhältnisses der Entfernungen des Focalcentrums von den Grundpunkten der Focalcurve.

Aus dem unendlich fernen Punkte U gehen an die Curve c vier Tangenten, deren Berührungspunkte T, T', T'', T''' als die Scheitel der Curve bezeichnet werden.* Nach einem bekannten Satze bilden die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $TT'T''T'''$ mit dem Punkte U ein neues Quadrupel der c; dieselben sind folglich identisch mit den Punkten F, G, H. Sind im Scheitelquadrupel die Paare TT', $T''T'''$ von derselben Art wie die imaginären Kreispunkte, ist also TT' senkrecht auf $T''T'''$, so schneiden sich die Geraden TT'' und $T'T'''$, sowie TT''' und $T'T''$ in zwei conjugirten Punkten derselben Art, d. h. in G und H. Demnach ist F der Schnittpunkt der Geraden TT' und $T''T'''$. Dann ergiebt sich aber aus der bekannten Erzeugung der Focalcurve, dass die Punkte G und H

* Eckardt a. a. O.

auf einem Kreise liegen, der die Strecke TT' zum Durchmesser hat; mithin ist auch TT'' senkrecht auf $T'T'''$ und TT''' senkrecht auf $T'T''$. Die vier Scheitel einer Focalcurve bilden also ein Quadrupel von der speciellen Beschaffenheit, dass alle drei Gegenseitenpaare desselben rechte Winkel einschliessen. Die Diagonalpunkte desselben sind das Focalcentrum und die beiden Grundpunkte der Curve. Jeder der vier Scheitel ist demnach gleichweit entfernt von den Seiten des aus dem Focalcentrum und den beiden Grundpunkten gebildeten Dreiecks.

Hieraus folgt, dass die Punkte T, T', T'', T''' auch das Scheitelquadrupel einer zweiten Focalcurve darstellen, die G zum Focalcentrum, H und F zu Grundpunkten hat, sowie das Scheitelquadrupel einer dritten Focalcurve mit dem Focalcentrum H und den Grundpunkten F und G. Die sieben Punkte F, G, H, T, T', T'', T''' bilden demnach mit den imaginären Kreispunkten die Grundpunkte eines Büschels von circularen Curven dritter Ordnung.

In Figur 6 sind c_I, c_{II}, c_{III} die drei Focalcurven, die durch ein vorgeschriebenes Scheitelquadrupel bestimmt werden; dasselbe ist dort mit A, A', B, B' bezeichnet.

Aus den letzten Darlegungen ergeben sich noch die folgenden Sätze: Auf jeder Focalcurve bilden die vier Scheitel das einzige Quadrupel, bei welchem alle drei Gegenseitenpaare rechte Winkel einschliessen. Durch ein Punktquadrupel, bei welchem nur zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, ist eine Focalcurve eindeutig bestimmt. Stehen aber zwei, und folglich auch das dritte Paar von Gegenseiten senkrecht auf einander, so gehören zu diesem Quadrupel drei Focalcurven.

Bei der Focalcurve c, welche F zum Focalcentrum, G und H zu Grundpunkten hat, wird in Figur 7 das symmetrische System conjugirter Punkte dargestellt durch die Paare GH, FU, TT', $T''T'''$; dagegen gehören zu demselben der beiden nicht symmetrischen Systeme die Paare GU, HF, TT'', $T'T'''$. Die Paare des letzten Systems werden aus dem Punkte G durch eine Involution projicirt, deren Doppelstrahlen GTT'' und $GT'T'''$ sind, und da diese auf einander senkrecht stehen, so ist die betrachtete Involution symmetrisch. Das System kann aber aus keinem zweiten Punkte durch eine symmetrische Involution projicirt werden, denn sonst würden die imaginären Kreispunkte ein Paar desselben bilden. — Projicirt man dasselbe System aus H, so ist HG senkrecht auf HU, HT senkrecht auf HT'', und man erhält demnach eine rechtwinklige Involution. Hieraus folgt der Satz: Die Paare eines jeden der beiden nicht symmetrischen Systeme werden aus einem einzigen Curvenpunkte durch eine symmetrische Involution projicirt, nämlich aus demjenigen der beiden Grundpunkte, der mit dem

reellen unendlich fernen Punkt der Curve ein Paar dieses Systems bildet. Aus dem anderen Grundpunkte wird das betreffende System durch eine rechtwinklige Involution projicirt.

§ 8. Die Focalcurven durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits.

Für jede Focalcurve, welche durch die sechs Eckpunkte des in Figur 5 dargestellten Vierseits geht, bilden die drei Gegeneckenpaare AA', BB', CC' drei Paare von conjugirten Punkten derselben Art. Verlangt man nun, dass diese Paare dem symmetrischen System angehören sollen, so giebt es nur eine Focalcurve, welche dieser Forderung genügt, nämlich die Brennpunktscurve c_I des Vierseits, und diese ist durch das bereits gefundene Focalcentrum F_I und die Mittellinie m_I vollkommen bestimmt.

Man kann aber auch nach derjenigen Focalcurve fragen, von welcher AA', BB', CC' drei Paare eines nicht symmetrischen Systems sind. Von einer solchen Curve ist nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen der Punkt F_I ein Grundpunkt, denn dieser sendet nach den drei Gegeneckenpaaren die Strahlen einer symmetrischen Involution. Als zweiter Grundpunkt ergiebt sich nach dem angeführten Satze derjenige Punkt der Ebene, welcher dieselben Paare durch eine rechtwinklige Involution projicirt. Beschreibt man daher Kreise über den Durchmessern AA', BB', CC', so schneiden sich dieselben in zwei reellen oder imaginären Punkten G_{II} und G_{III}, und dann sind F_I und G_{II}, sowie F_I und G_{III} bez. die Grundpunkte von zwei Focalcurven c_{II} und c_{III}, die gleichfalls durch die sechs gegebenen Punkte gehen.

Die Mittellinien m_I, m_{II}, m_{III} der Curven c_I, c_{II}, c_{III} schneiden sich in einem Punkte, denn sie sind die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks $F_I G_{II} G_{III}$.

Das Focalcentrum F_{II} der Curve c_{II} liegt auf dem Kreise f. Bezeichnet man mit F_0 einen beliebigen Punkt von f, mit U_I und U_{II} die unendlich fernen Punkte der Geraden m_I und m_{II}, so ist nach § 2: $\angle F_I F_0 F_{II} = \angle U_{II} F_0 U_I = \angle F_I G_{II} G_{III}$. Fällt man also von dem zweiten Schnittpunkte des Kreises f und der Geraden $F_I G_{II}$ ein Loth auf m_I, so trifft dasselbe f in F_{II}. — In derselben Weise ergiebt sich das Focalcentrum F_{III} der c_{III}.

Die Aufgabe, durch die sechs Eckpunkte eines vollständigen Vierseits eine Focalcurve zu legen, besitzt hiernach drei Lösungen, von denen aber nur eine nothwendig reell ist. Die stets reelle Curve c_I kann reelle oder imaginäre Grundpunkte haben, d. h zweitheilig oder eintheilig sein. Die beiden anderen Curven c_{II} und c_{III} sind, wenn überhaupt reell, stets zweitheilig.

XIX.

Zur homocentrischen Brechung des Lichtes im Prisma.

Von

Dr. WILSING

in Potsdam.

In der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895, Heft 2, hat Herr Prof. Burmester einen interessanten Aufsatz über „Homocentrische Brechung des Lichtes durch das Prisma" veröffentlicht, in welchem derselbe darauf hinweist, dass das Ergebniss der Helmholtz'schen Untersuchungen über diesen Gegenstand, welches sich bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes nur auf den besonderen Fall bezieht, dass die Strahlenlänge im Prisma verschwindet, also der Strahl durch die brechende Kante des Prismas geht, zuweilen einer missverständlichen Auffassung begegnet. Diese Begrenzung der Aufgabe durch Vernachlässigung der Strahlenlänge im Prisma, deren Bedeutung dadurch charakterisirt wird, „dass die beiden Strahlen auf ihrem unendlich kurzen Wege durch das Prisma als merklich parallel angesehen werden können, was selbstverständlich der Fall sein muss, wenn ihre Convergenzpunkte im Vergleich zu ihrem Wege im Prisma unendlich weit entfernt sind" (v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 2 S. 167), tritt in der Fassung, welche Helmholtz dem Resultat seiner Untersuchung giebt, nicht unmittelbar hervor. „Ein unendlich dünnes Bündel homocentrischer Strahlen, welches von einem endlich entfernten Punkte ausgeht, bleibt nach dem Durchtritt durch ein Prisma also nur dann homocentrisch, wenn es im Minimum der Ablenkung durchgetreten ist, das heisst, wenn es in einer zur brechenden Kante senkrechten Ebene verläuft, und gegen beide Prismenflächen unter gleichen Winkeln geneigt ist." Wenn hiernach eine irrthümliche Auffassung der Ergebnisse der Helmholtz'schen Abhandlung, wenigstens bei oberflächlicher Durchsicht, nicht ausgeschlossen erscheint, so ist doch die weitere Bemerkung des Herrn Prof. Burmester, dass die Vereinigung der austretenden Strahlen nur in dem besonderen Falle erkannt sei, wo die Strahlen im Minimum der Ablenkung dicht an der brechenden Kante durch das Prisma gehen, insofern nicht ganz zutreffend, als die exacten Gleich-

ungen, welche die astigmatische Differenz der Strahlen des Sagittal- und Tangentialschnittes bestimmen, wenigstens für solche Strahlenbündel, die im Hauptschnitt liegen, bereits in den Arbeiten von S. Czapski (Winkelmann, Handbuch der Physik S. 159) und A. Gleichen (Ueber die Brechung des Lichtes in Prismen, Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 34 S. 169) abgeleitet sind, ohne dass sich allerdings die von Herrn Prof. Burmester auf geometrischem Wege gefundenen Sätze ausdrücklich angegeben finden. Bezeichnet man nämlich mit Herrn Czapski die Strecke vom leuchtenden Punkt bis zur Vorderfläche des Prismas mit a, mit s' und t' die Entfernungen der Vereinigungsweiten von Sagittal- und Tangentialstrahlen, von der Rückfläche des Prismas gemessen, mit d die Länge des Hauptstrahls im Prisma, endlich mit n, i, r, i', r' Brechungsexponent, Einfalls- und Brechungswinkel des Hauptstrahles an den beiden Flächen des Prismas, so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$1)\qquad \begin{cases} s' = a - \dfrac{d}{n} \\[2ex] t' = \dfrac{\cos i'^2}{\cos r'^2}\left(\dfrac{\cos r^2}{\cos i^2}\, a - \dfrac{d}{n}\right). \end{cases}$$

Bei homocentrischem Durchgange des Strahlenbündels wird $s' = t' = b$, so dass in diesem Falle die Entfernungen a und b der Strahlenlänge im Prisma direct proportional sind. Hieraus ergeben sich sofort die von Herrn Prof. Burmester a. a. O. abgeleiteten Sätze, dass auf jedem in einer Normalebene einfallenden Hauptstrahl im Allgemeinen nur ein einziger Lichtpunkt existirt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht, dass die betreffenden auf parallelen Hauptstrahlen befindlichen Licht- resp. Bildpunkte in geraden Linien liegen, welche durch die Kante des Prismas gehen, und dass Lichtpunkten, welche auf einer parallelen Linie zu der erwähnten geraden Linie liegen, gleiche astigmatische Differenzen entsprechen. Geht der Strahl aber im Minimum der Ablenkung durch das Prisma, sind also $i = i'$, $r = r'$ zu setzen, so existiren nur in dem von Helmholtz behandelten Falle, wo der Strahl die Kante des Prismas trifft, also $d = 0$ ist, endliche und gleiche Werthe für a und b, so dass dann jedem Punkt des Strahles ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Die entsprechenden Sätze für den Durchgang des Hauptstrahles im Normalschnitt durch eine Reihe von Prismen, deren brechende Kanten parallel sind, ergeben sich gleichfalls aus den von Herrn Czapski mitgetheilten Gleichungen (a. a. O. S. 158). Bisher nicht behandelt ist jedoch der von Herrn Prof. Burmester mit Hilfe geometrischer Betrachtungen abgeleitete Fall homocentrischer Brechung, bei welchem die Strahlen das Prisma schief durchsetzen. In den folgenden Ausführungen ist nun kurz angedeutet, wie sich diese Sätze aus den Helmholtz'schen Gleichungen auf analytischem Wege ergeben. Helmholtz hat seinen Untersuchungen das Princip der optischen Länge zu Grunde

gelegt, das besonders für die Behandlung des letzterwähnten Falles, bei welchem die Strahlen schief durch das Prisma gehen, geeignet ist. Werden die Weglängen des Strahles im ersten, zweiten Mittel u. s. w. mit $r_1 r_2$ etc. bezeichnet, die entsprechenden Brechungs-Coefficienten mit $n_1 n_2$, so ist die optische Länge Ψ: $\Psi = n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3$ etc.

Der Weg des Strahles wird dadurch bestimmt, dass die optische Länge zwischen einem ihm angehörigen Punkte im ersten und letzten Mittel ein Maximum oder Minimum sein muss, während die Homocentricität eines unendlich dünnen Strahlenbündels verlangt, dass auch die zweite Variation der optischen Länge zwischen Licht und Bildpunkt verschwindet. Der brechende Winkel des Prismas möge φ sein, r_0 die Länge des Strahles vor dem Prisma, r_1 und r_2 die Längen im Prisma und hinter dem Prisma bis zum Bildpunkte. Ferner sollen die Grössen m, μ, ν durch die Beziehungen definirt werden:

$$\cos m_1 = n \cos m, \quad \cos \mu_1 = n \cos \mu, \quad \cos \nu_1 = n \cos \nu,$$

wo m_1 und ν_1 die Winkel sind, welche der einfallende Strahl mit der in der ersten brechenden Fläche, senkrecht auf der brechenden Kante des Prismas stehenden Y-Achse resp. mit der brechenden Kante selbst oder der Z-Achse einschliesst, und wo μ_1 dieselbe Bedeutung für den austretenden Strahl hat, wie m_1 für den einfallenden. Endlich sollen die Coordinaten des Einfalls- resp. Austrittspunktes des Hauptstrahles mit y und z resp. v und ζ bezeichnet werden, die Coordinaten eines beliebigen Strahles des unendlich dünnen Bündels entsprechend mit

$$y + \Delta y, \quad z + \Delta z, \quad v + \Delta v, \quad \zeta + \Delta \zeta.$$

Die Helmholtz'schen Gleichungen, welche für beliebige Werthe Δy und Δz erfüllt sein müssen, sind dann die folgenden:

$$2) \left\{ \begin{aligned} &[\sin m^2 \Delta y - \cos m \cos \nu \Delta z - (\cos \varphi + \cos m \cos \mu) \Delta v + \cos m \cos \nu \Delta \zeta] r_0 \\ &\qquad + \frac{1}{n}[(1 - n^2 \cos m^2) \Delta y - n^2 \cos m \cos \nu \Delta z] r_1 = 0, \\ &[- \cos m \cos \nu \Delta y + \sin \nu^2 \Delta z - \cos \mu \cos \nu \Delta v - \sin \nu^2 \Delta \zeta] r_0 \\ &\qquad + \frac{1}{n}[- n^2 \cos m \cos \nu \Delta y + (1 - n^2 \cos \nu^2) \Delta z] r_1 = 0, \\ &[- (\cos \varphi + \cos m \cos \mu) \Delta - y \cos \mu \cos \nu \Delta z + \sin \mu^2 \Delta v + \cos \mu \cos \nu \Delta \zeta] r_2 \\ &\qquad + \frac{1}{n}[(1 - n^2 \cos \mu^2) \Delta v + n^2 \cos \mu \cos \nu \Delta \zeta] r_1 = 0, \\ &[\cos m \cos \nu \Delta y - \sin \nu^2 \Delta z + \cos \mu \cos \nu \Delta v + \sin \nu^2 \Delta \zeta] r_2 \\ &\qquad + \frac{1}{n}[n^2 \cos \mu \cos \nu \Delta v + (1 - n^2 \cos \nu^2) \Delta \zeta] r_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Setzt man $r_1 = 0$, so reducirt sich das vorstehende System, da die zweite und vierte Gleichung identisch werden, auf nur drei Gleichungen. Haben die Quotienten $\frac{r_1}{r_0}$ und $\frac{r_2}{r_0}$ dagegen endliche Werthe, was stets der

Fall ist, wenn der Strahl bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes nicht zugleich durch die Kante des Prismas geht, so muss man von den vollständigen Gleichungen 2) ausgehen. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen erhält man Δv und $\Delta \zeta$ ausgedrückt durch Δy und Δz:

$$r_0[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu]\Delta v = \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\sin v^2 - (r_0 + n r_1)\cos m^2\right]\Delta y + r_1\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos m \cos v \Delta z.$$

$$r_0[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu]\Delta\zeta = -\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\cos\mu + (r_0 + n r_1)\cos m \cos\varphi\right]\cos v \Delta y + \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)(\cos m \cos\mu + \cos\varphi) - (r_0 + n r_1)\cos\varphi \cos v^2\right]\Delta z.$$

Substituirt man die Werthe von Δv und $\Delta\zeta$ in die beiden letzten Gleichungen 2), so müssen die Coefficienten von Δy und Δz verschwinden, da die Gleichungen 2) für beliebige Werthe der Δy und Δz erfüllt sein sollen. Die Entfernungen r_0, r_1 und r_2 müssen also, wenn das Strahlenbündel homocentrisch bleiben soll, den folgenden vier homogenen Gleichungen zweiten Grades genügen:

$$3)\left\{\begin{array}{l}
\text{a)}\left\{\begin{array}{l}
0 = -(\cos\varphi + \cos m \cos\mu)[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu] r_0 r_2 \\
\quad + \left[\sin\mu^2 r_2 + \frac{1}{n}(1 - n^2 \cos\mu^2) r_1\right]\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\sin v^2 - (r_0 + n r_1)\cos m^2\right] \\
\quad - (r_2 + n r_1)\cos\mu \cos v^2 \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\cos\mu + (r_0 + n r_1)\cos m \cos\varphi\right],
\end{array}\right. \\
\text{b)}\left\{\begin{array}{l}
0 = \cos m \cos v[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu] r_0 r_2 \\
\quad + (r_2 + n r_1)\cos\mu \cos v \left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\sin v^2 - (r_0 + n r_1)\cos m^2\right] \\
\quad - \cos v\left[\sin v^2 r_2 + \frac{1}{n}(1 - n^2 \cos v^2) r_1\right] \\
\qquad \times\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\cos\mu + (r_0 + n r_1)\cos m \cos\varphi\right],
\end{array}\right. \\
\text{c)}\left\{\begin{array}{l}
0 = -\cos\mu \cos v[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu] r_0 r_2 \\
\quad + r_1\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos m \cos v\left[\sin\mu^2 r_2 + \frac{1}{n}(1 - n^2\cos\mu^2) r_1\right] \\
\quad + (r_2 + n r_1)\cos\mu \cos v\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)(\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu) \right. \\
\quad \left. - r_1\left(n - \frac{1}{n}\right)\cos\varphi \cos v^2\right],
\end{array}\right. \\
\text{d)}\left\{\begin{array}{l}
0 = -\sin v^2[\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu] r_0 r_2 \\
\quad + (r_2 + n r_1) r_1\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos m \cos\mu \cos v^2 \\
\quad + \left[\sin v^2 r_2 + \frac{1}{n}(1 - n^2 \cos v^2) r_1\right]\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)(\cos\varphi \sin v^2 + \cos m \cos\mu) \right. \\
\quad \left. - r_1\left(n - \frac{1}{n}\right)\cos\varphi \cos v^2\right].
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Liegt der Hauptstrahl im Normalschnitt des Prismas, ist also

$$\cos v_1 = \cos v = 0,$$

so verschwindet die zweite und dritte der vorstehenden Gleichungen, während die erste und vierte in die folgenden übergehen:

$$0 = -[\cos\varphi + \cos m \cos\mu]^2 r_0 r_2 + \left[\sin\mu^2 r_2 + \frac{1}{n}(1 - n^2\cos\mu^2)\, r_1\right]$$
$$\times\left[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right) - (r_0 + n r_1)\cos m^2\right],$$
$$0 = [\cos\varphi + \cos m \cos\mu]\left[-r_0 r_2 + \left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\left(r_2 + \frac{r_1}{n}\right)\right].$$

Beachtet man, dass zwischen den Grössen m, μ, v die Gleichung besteht:

$$\sin\varphi^2 \sin v^2 = \cos m^2 + 2\cos m \cos\mu \cos\varphi + \cos\mu^2,$$

so ergiebt sich, dass

$$\cos\varphi + \cos m \cos\mu = \pm \sin m \sin\mu$$

nur mit m oder μ verschwindet. Aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen folgt daher:

$$r_1[n(r_0 + r_2) + r_1] = 0,$$

während sich die erste Gleichung, wenn man

$$(\cos\varphi + \cos m \cos\mu)^2 = \sin m^2 \sin\mu^2$$

substituirt, in

$$\left\{\begin{aligned} & r_1\left[\frac{n \sin m^2}{1 - n^2\cos m^2} r_0 + \frac{n\sin\mu^2}{1 - n^2\cos\mu^2} r_2 + r_1\right] \\ & = r_1\left[\frac{n\cos r^2}{\cos i^2} r_0 + \frac{n\cos r'^2}{\cos i'^2} r_2 + r_1\right] = 0 \end{aligned}\right.$$

verwandelt, da

$$n\cos m = \sin i, \quad \sin m = \cos r,$$
$$n\cos\mu = \sin i', \quad \sin\mu = \cos r'$$

ist. Diese Gleichungen werden identisch mit den Gleichungen 1), wenn $r_0 = -a$, $r_1 = d$, $r_2 = +b$ gesetzt wird.

Der allgemeinere von Herrn Prof. Burmester behandelte Fall homocentrischer Brechung, bei welchem der einfallende Hauptstrahl gegen den Normalschnitt des Prismas geneigt ist, also $\cos v$ und $\cos v_1$ von Null verschieden sind, ergiebt sich auf folgende Weise. Multipicirt man die Gleichungen 3a) und 3b) mit $\cos v$ resp. $\cos\mu$, ebenso die Gleichungen 3c) und 3d), und addirt beide Male, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} 0 = \Big\{ -\cos\varphi(\cos\varphi \sin\nu^2 + \cos m \cos\mu) r_0 r_2 \\ \quad + \left(r_2 + \frac{r_1}{n}\right)\Big[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\cos\varphi(\cos\varphi \sin\nu^2 + \cos m \cos\mu) \\ \quad + r_1\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos m(\cos m + \cos\mu\cos\varphi)\Big]\Big\}\cos\nu, \\ 0 = -\cos\mu(\cos\varphi \sin\nu^2 + \cos m\cos\mu) r_0 r_2 \\ \quad + \left(r_2 + \frac{r_1}{n}\right)\Big[\left(r_0 + \frac{r_1}{n}\right)\cos\mu(\cos\varphi\sin\nu^2 + \cos m\cos\mu) \\ \quad + r_1\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos\nu^2(\cos m + \cos\mu\cos\varphi)\Big]. \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner die erste dieser Gleichungen mit $\cos\mu$, die zweite mit $\cos\varphi \cos\nu$ und subtrahirt, so kommt:

$$r_1\left(r_2 + \frac{r_1}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - n\right)\cos\nu(\cos m + \cos\mu\cos\varphi)(\cos m\cos\mu - \cos\nu^2\cos\varphi) = 0.$$

Andererseits erhält man aus den Gleichungen 4) durch Multiplication mit $\cos\nu$ resp. $\cos m$ und Subtraction:

$$\frac{r_1}{n}\left(r_0 + r_2 + \frac{r_1}{n}\right)(\cos\varphi\sin\nu^2 + \cos m\cos\mu)(\cos m\cos\mu - \cos\nu^2\cos\varphi) = 0.$$

Beiden Gleichungen ist also genügt, sobald der ihnen gemeinsame Factor:

$$5)\qquad \cos\varphi\cos\nu^2 - \cos m\cos\mu = 0$$

ist. Aus dieser Bedingung, welcher die Winkel m, μ, ν genügen müssen, lassen sich in Verbindung mit der Gleichung:

$$6)\qquad \sin\varphi^2\sin\nu^2 = \cos m^2 + 2\cos m\cos\mu\cos\varphi + \cos\mu^2$$

für jedes m entsprechende Werthe ν finden, und zwar ergiebt sich für $\cos\nu^2$ eine quadratische Gleichung. Zu jedem m gehören zwei symmetrisch zum Hauptschnitt liegende Strahlen, deren Winkel mit der brechenden Kante durch ν und $180 - \nu$ bestimmt werden. Genügen m und ν den vorstehenden Gleichungen, so können aus den beiden Gleichungen 3a) und 3c) die Quotienten $\frac{r_0}{r_1}$ und $\frac{r_2}{r_1}$ berechnet werden, und zwar ergiebt sich, da diese Gleichungen linear werden, für jedes r_1 nur ein Paar zusammengehöriger Werthe r_0 und r_2. Auf jedem Strahl, der einer Mantellinie des durch die Gleichungen 5) und 6) definirten Kegelmantels parallel ist, existirt also ein Punkt, dem ein homocentrischer Bildpunkt entspricht. Dies ist der von Herrn Prof. Burmester mit Hilfe geometrischer Betrachtungen gefundene Satz.

Bei dieser Gelegenheit möge noch darauf hingewiesen werden, dass die Methode, das Bild einer ebenen Figur mit Hilfe eines Prismas in seiner Ebene zu drehen, bei endlicher Objectentfernung in optischer Beziehung

gleichfalls an dem Uebelstande leidet, dass die Strahlen nach ihrem Durchgang durch das Prisma nicht mehr homocentrisch bleiben. Für den Normalschnitt lässt sich dies bereits aus den oben angeführten Gleichungen 1) ersehen. Der Gang eines vom leuchtenden Punkt P ausgehenden Strahles, der an der Grundfläche des Prismas reflectirt wird, bevor er die Rückfläche trifft, sei wieder durch die Bedingung bestimmt, dass die erste Variation der optischen Länge: $\Psi = r_0 + n(r_1 + r_2) + r_3$

verschwinden muss. Die Schnittpunkte des Strahles mit den Flächen des Prismas mögen auf drei Coordinatensysteme bezogen werden, deren X-Achsen mit den Seiten des Querschnitts des rechtwinklig angenommenen Prismas zusammenfallen, deren Y-Achsen den Kanten parallel sind, und deren positive Z-Achsen nach aussen gerichtet sind. Die Coordinaten in diesen Systemen mögen mit $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ bezeichnet werden, $a_0 b_0 c_0$ die Coordinaten des leuchtenden Punktes, $a_2 b_2 c_2$ die Coordinaten eines im austretenden Strahle gelegenen Punktes sein. Dann hat man:

$$r_0^2 = (x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + c_0^2,$$
$$r_1^2 = (x_1' - x_1)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_1'^2,$$
$$r_2^2 = (x_2' - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + z_2'^2,$$
$$r_3^2 = (x_2 - a_2)^2 + (y_2 - b_2)^2 + c_2^2,$$

wenn

$$x'_1 = L - \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad z'_1 = \frac{x_0}{\sqrt{2}}, \quad x'_2 = \frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \quad z'_2 = \frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

und L die Länge der Hypotenuse des Prismenquerschnittes ist. Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \frac{x_0 - a_0}{r_0} - \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{L - \frac{x_0}{\sqrt{2}} - x_1}{r_1} + \frac{n}{2} \frac{x_0}{r_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -n \frac{L - \frac{x_0}{\sqrt{2}} - x_1}{r_1} - n \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} - x_1}{r_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}} - x_1}{r_2} - \frac{n}{\sqrt{2}} \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} + \frac{x_2 - a_2}{r_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_0} = \frac{y_0 - b_0}{r_0} - n \frac{y_1 - y_0}{r_1} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = n \frac{y_1 - y_0}{r_1} - n \frac{y_2 - y_1}{r_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = n \frac{y_2 - y_1}{r_2} + \frac{y_2 - b_2}{r_3} = 0$$

ergiebt sich durch Elimination:

$$\frac{x_0 - a_0}{r_0} + \frac{n}{2}\,\frac{x_0}{r_1} = \frac{n}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} - \frac{x_2 - a_2}{r_3}$$

$$\frac{y_0 - b_0}{r_0} + \frac{y_2 - b_2}{r_3} = 0, \quad \text{oder da:} \quad \frac{x_0}{\sqrt{2}\,r_1} = \frac{\frac{L}{2} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}}{r_2} = \sin p,$$

wenn p den Einfallswinkel an der Grundfläche bedeutet, und da ferner:

$$\cos(r_0 x_0) = \frac{x_0 - a_0}{r_0}, \quad \cos(r_3 x_2) = \frac{x_2 - a_2}{r_3},$$

$$\cos(r_0 y_0) = \frac{y_0 - b_0}{r_0}, \quad \cos(r_3 y_0) = \frac{y_2 - b_2}{r_3},$$

$$\cos(r_0 z_0) = \frac{c_0}{r_0}, \qquad \cos(r_3 z_2) = \frac{c_2}{r_2} \text{ ist,}$$

$$\cos(r_0 x_0) = -\cos(r_3 x_2), \quad \cos(r_0 y_0) = -\cos(r_2 y_2), \quad \cos(r_0 z_0) = \cos(r_3 z_2).$$

Die Winkel $(l r_0)$ und $(l r_3)$, welche der einfallende und austretende Strahl mit einer im Normalschnitt parallel der Grundfläche gezogenen Linie l bildet, werden nun bestimmt durch:

$$\cos(l r_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(r_0 x_0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(r_0 z_0),$$

$$\cos(l r_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(r_3 x_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(r_3 z_2),$$

so dass mit Rücksicht auf die vorstehenden Bedingungsgleichungen:

$$\cos(l r_0) = \cos(l r_3)$$

wird. Bei einer Drehung des Prismas um l als Achse bleibt also der Winkel zwischen austretendem Strahl und Achse constant.

Die Bedingungen für die Homocentricität der Strahlenbündel ergiebt sich durch Variation der optischen Länge:

$$\Psi = r_0 + n(r_1 + r_2) + r_3.$$

Werden die x und y Coordinaten der Schnittpunkte eines im Normalschnitt liegenden Hauptstrahles mit den Seitenflächen des Prismas mit:

$$x_0 = \beta_0, \quad x_1 = \beta_1, \quad x_2 = \beta_2, \quad y_0 = y_1 = y_2 = 0$$

bezeichnet, und entsprechend die Coordinaten der Schnittpunkte eines beliebigen Strahles des unendlich dünnen Bündels mit:

$$x_0 = \beta_0 + \xi_0, \quad x_1 = \beta_1 + \xi_1, \quad x_2 = \beta_2 + \xi_2,$$

$$y_0 = \eta_0, \qquad y_1 = \eta_1, \qquad y_2 = \eta_2,$$

endlich die Entfernungen $r_0 r_1 r_2 r_3$ für den Hauptstrahl mit $\varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3$, so ergeben sich zunächst als Bedingungsgleichungen für die Homocentricität des Bündels:

$$\frac{\eta_0}{\varrho_0} - n\frac{\eta_1 - \eta_0}{\varrho_1} = 0, \quad n\frac{\eta_1 - \eta_0}{\varrho_1} - n\frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho_2} = 0,$$

$$n\frac{\eta_2 - \eta_1}{\varrho_2} + \frac{\eta_2}{\varrho_3} = 0,$$

welchen nur genügt wird, wenn zwischen den Entfernungen ϱ die Bedingung besteht:

$$7) \qquad n\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + n\varrho_3 = 0.$$

Ferner müssen für beliebige Werthe von ξ_0 noch die Gleichungen erfüllt sein:

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 = 0, \quad b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 = 0,$$

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = 0,$$

wo die Grössen a und b sind:

$$a_0 = \frac{1}{\varrho_0}\cos i^2 + \frac{n}{\varrho_1} - \frac{\sin i^2}{n\varrho_1}, \quad a_1 = \frac{n}{\sqrt{2}\,\varrho_1} - \frac{\sin p \sin i}{\varrho_1},$$

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\varrho_1} - \frac{\sin p \sin i}{n\varrho_1}, \quad b_1 = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{\sin p^2}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{\sin p^2}{\varrho_2},$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\varrho_2} - \frac{\sin p \sin i}{n\varrho_2},$$

$$c_1 = \frac{n}{\sqrt{2}}\frac{1}{\varrho_2} - \frac{\sin p \sin i}{\varrho_2}, \quad c_2 = \frac{n}{\varrho_2} - \frac{\sin i^2}{n\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{\sin i^2}{\varrho_3},$$

und i und p die Einfallswinkel des Hauptstrahles an der ersten und zweiten Fläche des Prismas sind. Diese Gleichungen führen zu der Bedingung:

$$\left\{\begin{aligned} &\{n^2\varrho_0 - \sin i^2(\varrho_0 + n\varrho_1) + n\varrho_1\}\{\varrho_1 - \sin p^2(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_2\}\{n\varrho_2 - \sin i^2(n\varrho_2 + \varrho_3) + n^2\varrho_3\} \\ &\quad - \left\{\frac{n}{\sqrt{2}} - \sin p \sin i\right\}^2 \{\varrho_1\varrho_3[n^2\varrho_0 - \sin i^2(\varrho_0 + n\varrho_1) + n\varrho_1] \\ &\quad + \varrho_0\varrho_2[n\varrho_2 - \sin i^2(n\varrho_2 + \varrho_3) + n^2\varrho_3]\} = 0, \end{aligned}\right.$$

welche in:

$$n\cos i^2 \varrho_1\varrho_2\{(\varrho_1 + \varrho_2)n\cos p^2 \cos i^2 + (\varrho_0 + \varrho_3)\cos p^2(n^2 - \sin i^2)\} = 0,$$

oder, wenn der Brechungswinkel r eingeführt wird in:

$$8) \qquad \cos i^2(n^2 - \sin i^2)\cos p^2 \varrho_1\varrho_2 \left\{n\varrho_0 + \frac{\cos i^2}{\cos r^2}(\varrho_1 + \varrho_2) + n\varrho_3\right\} = 0$$

übergeht.

Die beiden Gleichungen 7) und 8) können aber bei endlicher Entfernung von Bild und Object nur dann neben einander bestehen, wenn der Einfallswinkel i gleich dem Brechungswinkel r ist, also bei senkrechter Incidenz des Bündels. In diesem Falle, in welchem überhaupt keine Brechung stattfindet, entspricht jedem Punkte des einfallenden Strahles ein homocentrischer Bildpunkt.

XX.

Ueber eine besondere Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten.

Von

Dr. H. Thieme

in Posen.

I.

Sind in einer Ebene zwei Punkte P_1 und P_2 und eine gerade Linie L gegeben, so giebt es bekanntlich auf L drei Punkte, deren Verbindungslinien mit P_1 und P_2 gegen L gleich geneigt sind. Es sind dies der unendlich ferne Punkt P_∞ von L, der Schnittpunkt P von L mit der Geraden P_1P_2 und ein ebenso bekannter Punkt Q; sind P_1Q_1 und P_2Q_2 die Lothe von P_1 und P_2 auf L, so theilt dieser Punkt Q die Strecke Q_1Q_2 im Verhältniss $P_1Q_1 : P_2Q_2$. P und Q bilden mit Q_1 und Q_2 vier harmonische Punkte.

Sucht man alle Punkte der Ebene, welche mit P_1 und P_2 Verbindungslinien liefern, die gegen L gleich geneigt sind, so erhält man als geometrischen Ort die unendlich ferne Gerade der Ebene, die Gerade P_1P_2 und eine gleichseitige Hyperbel. Das letztere ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Hat man in der Ebene einen beliebigen Punkt X von der verlangten Eigenschaft, so erhält man ersichtlich einen weiteren derartigen Punkt, wenn man an P_1X und P_2X auf entgegengesetzten Seiten dieser Strahlen gleiche Winkel anträgt. Der gesuchte Ort ist mithin das Erzeugniss zweier gleichen Strahlenbüschel von entgegengesetztem Drehungssinn. Das Erzeugniss zweier solcher Büschel ist aber eine gleichseitige Hyperbel.* Diese Hyperbel geht durch P_1 und P_2, ihr Mittelpunkt ist P_0, die Mitte von P_1P_2, die eine Asymptote ist die Parallele zu L durch P_0, die andere das Loth von P_0 auf L. Also:

Der Ort der Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P_1 und P_2 gegen eine gegebene Gerade L gleich geneigt sind, ist eine gleichseitige Hyperbel.

---

* Steiner-Schroeter, Kegelschnitte, 2. Aufl., S. 112.

In den besonderen Fällen, wo L auf P_1P_2 senkrecht steht oder zu P_1P_2 parallel ist, zerfällt die gleichseitige Hyperbel in die Gerade P_1P_2 und die Mittelsenkrechte von P_1P_2.

II.

Sind im Raume zwei Punkte P_1 und P_2 und eine beliebige Ebene E gegeben, so kann man ebenso nach der Fläche fragen, deren Punkte mit P_1 und P_2 Verbindungslinien liefern, die gegen E gleich geneigt sind.

Die Bestimmung der Ordnung der Fläche bietet keine Schwierigkeit. Sind P_1Q_1 und P_2Q_2 die Lothe von P_1 und P_2 auf E, und ist X ein beliebiger Punkt des gesuchten Ortes, so bilden P_1X und P_2X nicht nur mit E, sondern auch mit P_1Q_1 und P_2Q_2 gleiche Winkel. Die Gesammtheit der Geraden durch P_1, die gegen E unter einem bestimmten Winkel geneigt sind, bildet einen Rotationskegel mit der Achse P_1Q_1, ebenso die Gesammtheit der Geraden durch P_2, die gegen E unter demselben Winkel geneigt sind, einen Rotationskegel mit der Achse P_2Q_2. Ertheilt man dem Winkel alle Werthe von 0^0 bis 90^0, so erhält man in P_1 und P_2 zwei projective Büschel von congruenten und parallelen Rotationskegeln. Der gesuchte Ort ist das Erzeugniss dieser beiden Büschel.

Eine beliebige Gerade g wird von jedem dieser beiden Büschel in einer Involution geschnitten. Zwei derartige Involutionen haben, wie man bekanntlich mit Hilfe eines beliebigen mit g derselben Ebene angehörigen Kegelschnitts beweist, vier gemeinsame Punkte. Einer der gemeinsamen Punkte ist der unendlich ferne Punkt von g, da die Parallelen zu g von P_1 und P_2 aus gegen P_1Q_1 und P_2Q_2 gleich geneigt sind, also einem Paar entsprechender Kegel angehören. Der gesuchte Ort besteht also aus der unendlich fernen Ebene und einer Fläche dritter Ordnung. Lassen wir die unendlich ferne Ebene als Theil des Ortes unberücksichtigt, so haben wir das Resultat:

Der Ort der Punkte des Raumes, deren Verbindungslinien mit zwei Punkten P_1 und P_2 gegen eine Ebene E gleich geneigt sind, ist eine Fläche dritter Ordnung F^3.

Dieser Fläche F^3 gehört ersichtlich die Gerade P_1P_2 an, dann aber auch g_∞, die unendlich ferne Gerade von E. Als entsprechende Kegel der beiden Büschel sind nämlich auch die doppelt zu zählenden Ebenen anzusehen, die durch P_1 und P_2 gehen und zu E parallel sind; ihr Schnitt, nämlich die Gerade g_∞, gehört also dem ganzen aus F^3 und der unendlich fernen Ebene bestehenden Orte doppelt an, jedem Theile des Ortes einfach.

III.

In einfacher Weise lassen sich die Schnitte von F^3 mit Ebenen bestimmen, welche durch die Gerade P_1P_2 oder g_∞ gehen.

Betrachten wir zunächst die Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$, so müssen die Geraden dieser Ebene, welche gegen E gleich geneigt sind, auch gegen die Ge-

rade $Q_1 Q_2$ gleich geneigt sein. Die Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ schneidet also nach I den Ort F^3 (ausser in der Geraden $P_1 P_2$) in einer gleichseitigen Hyperbel, die durch P_1 und P_2 geht und ihren Mittelpunkt in P_0, der Mitte von $P_1 P_2$, hat, während ihre Asymptoten die Parallele und die Senkrechte durch P_0 zu $Q_1 Q_2$ sind.

Aehnlich gestaltet sich die Untersuchung für eine beliebige andere durch $P_1 P_2$ gehende Ebene G.

Fällt man nämlich auf die Schnittlinie dieser Ebene G und der Ebene E von Q_1 und Q_2 die Lothe $Q_1 S_1$ und $Q_2 S_2$, und ist X ein Punkt auf $S_1 S_2$, welcher dem Ort F^3 angehört, so ist

$$\frac{P_1 X}{P_2 X} = \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2},$$

weil $\sphericalangle P_1 X Q_1 = P_2 X Q_2$ ist, und

$$\frac{P_1 S_1}{P_2 S_2} = \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2},$$

weil $\sphericalangle P_1 S_1 Q_1 = P_2 S_2 Q_2$ ist; also ist

$$\frac{P_1 X}{P_2 X} = \frac{P_1 S_1}{P_2 S_2}$$

und, da noch $\sphericalangle P_1 S_1 X = P_2 S_2 X = 90^0$ ist, $\Delta P_1 S_1 X \sim P_2 S_2 X$, mithin sind $P_1 X$ und $P_2 X$ gegen $S_1 S_2$ gleich geneigt.

Ist X ein Punkt des Schnittes von F^3 und G, der nicht auf $S_1 S_2$ liegt, so kann man durch X zu E eine parallele Ebene E' legen, und es würde sich in derselben Weise wie soeben zeigen lassen, dass $P_1 X$ und $P_2 X$ gegen die Schnittlinie der Ebene E' und der Ebene G gleich geneigt sind. Da diese Schnittlinie aber zu $S_1 S_2$ parallel ist, so sind $P_1 X$ und $P_2 X$ auch gegen $S_1 S_2$ gleich geneigt. Die Punkte der Ebene G, welche der Fläche F^3 angehören, bilden mithin nach I wieder eine gleichseitige Hyperbel. Die Asymptoten sind hier die Parallele und die Senkrechte von P_0 zu $S_1 S_2$. Also:

Eine beliebige Ebene durch $P_1 P_2$ schneidet F^3 ausser in der Geraden $P_1 P_2$ in einer gleichseitigen Hyperbel.

In dem besonderen Falle, wo die Ebene G auf der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ senkrecht steht, wo also auch die Schnittlinie von G und E auf $P_1 P_2$ senkrecht steht, zerfällt die gleichseitige Hyperbel in die Gerade $P_1 P_2$ und die Gerade h, die in P_0 auf $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ senkrecht steht; h ist parallel zu E und steht natürlich auch auf $P_1 P_2$ senkrecht.

Die Fläche F^3 enthält drei reelle gerade Linien, die Verbindungslinie von P_1 und P_2, die unendlich ferne Gerade g_∞ von E und die Gerade h, welche auf $P_1 P_2$ in P_0 senkrecht steht und zu E parallel ist.

Da in dem Schnitt, in welchem F^3 von der durch $P_1 P_2$ und h gehenden Ebene getroffen wird, $P_1 P_2$ doppelt zu rechnen ist, so wird F^3 von dieser Ebene längs $P_1 P_2$ in einer Geraden berührt.

IV.

Aus der angegebenen Construction der Asymptoten der in III behandelten gleichseitigen Hyperbeln erkennen wir zugleich den Charakter des Schnitts von F^3 mit der unendlich fernen Ebene.

Die eine der Asymptoten erhielten wir, wenn wir durch P_0, die Mitte von $P_1 P_2$ zu $S_1 S_2$, die Parallele zogen; der unendlich ferne Punkt dieser Parallelen ist Punkt der Hyperbel. Die unendlich fernen Punkte aller dieser Parallelen bilden die unendlich ferne Gerade g_∞ von E, von der wir schon in II erkannt hatten, dass sie F^3 angehört.

Die zweite Asymptote erhielten wir, wenn wir von P_0 auf $S_1 S_2$ das Loth fällten. Beschreibt die in III betrachtete Ebene G das Büschel $P_1 P_2$, so beschreibt die Gerade $S_1 S_2$ in E das Strahlenbüschel, dessen Scheitel P, der Schnittpunkt von E mit $P_1 P_2$, ist. Die Lothe von P_0 auf die Geraden dieses Büschels bilden einen orthogonalen Kegel. Der Schnitt der unendlich fernen Ebene mit diesem orthogonalen Kegel bildet mit g_∞ zusammen den Schnitt von F^3 mit der unendlich fernen Ebene. Der so construirte orthogonale Kegel mit dem Scheitel P_0 ist der Asymptotenkegel der Fläche F^3. Die Geraden des Asymptotenkegels haben mit F^3 ausser P^0 und dem unendlich fernen, doppelt zu rechnenden Berührungspunkt keinen weiteren Punkt gemeinsam. Der unendlich ferne Kegelschnitt von F^3 geht durch den unendlich fernen Punkt von $P_1 P_2$ und den unendlich fernen Punkt von $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$; seine Beziehung zum unendlich fernen Kreise ergiebt sich aus dem Charakter des Kegels als orthogonalen.

V.

Die Ebene E schneidet F^3 ausser in g_∞ noch in einem Kreise; ein Durchmesser dieses Kreises verbindet den Schnittpunkt P der Ebene E und der Geraden $P_1 P_2$ mit dem Punkt Q, welcher $Q_1 Q_2$ im Verhältniss

$$P_1 Q_1 : P_2 Q_2$$

theilt.* Für jeden Punkt X dieses Kreises ist

$$Q_1 X : Q_2 X = P_1 Q_1 : P_2 Q_2,$$

also $\sphericalangle\, P_1 X Q_1 = P_2 X Q_2$.

Für eine beliebige mit E parallele Ebene gilt dasselbe wie für E, sie enthält ebenso einen Kreis, dessen Punkte mit P_1 und P_2 verbunden Geraden liefern, welche gegen diese parallele Ebene und damit auch gegen E gleich geneigt sind. Also:

* Vergl. Thieme, Lehrsätze und Aufgaben der Stereometrie, S. 11 Nr. 105. Leipzig 1885. B. G. Teubner.

Eine Ebene, welche zu E parallel ist, schneidet F^3 in einem Kreise.

Geht im Besonderen die parallele Ebene durch P_1 oder durch P_2, so schrumpft dieser Kreis in einen Punkt zusammen, oder vielmehr der Schnitt einer solchen Ebene besteht aus den beiden imaginären Geraden, welche P_1 bezw. P_2 mit den Schnittpunkten des unendlich fernen Kreises und der Ebene E verbinden. Geht die zu E parallele Ebene durch P_0, die Mitte von P_1P_2, so zerfällt der Kreis in die unendlich ferne Gerade g_∞ und die Gerade h, die in P_0 auf P_1P_2 senkrecht steht und zu E parallel ist. Da in diesem Schnitt der Ebene mit F^3 die Gerade g_∞ doppelt vorkommt, so berührt diese parallele Ebene die Fläche F^3 in g_∞ längs einer Geraden. F^3 wird also in P_1P_2 und in g_∞ von je einer Ebene berührt; die Schnittlinie der beiden Berührungsebenen ist die Gerade h.

VI.

Bei der Bestimmung der Ordnung des untersuchten Ortes in II erhielten wir F^3 zunächst als Erzeugniss zweier projectiven Büschel von parallelen und congruenten Rotationskegeln. Da die Achsen der Kegel, P_1Q_1 und P_2Q_2, parallel sind und je zwei entsprechende Kegel gleiche Winkelöffnung haben, so schneiden sich dieselben in einem der unendlich fernen Ebene angehörenden Kegelschnitt. Die beiden Kegel müssen sich demnach noch in einem zweiten Kegelschnitt durchdringen.

Die Lagenverhältnisse dieses zweiten Schnitts ergeben sich aus folgender Betrachtung.

Die mehrfach betrachtete Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$ ist Symmetrie-Ebene beider Kegel, also auch eine Symmetrie-Ebene ihres Schnittes. Legt man durch P_1P_2 eine beliebige andere Ebene G_1, so schneidet sie jeden der beiden Kegel in einem Geradenpaar; das Paar des einen Kegels ist dem des anderen parallel. Die beiden Paare paralleler Geraden bilden ein Parallelogramm, in dem P_1 und P_2 zwei gegenüberliegende Ecken sind; die beiden anderen Ecken X_1 und Y_1 sind Punkte des zweiten Schnitts der beiden Kegel. Legt man durch P_1P_2 die Ebene G_2, welche für die Ebene $P_1Q_1P_2Q_2$ zu G_1 symmetrisch liegt, so erhalten wir ebenso zwei Punkte X_2 und Y_2, welche dem zweiten Schnitt der beiden Kegel angehören. Die Ebene, welche durch drei der Punkte X_1, X_2, Y_1, Y_2 geht, enthält auch den vierten und ist die Ebene des zweiten Schnitts der beiden Kegel. Da $P_1Q_1P_2Q_2$ zu den beiden Kegeln und zu dem Ebenenpaar G_1 und G_2 Symmetrie-Ebene ist, so liegen auch die Punkte X_2 und Y_2 für $P_1Q_1P_2Q_2$ zu X_1 und Y_1 symmetrisch und die Geraden X_1X_2 und Y_1Y_2 stehen auf $P_1Q_1P_2Q_2$ senkrecht. Daraus folgt, dass die Ebene $X_1X_2Y_1Y_2$ durch h, die Gerade, die in P_0 auf $P_1P_2Q_1Q_2$ senkrecht steht, hindurchgeht. Die Linien X_1Y_1 und X_2Y_2 werden als Parallelogrammdiagonalen von P_1P_2 in P_0 halbirt; P_0 ist daher Mittelpunkt des zweiten Schnittes der beiden Rotationskegel. Also:

Eine beliebige Ebene durch die dem Orte F^3 angehörige Gerade h schneidet F^3 in einem Kegelschnitt, der in P_0 seinen Mittelpunkt hat.

Die Punkte P_1 und P_2 haben für diese Kegelschnitte eine besondere Bedeutung. Bei einem Kegelschnitt ist der Ort der Focalpunkte, der Punkte, deren Verbindungslinien mit den Punkten des Kegelschnitts einen geraden Kegel bilden, wieder ein Kegelschnitt.* Die Punkte P_1 und P_2 sind für alle Kegelschnitte der Fläche F^3, welche mit h in einer Ebene liegen, Focalpunkte.

VII.

Auf Grund der gefundenen Eigenschaften lässt sich F^3 nunmehr auch als Erzeugniss eines Ebenenbüschels und eines projectiven Büschels von Kegeln zweiter Ordnung nachweisen.

Betrachten wir die Schnitte der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ mit den beiden projectiven Büscheln von parallelen Rotationskegeln, so erhalten wir zwei projective Strahlensysteme (Strahleninvolutionen zweiter Ordnung), deren entsprechende Strahlenpaare parallel sind. Diese sind aber im Grunde nichts Anderes als die in III betrachteten Strahlenbüschel P_1 und P_2 von entgegengesetztem Drehungssinn. Das Erzeugniss der beiden Strahleninvolutionen setzt sich aus der unendlich fernen Geraden der Ebene $P_1 Q_1 P_2 Q_2$, der Geraden $P_1 P_2$ und der gleichseitigen Hyperbel zusammen, in der F^3 von $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ geschnitten wird.

Ein Paar entsprechender Kegel wird von $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ in zwei Paaren von parallelen Strahlen geschnitten, die wieder ein Parallelogramm bilden. Zwei der Ecken sind wieder P_1 und P_2, die beiden anderen seien X und Y. Die Gerade XY ist Durchmesser jener gleichseitigen Hyperbel, X und Y die Endpunkte desselben. Durchlaufen die entsprechenden Rotationskegel die ganzen Büschel, so erhalten wir in P_1 und P_2 die Strahleninvolutionen, während die Gerade XY das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_0 beschreibt. Dies Büschel ist nach einem bekannten Satze über Kegelschnitte zu jenen Strahleninvolutionen projectiv. Daraus folgt auch, dass das Büschel der Ebenen, die durch h und XY gehen, zu jedem der beiden Büschel von Rotationskegeln projectiv ist, und F^3 ergiebt sich als Erzeugniss des Büschels der Ebenen und eines Büschels von Rotationskegeln. Also:

F^3 ist das Erzeugniss eines Ebenenbüschels und eines projectiven Büschels von Rotationskegeln; die Achse des Ebenenbüschels steht auf der gemeinsamen Achse der Rotationskegel senkrecht.

Diese Erzeugungsweise liefert uns noch zwei weitere imaginäre Geraden von F^3. Der Ebene durch h, welche zu $P_1 Q_1$ parallel ist, entspricht in dem Kegelbüschel P_1 der Kegel, dessen Winkelöffnung 0^0 beträgt, der

* Schroeter, Oberflächen, S. 598.

also nur aus der Achse oder richtiger aus den beiden imaginären Ebenen besteht, die $P_1 Q_1$ mit den Schnittpunkten von E und dem unendlich fernen Kreise verbinden; die Schnittlinien dieses imaginären Ebenenpaares mit der entsprechenden Ebene durch h gehören der Fläche F^3 an. Also:

Die Ebene durch h, welche zu $P_1 Q_1$ parallel ist, schneidet F^3 in drei Geraden, einer reellen und zwei imaginären.

Die beiden imaginären Geraden haben in dem unendlich fernen Punkte von $P_1 Q_1$ einen reellen Punkt.

VIII.

F^3 besitzt in P_1 und P_2 Doppelpunkte. Eine Gerade g durch P_1 bestimmt mit $P_1 P_2$ eine Ebene, welche F^3 ausser in $P_1 P_2$ nur noch in einer auch durch P_1 gehenden Hyperbel schneidet; g hat also mit F^3 höchstens noch einen Punkt gemeinsam; dasselbe gilt für eine Gerade durch P_2.

Die Kegel in P_1 und P_2, deren Winkelöffnungen $\sphericalangle P_2 P_1 Q_1$ und $\sphericalangle P_1 P_2 Q_2$ sind, schneiden sich ausser im Unendlichen nur in der Geraden $P_1 P_2$. Die Geraden dieser Kegel treffen also F^3 nur in P_1 bezw. P_2; diese Rotationskegel sind also die beiden Tangentialkegel in den Doppelpunkten P_1 und P_2. Die beiden Tangentialkegel berühren sich längs $P_1 P_2$. Die gemeinsame Tangentialebene ist die Ebene durch $P_1 P_2$ und durch h.

Nach V schneiden die Ebenen, welche der Ebene E parallel sind, die Fläche F^3 in Kreisen. Diese Kreise gehen sämmtlich durch dieselben beiden Punkte im Unendlichen, die Schnittpunkte der Ebene E mit dem unendlich fernen Kreise. Daraus folgt, dass F^3 in diesen beiden imaginären Punkten auch Doppelpunkte besitzt. Dass die Verbindungslinien dieser Punkte mit P_1 und P_2 der Fläche F^3 angehören, wurde schon in V. gezeigt.

Als Gesammtresultat haben wir somit erhalten:

Der Ort der Punkte, deren Verbindungslinien mit zwei festen Punkten P_1 und P_2 gegen eine Ebene E gleich geneigt sind, ist eine Fläche dritter Ordnung, welche in P_1 und P_2 reelle und in den Schnittpunkten von E mit dem unendlich fernen Kreise imaginäre Doppelpunkte besitzt; von den neun Geraden der Fläche sind drei reell, zwei Gegenkanten des durch die Doppelpunkte bestimmten Tetraeders und die diese Gegenkanten schneidende Gerade.

IX.

Zum Schluss möge noch die Gleichung der untersuchten Fläche angegeben werden.

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems sei die Mitte P_0 von $P P_2$, die Z-Achse das Loth von P_0 auf E, die Y-Achse die Parallele durch P_0 zu $Q_1 Q_2$ und die X-Achse das Loth auf $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ in P_0.

Die Coordinaten seien

$$\text{von } P_1 \ldots 0,\ b,\ c,$$
$$\text{„ } P_2 \ldots 0,\ -b,\ -c.$$

Die Verbindungslinien eines Punktes mit den Coordinaten x, y, z und der Punkte P_1 und P_2 bilden mit der Z-Achse Winkel, deren cosinus

$$\frac{z-c}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

bezw.

$$\frac{c+z}{\sqrt{x^2+(y+b)^2+(z+c)^2}}$$

sind. Setzt man diese gleich, so erhält man als Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2+y^2+b^2}{z^2+c^2}=\frac{by}{cz}.$$

Posen, im October 1895.

Kleinere Mittheilungen.

XXVI. Ueber die conforme Abbildung der Lemniscatenfläche.

Es sind bekannte Elementaraufgaben, das Innere einer eintheiligen Lemniscate oder aber das Innere der einen Hälfte einer Bernoulli'schen bezw. zweitheiligen Lemniscate auf das Innere eines Kreises conform abzubilden. Doch scheint mir bisher der continuirliche Uebergang von der ersten zur zweiten Abbildung nicht behandelt zu sein, dessen Eigenart eben darin begründet liegt, dass das Anfangs einfache Flächenstück in zwei Theile zerfällt, also seinen Zusammenhang verliert. Ich habe gefunden, dass trotzdem bei zweckmässiger Normirung die abbildenden Functionen bei diesem Grenzübergang, ohne eine Unstetigkeit zu erleiden, continuirlich in einander übergehen. Dies sei im Folgenden kurz dargelegt:

Wir gehen in der Ebene des Argumentes z von der allgemeinen eintheiligen Curvenform mit den Brennpunkten $z = \pm 1$ aus. Wir wollen das Innere der Curve derart auf die Fläche des Einheitskreises in der w-Ebene abbilden, dass dem Scheitelpunkt $z = +\alpha$ der Punkt $w = +1$ und dem Brennpunkt $z = +1$ der Mittelpunkt $w = 0$ entspricht. Diese Aufgabe wird übersichtlich durch die successive Anwendung der folgenden Abbildungen gelöst:

$$z_1 = z^2,$$

$$z_2 = \frac{z_1}{z_1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)},$$

$$z_3 = \sqrt{(\alpha^2 - 1) \cdot z_2},$$

$$w = \frac{z_3 - \alpha'}{1 - \alpha' z_3},$$

wo

$$\alpha' = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)}}$$

ist. Die Function z_1 bildet die Lemniscatenfläche bekanntlich auf eine doppelt überdeckt zu denkende Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $z_1 = 1$ und dem Radius $\alpha^2 - 1$ ab, deren beide Blätter im Punkte $z_1 = 0$ als einem Windungspunkte erster Ordnung zusammenhängen. Die lineare Substitution z_2 führt dann die Kreisfläche in eine analoge über, deren

Windungspunkt jetzt jedoch im Mittelpunkt $z_2 = 0$ liegt, während der Radius des neuen begrenzenden Kreises $\frac{1}{\alpha^2-1}$ beträgt. Die Function z_3 führt ferner diese neue Kreisfläche in die schlichte Fläche des Einheitskreises über. Schliesslich ist in den letzten der obigen Gleichungen nochmals eine lineare Substitution ausgeführt, welche den Einheitskreis in sich transformirt, jedoch seinen Mittelpunkt jetzt dem Punkte $z = +1$ entsprechen lässt. Durch Substitution der einzelnen Functionen ergiebt sich daher als die gewünschte abbildende Function:

$$w = \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{z \cdot \sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} - \sqrt{z^2 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)}}{\sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2(\alpha^2 - 2)} - (\alpha^2 - 1) \cdot z}.$$

In der That lässt dieselbe den Punkten $z = \alpha$ bezw. $z = +1$ die Punkte $w = +1$ bezw. $w = 0$ entsprechen. Wie man sich ferner leicht überzeugt, sind bei der Ausrechnung für alle Wurzelwerthe positiv reelle Bestandtheile zu wählen.

Lassen wir nun die allgemeine Lemniscate in die Bernoulli'sche Form (mit denselben Brennpunkten) übergehen, so haben wir einfach $\alpha^2 = 2$ zu setzen. Die abbildende Function nimmt für die Werthe z mit positiv reellem Theile zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, ihr wahrer Werth ergiebt sich jedoch als:

$$w = z^2 - 1.$$

Dies ist aber gerade die Function, welche die rechte Hälfte der Bernoulli'schen Lemniscatenfläche auf den Einheitskreis in angegebener Weise abbildet. Für alle Werthe von z mit negativ reellem Theile dagegen wird $\lim w = -1$. Dies entspricht dem Umstande, dass die linke Hälfte der Lemniscatenfläche, ehe noch α^2 völlig gleich 2 geworden ist, sich auf die nächste Umgebung des Punktes -1 im Einheitskreis der w-Ebene abbildet. Der weitere continuirliche Uebergang zu der Abbildung des rechten Ovals der zweitheiligen Lemniscate bietet keine neue Schwierigkeit. Wir erhalten das Schlussergebniss:

Lässt man die Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1 in die Bernoulli'sche Form übergehen, so findet keinerlei Singularität bei dem entsprechenden Grenzübergange derjenigen Function statt, welche die Fläche der Lemniscate auf das Innere des Einheitskreises in der Art abbildet, dass dem Scheitelpunkt $+\alpha$ der Lemniscate der Punkt $+1$, dem Brennpunkte $z = +1$ aber der Mittelpunkt des Einheitskreises entspricht, obwohl sich in der Grenzlage die linke Hälfte der Fläche völlig abgeschnürt hat.

Aachen. Fr. Schilling.

XXVII. Bemerkungen über doppelt-centrische Vierecke.

1.

J^2 sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte M_i. e, f seien zwei Tangenten dieses Kreises in den Punkten E, F. Construiren wir einen Kreisbogen G, H, dessen Centriwinkel supplementär zu $\sphericalangle EM_iF$ ist, so bilden die resp. Tangenten g, h in G, H mit ef ein Kreisviereck $ABCD$. U^2 sei der umschriebene Kreis. M_u sei der Mittelpunkt.

Eine beliebige Tangente q von J^2 treffe U^2 in den zwei Punkten Q, T. Wir ziehen durch dieselben je die zweite Tangente r, t an J^2. Ihre resp. zweiten Schnittpunkte mit U^2 seien R, S. Dann muss die Verbindungslinie s dieser Punkte den Kreis J^2 berühren, weil im Kreisviereck $QRST$ der Winkel, welchen s mit der Tangente r bildet, zum Winkel der Tangenten qt supplementär ist. Folglich muss auch $QRST$ dem Kreise J^2 umschrieben sein.

Zu jeder Tangente q von J^2 gehört ein solches Kreisviereck und also auch eine gegenüberliegende Seite s. Diese Zuordnung ist eine vertauschbare. Wir schliessen daher:

Liegen zwei Kreise so, dass der eine J^2 einem Viereck eingeschrieben und der andere U^2 demselben umschrieben ist, so giebt es unendlich viele Vierecke, welche U^2 umschrieben und J^2 eingeschrieben sind. Die gegenüberliegenden Seiten dieser Vierecke sind einander involutorisch zugeordnet. Sie schneiden sich also in Punkten einer Geraden p. Die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte gehen durch einen festen Punkt P. P und p sind folglich Pol und Polare in Bezug auf J^2. Mithin gehen die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken der Vierecke ebenfalls durch P. Daraus folgt weiter, dass P und p auch Pol und Polare in Bezug auf U^2 sind. Daher liegt P auf der Centrale c beider Kreise und wird von p sowohl durch die Punkte $J_1 J_2$ auf J^2 als durch die Punkte $U_1 U_2$ auf U^2 harmonisch getrennt.

2.

Zu einem gegenüberliegenden Seitenpaare eg eines Vierecks (siehe die nebenstehende Figur) gehört ein zweites gegenüberliegendes Paar fh. Weil diese Zuordnung vertauschbar ist, sind die Geraden EG, FH, welche die Berührungspunkte von e, g; f, h verbinden, entsprechende Strahlen einer Involution J_b am Scheitel P. Wir können beweisen, dass diese Involution rechtwinklig sein muss. Es ist nämlich:

$$\sphericalangle EGF = \frac{1}{2} EM_iF \quad \text{und} \quad \sphericalangle HFG = \frac{1}{2} \sphericalangle HM_iG.$$

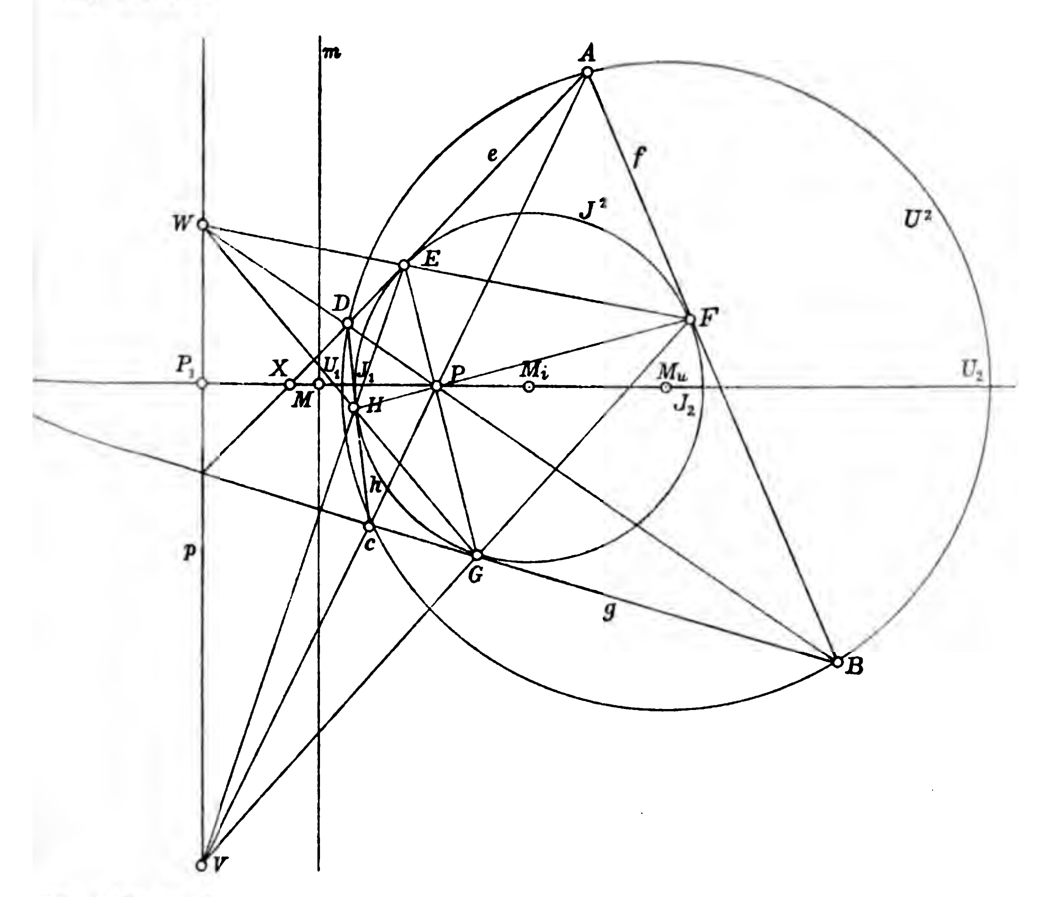
Nun ist

$$\sphericalangle EM_iF = 180^0 - HM_iG, \text{ also } \sphericalangle EFG = 90^0 - HFG.$$

Daraus folgt, dass

$$\sphericalangle GPF = 90^0, \text{ das heisst } HF \perp GE.$$

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken AC, BD des Vierecks $ABCD$ sind ein Paar der Involution harmonischer Polaren um P in Bezug auf J^2. Wir zeigen, dass dieses Paar durch das Rechtwinkelpaar



EG, HF der Involution J_b harmonisch getrennt wird. AC trifft nämlich p im Pole V von BD und BD schneidet aus p den Pol W von AC. Die Polare von V, das heisst BD muss aber auch durch den in p liegenden Diagonalpunkt des Vierecks $EFGH$ gehen, in welchem sich die Geraden EF, GH schneiden. Also ist W dieser Diagonalpunkt. In analoger Weise folgt, dass V der Schnittpunkt der Geraden EH, FG ist. Folglich sind AC, BD zwei Diagonalen des Vierecks $EFGH$ und werden durch die Seiten EG, HF harmonisch getrennt.

Diese Beziehungen gelten für jedes Viereck, welches J^2 eingeschrieben und U^2 umschrieben ist. Wir schliessen daher:

Ziehen wir durch P ein Paar xx_1 der Involution harmonischer Polaren in Bezug auf J^2, so schneidet dieses aus U^2 die Ecken eines Vierecks, welches J^2 umschrieben ist. Die zu einander senkrechten Geraden durch P, welche mit XX_1 eine harmonische Gruppe bilden, treffen J^2 in den Berührungspunkten der vier Seiten des Vierecks.

3.

Construiren wir durch einen Punkt X der Centrale c die zwei Tangenten ee_1 an J^2, so sind diese zu c orthogonal symmetrisch. Folglich müssen auch die zwei Vierecke, welche zu ee_1 gehören, orthogonal symmetrisch zu c liegen. Daher schneiden sich die Seiten gg_1, welche den resp. Seiten ee_1 gegenüberliegen, in einem Punkte x_1 auf c. Ziehen wir durch x_1 die Tangenten gg_1, so gehören zu ihnen dieselben Vierecke wie zu ee_1. Folglich wird durch diese Vierecke eine Involution J auf c bestimmt. c schneidet die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke in Paaren von J.

Der Involution J gehören die Schnittpunkte J_1J_2 von c mit J^2 an; denn, tritt x an Stelle von J_1, so gehört zu der Tangente i_1 in J_1 ein Viereck, welches zu c orthogonal symmetrisch liegt. Folglich muss die Seite, welche in diesem Viereck i_1 gegenüberliegt, den Kreis J^2 in J_2 berühren. Aus der orthogonal symmetrischen Lage des erwähnten Vierecks folgt noch, dass die zwei weiteren gegenüberliegenden Seitenpaare sich in c schneiden. Diese zwei Schnittpunkte, von denen der eine P ist und der andere P_1 in p liegt, sind also Doppelpunkte von J.

Ein ferneres Paar der Involution J sind die Schnittpunkte U_1U_2 von c mit U^2. Um dies zu zeigen, benutzen wir einen bekannten Satz, nach welchem eine Gerade aus den gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks und aus den Kegelschnitten, welche dem Viereck umschrieben sind, Paare einer Involution schneidet. In unserem Falle hat diese Involution mit J zwei auf den gegenüberliegenden Seiten des Vierecks liegende Paare gemeinsam. Folglich ist sie mit J identisch.

Die zwei Paare J_1J_2, U_1U_2 bestimmen J. Diese liegen so, dass stets das eine Paar U_1U_2 das andere J_1J_2 einschliesst. Daraus folgt, dass J immer hyperbolisch ist. Der Mittelpunkt M von J liegt in der Potenzlinie m der zwei Kreise J^2U^2.

Fassen wir das Bewiesene zusammen, so ergiebt sich:

Die Centrale der Kreise J^2U^2 schneidet die gegenüberliegenden Seiten der Vierecke und die Kreise J^2U^2 in Paaren einer hyperbolischen Involution, deren Mittelpunkt M in der Potenzlinie beider Kreise liegt. Die Viereckseiten, welche J^2

nicht berühren, schneiden sich in einem Doppelpunkte P der Involution.

Eine andere Ausdrucksweise dieses Satzes ist folgende:

Construiren wir über den Schnittpunkten der Centrale mit den gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks Kreise, so schneiden diese sich mit J^2 und U^2 in denselben zwei imaginären Punkten auf der Potenzlinie dieser Kreise. Sie bilden mit J^2U^2 ein Büschel.

Dr. Beyel.

XXVIII. Ueber die partiellen Differentialgleichungen, denen die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung genügen.

Im 38. Jahrgange dieser Zeitschrift habe ich die partiellen Differentialgleichungen behandelt, denen die symmetrischen Functionen R der Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$1)\qquad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

genügen. Dabei hatte ich die Brioschi'schen Formeln in zwei Serien getheilt,

$$2)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + \cdots) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda+i-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},$$

$$3)\qquad \sum_{\lambda=k}^{n} c_{\lambda-k} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = (-1)^{k-1} k \frac{\partial R}{\partial s_k}, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3 \ldots),$$

hatte einen sehr einfachen Beweis für 2) und einen etwas ferner liegenden für 3) gegeben und dabei erwähnt, dass 3) nur unter Beobachtung gewisser Vorsichtsmassregeln verwendet werden dürfe, ohne dieselben aber unrichtig sei. Ich komme hier auf die Formelreihe 3) zurück, um in die l. c. ausgesprochene Bemerkung, „dass es im Wesentlichen nur n solcher Formeln gebe", auch die in 3) enthaltenen hineinzuziehen, um für dieselben zugleich einen Beweis zu liefern, der dem für 2) gegebenen analog ist, und der zugleich 3) in der Weise vervollständigt, dass er den Werth beider Seiten auch durch Differentiationen darstellt, die nach den x_λ ausgeführt sind.

Statt der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ führe ich, unter i eine positive ganze Zahl verstehend, die Werthe

$$4)\qquad x_1 + \frac{x_1^i}{f'(x_1)} t, \quad x_2 + \frac{x_2^i}{f'(x_2)} t, \ldots, x_n + \frac{x_n^i}{f'(x_n)} t$$

ein und untersuche, wie sich hierdurch erstens die Potenzsummen und zweitens die Coefficienten der Gleichung ändern. An die Stelle von $s_\varkappa$ tritt

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \left(x_\lambda^\varkappa + \varkappa \frac{x_\lambda^{\varkappa+i-1}}{f'(x_\lambda)} t + \cdots \right).$$

Wir wollen hier und im Folgenden stets die höheren Potenzen von t vernachlässigen, also alle Ausdrücke nur modulo t^2 betrachten. Die Euler-schen Formeln zeigen dann, dass für $\varkappa + i - 1 < n - 1$ der Coefficient von t zu Null und für $\varkappa + i - 1 = n - 1$ zu Eins wird. Ferner folgt mit Berücksichtigung von 1):

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^n}{f'(x_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{c_1 x_\lambda^{n-1} - c_2 x_\lambda^{n-2} + \cdots}{f'(x_\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_n^{(n-1)} x_\lambda^{n-1} - C_n^{(n-2)} x_\lambda^{n-2} + \cdots}{f'(x_\lambda)} = C_n^{(n-1)},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^{n+1}}{f'(x_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{(c_1^2 - c_2) x_\lambda^{n-1} - (c_1 c_2 - c_3) x_\lambda^{n-1} + \cdots}{f'(x_\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_{n+1}^{(n-1)} x_\lambda^{n-1} - C_{n+1}^{(n-2)} x_\lambda^{n-2} + \cdots}{f'(x_\lambda)} = C_{n+1}^{(n-1)},$$

. . . .

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^{n+\alpha-1}}{f'(x_\lambda)} = \cdots = C_{n+\alpha-1}^{(n-1)}.$$

Die Berechnung der Grössen $C_\varkappa^{(\lambda)}$ habe ich vor Kurzem (Monats-Hefte für Mathematik und Physik) dargelegt, so dass ich hier nicht darauf einzugehen brauche und sie als bekannt voraussetzen darf. Es gehen also die $s_\varkappa$ über, wenn man $C_{n-1}^{(n-1)} = 1$ setzt, in die Grössen:

$$5)\left\{\begin{array}{l} s_1,\ s_2, \ldots s_{n-i-1},\quad s_{n-i} + (n-i) C_{n-1}^{(n-1)} t,\ s_{n-i+1} + (n-i+1) C_n^{(n-1)} t, \\ \qquad s_{n-i+2} + (n-i+2) C_{n+1}^{(n-1)} t, \ldots s_\alpha + \alpha C_{\alpha+i-1}^{(n-1)} t, \ldots \end{array}\right.$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Coefficienten, welche an die Stelle der c treten. Es gehen

$$c_1 \text{ in } c_1 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^i}{f'(x_\lambda)} t,$$

$$c_2 \text{ in } c_2 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^i (x_{\lambda+1} + \cdots + x_{\lambda-1})}{f'(x_\lambda)} t = c_2 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^i (-x_\lambda + c_1)}{f'(x_\lambda)} t$$

$$= c_2 - \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^{i+1} - c_1 x_\lambda^i}{f'(x_\lambda)} t,$$

$$c_3 \text{ in } c_3 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_i (x_{\lambda+1} x_{\lambda+2} + \cdots)}{f'(x_\lambda)} t = c_3 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^i (x_\lambda^2 - c_1 x_\lambda + c_2)}{f'(x_\lambda)} t$$

$$= c_3 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^{i+2} - c_1 x_\lambda^{i+1} + \cdots}{f'(x_\lambda)} t,$$

. . . .

über. So lange der höchste Exponent im Zähler des Bruches unter dem letzten Summenzeichen $< n-1$ ist, verschwindet nach dem Euler'schen Satze die Summe. An Stelle von c_{n-i} erhält man:

$$c_{n-i}+(-1)^{n-i-1}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda^i(x_\lambda^{n-i-1}-c_1x_\lambda^{n-i-2}+\cdots+c_{n-i-1})}{f'(x_\lambda)}t=c_{n-i}+(-1)^{n-i-1}t.$$

Für c_{n-i+1} ergiebt sich mit Berücksichtigung von 1):

$$c_{n-i+1}+(-1)^{n-i}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda^n-c_1x_\lambda^{n-1}+\cdots\pm c_{n-i}x_\lambda^i}{f'(x_\lambda)}t$$

$$=c_{n-i+1}\pm\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{c_{n-i+1}x_\lambda^{i-1}+\cdots}{f'(x_\lambda)}t=c_{n-i+1}$$

und in gleicher Weise für c_{n-i+2}:

$$c_{n-i+2}\pm\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda^{n+1}-c_1x_\lambda^n+\cdots\pm c_{n-i+1}x_\lambda^i}{f'(x_\lambda)}t$$

$$=c_{n-i+2}\pm\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{c_{n-i+2}x_\lambda^{i-1}+\cdots}{f'(x_\lambda)}t=c_{n-i+2},$$

und nach derselben Art setzt sich die Berechnung bis c_n fort. Es tritt also an die Stelle von

$$6)\quad\begin{cases} c_\alpha \text{ wieder } c_\alpha \text{ (wenn } \alpha \text{ von } n-i \text{ verschieden ist),}\\ c_{n-i} \text{ dagegen } c_{n-i}+(-1)^{n-i-1}t.\end{cases}$$

Denkt man sich nun eine symmetrische Function R durch die x, durch die c und durch die s ausgedrückt, führt statt der x die Grössen 4) und folglich statt der c und der s die Grössen 6) und 5) ein und vergleicht in den Entwickelungen von R nach t die Coefficienten der ersten Potenzen von t, so entsteht

$$7)\quad \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda}{f'(x_\lambda)}\frac{\partial R}{\partial x_\lambda}=(-1)^{n-i-1}\frac{\partial R}{\partial c_{n-i}}=\sum_{k=n-i}^{\infty}k\,C_{k+i-1}^{(n-1)}\frac{\partial R}{\partial s_k}.$$

Diese Formelserie tritt als neu neben die Brioschi'schen. Neu ist sie freilich genau wie 3) gegen 2) nur ihrer Form, nicht ihrem Inhalte nach. Man kann nämlich den Bruch $\frac{x_\lambda^i}{f'(x_\lambda)}$ auf die Form:

$$\alpha_0+\alpha_1x_\lambda+\alpha_2x_\lambda^2+\cdots+\alpha_{n-1}x_\lambda^{n-1}$$

bringen, und dadurch geht die linke Seite von 7) in

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(\alpha_0+\alpha_1x_\lambda+\cdots+\alpha_{n-1}x_\lambda^{n-1})\frac{\partial R}{\partial x_\lambda}$$

über. Dieser Ausdruck lässt sich nun aus den n Formeln 2) für $i=0, 1,\ldots n-1$ zusammensetzen. Bildet man dasselbe Aggregat für die mittlere

Form von 2), so muss der mittlere Ausdruck von 7) entstehen; denn sonst hätte man durch Subtraction die für jedes R geltende Gleichung:

$$\varphi_1(s,\,c)\frac{\partial R}{\partial c_1}+\varphi_2(s,\,c)\frac{\partial R}{\partial c_2}+\cdots+\varphi_n(s,\,c)\frac{\partial R}{\partial c_n}=0,$$

welche dann aber für $R=c_1,\ c_2,\ldots c_n$ das identische Verschwinden aller φ anzeigen würde. Für die Ausdrücke rechts in 2) und 7) gelten dieselben Schlüsse.

So erhält man z. B. für $n=2$ aus 2):

$$8)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial x_1}+\dfrac{\partial R}{\partial x_2}=2\dfrac{\partial R}{\partial c_1}+c_1\dfrac{\partial R}{\partial c_2},\\[2ex] x_1\dfrac{\partial R}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial R}{\partial x_2}=c_1\dfrac{\partial R}{\partial c_1}+2c_2\dfrac{\partial R}{\partial c_2};\end{cases}$$

und ferner ist

$$\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{1}{2x_1-c}=\frac{2x_1-c_1}{c_1^2-4c_2},\quad \frac{x_1}{f'(x_1)}=\frac{c_1x_1-2c_2}{c_1^2-4c_2}.$$

Multiplicirt man also die erste der Gleichungen 8) mit $\dfrac{-c_1}{c_1^2-4c_2}$ und die zweite mit $\dfrac{2}{c_1^2-4c_2}$, ferner auch die erste mit $\dfrac{-2c_2}{c_1^2-4c_2}$ und die zweite mit $\dfrac{c_1}{c_1^2-4c_2}$, dann entstehen nach Addition die Resultate:

$$\frac{1}{f'(x_1)}\,\frac{\partial R}{\partial x_1}+\frac{1}{f'(x_2)}\,\frac{\partial R}{\partial x_2}=-\frac{\partial R}{\partial c_2},$$

$$\frac{x_1}{f'(x_1)}\,\frac{\partial R}{\partial x_1}+\frac{x_2}{f'(x_2)}\,\frac{\partial R}{\partial x_2}=+\frac{\partial R}{\partial c_1},$$

und das stimmt mit 7) überein.

Wir wollen nun die Gleichungen 7) unter einander verbinden. Es besteht für die $C_k^{(\lambda)}$ die Formelreihe:

$$C_k^{(n-1)}-c_1C_{k-1}^{(n-1)}=-\,C_{k-1}^{(n-2)},$$

$$C_k^{(n-1)}-c_1C_{k-1}^{(n-1)}+c_2C_{k-2}^{(n-1)}=+\,C_{k-2}^{(n-3)},$$

$$C_k^{(n-1)}-c_1C_{k-1}^{(n-1)}+c_2C_{k-2}^{(n-1)}-c_3C_{k-3}^{(n-1)}=-\,C_{k-3}^{(n-4)};\ldots$$

Wenn wir diesen Formeln entsprechend die aus 7) für $i=0,1$ stammenden Gleichungen combiniren, dann die für $i=0,1,2$ u. s. w., so entsteht:

$$9)\quad\begin{cases}(-1)^{n-2}\left(\dfrac{\partial R}{\partial c_{n-1}}+c_1\dfrac{\partial R}{\partial c_n}\right)=(n-1)\dfrac{\partial R}{\partial s_{n-1}}-\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,C_{n+k-1}^{(n-2)}\dfrac{\partial R}{\partial s_{n+k}},\\[2ex] (-1)^{n-3}\left(\dfrac{\partial R}{\partial c_{n-2}}+c_1\dfrac{\partial R}{\partial c_{n-1}}+c_2\dfrac{\partial R}{\partial c_n}\right)=(n-2)\dfrac{\partial R}{\partial s_{n-2}}\\[2ex] \qquad+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,C_{n+k-1}^{(n-3)}\dfrac{\partial R}{\partial s_{n+k}},\end{cases}$$

. . . .

und gleichzeitig entnimmt man aus 7), dass diese Ausdrücke entsprechend gleich

$$9a)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda - c_1}{f'(x_\lambda)}\frac{\partial R}{\partial x_\lambda},\quad \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda^2 - c_1 x_\lambda + c_2}{f'(x_\lambda)}\frac{\partial R}{\partial x_\lambda},\dots$$

sein werden. Dies sind die correcten Beziehungen, welche an die Stelle von 3) zu setzen sind. Aus 9a) geht hervor, was sich ohne Schwierigkeit auch direct nachweisen lässt, dass die Substitution von

$$x_\alpha + \frac{x_\alpha^i - c_1 x_\alpha^{i-1} + c_2 x_\alpha^{i-2} - \dots \pm c_\alpha}{f'(x_\alpha)} t \text{ statt } x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

die Gleichungen 9), 9a) hervorbringt.

Die erhaltenen Gleichungen 9), 9a) vereinfachen sich zu den Brioschi-schen, sobald man die dort unausgesprochene Voraussetzung macht, dass R als Function der s lediglich durch $s_1, s_2, \dots s_n$ ausgedrückt werde. Dann entsteht die ergänzte Brioschi'sche Formel:

$$10)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{x_\lambda^i - c_1 x_\lambda^{i-1} + c_2 x_\lambda^{i-2} - \dots \pm c_i}{f'(x_\lambda)}\frac{\partial R}{\partial x_\lambda} = (-1)^{n-i-1}\sum_{k=n-i}^{n} c_{k-n+i}\frac{\partial R}{\partial c_k} \\ \displaystyle\qquad\qquad = (n-i)\frac{\partial R}{\partial s_{n-i}}. \end{cases}$$

In meiner früheren Arbeit habe ich gezeigt, dass die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems 2) durch die Beziehungen:

$$11)\qquad S_\lambda = a_1 x_1^\lambda + a_2 x_2^\lambda + \dots + a_n x_n^\lambda \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_n = n)$$

gegeben wird, sobald an die Stelle der c die Grössen $C_1, C_2, \dots C_n$ treten, die aus den S so abgeleitet werden, wie die c aus den s. Für die Darstellung der C durch die $x_1, \dots x_n$ habe ich die symbolische Form

$$12)\qquad \mu!\, C_\mu = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^{(\mu)}$$

gegeben, in welcher die symbolische Potenz $x_\varkappa^{(\mu)}$ durch $x_\varkappa^\mu$ und

$$a_\varkappa^{(\mu)} \text{ durch } a_\varkappa(a_\varkappa - 1)(a_\varkappa - 2)\dots(a_\varkappa - \mu + 1)$$

zu ersetzen ist. Es ist vielleicht nicht überflüssig, den Beweis für diese Darstellungsart anzugeben. Die Ableitung des Ausdruckes von c_μ durch die s_μ geschieht am einfachsten durch die Formel:

$$1 - c_1 x + c_2 x^2 - \dots \pm c_n x^n = e^{-s_1 x} e^{-\frac{s_2 x^2}{2}} e^{-\frac{s_3 x^3}{3}} \dots$$

Demgemäss haben wir hier zu setzen:

$$1 - C_1 x + C_2 x^2 - \dots \pm C_n x^n \mp \dots = e^{-S_1 x} e^{-\frac{S_2 x^2}{2}} e^{-\frac{S_3 x^3}{3}} \dots$$

und folglich nach 11):

$$= e^{\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \log(1 - x_\lambda x)},$$

$$13)\quad 1 - C_1 x + \dots \pm C_n x^n \mp \dots = (1 - x_1 x)^{a_1}(1 - x_2 x)^{a_2}\dots(1 - x_n x)^{a_n}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten ergiebt:

$$C_\mu = \sum_{(\varkappa)} \binom{a_1}{\varkappa_1}\binom{a_2}{\varkappa_2}\cdots\binom{a_n}{\varkappa_n} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2}\cdots x_n^{\varkappa_n},$$

wobei die Summe über alle positiven ganzen $\varkappa$ erstreckt wird, für die

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \mu$$

ist. Daraus folgt dann:

$$\mu!\, C_\mu = \sum_{(\varkappa)} \frac{\mu!}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots \varkappa_n!} a_1(a_1-1)\ldots(a_1-\varkappa_1+1)x_1^{\varkappa_1}\ldots$$

$$= \sum_{(\varkappa)} \frac{\mu!}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots \varkappa_n!} a_1^{(\varkappa_1)} x_1^{\varkappa_1} a_2^{(\varkappa_2)} x_2^{\varkappa_2}\ldots$$

$$= (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^{(\mu)}.$$

Aus 13) erkennt man noch unmittelbarer als aus 12), dass die Forderung, alle C_μ sollen verschwinden, sobald $\mu > n$ ist, nur durch ganzzahlige positive Werthe von $a_1, a_2, \ldots a_n$ erfüllt werden kann, und da die Summe der a gleich n ist, nur durch $S_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \cdots + x_n^\mu$ und durch die hieraus entstehenden Specialisirungen, in denen einige der x einander gleich gesetzt werden.

Die Differentialgleichungen 10) werden häufig mit Vortheil dazu benutzt, die numerischen Coefficienten von symmetrischen Functionen zu berechnen, deren litteraler Theil vorliegt. Ist z. B.:

$$s_4 = u_0c_1^4 + u_1c_1^2c_2 + u_2c_1c_3 + u_3c_2^2 + u_4c_4$$

gegeben, wobei die u noch unbekannte numerische Grössen bedeuten, dann liefert 10):

$$-4\frac{\partial s_4}{\partial s_4} = -4 = u_4, \quad 3\frac{\partial s_4}{\partial s_3} = 0 = u_2c_1 + u_4c_1,$$

$$-2\frac{\partial s_4}{\partial s_2} = 0 = (u_1c_1^2 + 2u_3c_2) + u_2c_1^2 + u_4c_2,$$

$$+1\frac{\partial s_4}{\partial s_1} = 0 = (4u_0c_1^3 + 2u_1c_1c_2 + u_2c_3) + (u_1c_1^2 + 2u_3c_2)c_1 + u_2c_1c_2 + u_4c_3.$$

Das System von linearen Gleichungen

$$u_4 = 4, \quad u_2 + u_4 = 0, \quad u_1 + u_2 = 0, \quad 2u_3 + u_4 = 0,$$

$$4u_0 + u_1 = 0, \quad 2u_1 + 2u_3 + u_2 = 0, \quad u_2 + u_4 = 0$$

ergiebt dann die Werthe:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = -4, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = -4;$$

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4.$$

Die Benutzung dieser Methode fordert als Berechtigungsnachweis noch, dass gezeigt wird, die Gleichungen 10) reichen wirklich stets zur Auffindung

sämmtlicher Coefficienten u aus, wie auch immer die Function R beschaffen sei. Ich will diesen Beweis, so einfach er auch ist, hier geben, da ich ihn noch nirgends gefunden habe. Es ist also vorausgesetzt, dass R einmal in seinem litteralen Theile durch $c_1, c_2, \ldots c_n$ mit unbekannten Coefficienten u ausgedrückt ist, andererseits, was sich ja leicht durchführen lässt, durch die $s_1, s_2, \ldots s_n$. Bilden wir nun zunächst

$$(-1)^{n-1} n \frac{\partial R}{\partial s_n} = \frac{\partial R}{\partial c_n},$$

so treten auf die rechte Seite alle und nur diejenigen Coefficienten u, welche zu Aggregaten $u c_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma \ldots c_n^\varepsilon$ gehören, bei denen der Exponent ε von c_n einen von Null verschiedenen Werth hat. Alle diese u sind nach der Differentiation mit verschiedenen Aggregaten der c multiplicirt, und jedes dieser u kommt nur einmal vor. Stellt man die linke Seite daher gleichfalls durch die c dar und vergleicht, so giebt dies eine eindeutige Bestimmung aller dieser Coefficienten. Ist das erledigt, dann gehen wir zu

$$(-1)^{n-2}(n-1)\frac{\partial R}{\partial s_{n-1}} = \frac{\partial R}{\partial c_{n-1}} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_n}$$

über. Als unbekannte Coefficienten u können nur solche auftreten, die der erste Summand rechts enthält, und das sind alle diejenigen, welche in Aggregaten $u c_1^\alpha c_2^\beta \ldots c_{n-1}^\delta c_n^\varepsilon$ vorkommen, in denen δ einen von Null verschiedenen Werth hat. Jeder derselben kommt nur einmal vor und es können verschiedene u nicht gleichen Aggregaten angehören. Ein Vergleich der rechten mit der durch die c ausgedrückten linken Seite giebt demnach die eindeutige Bestimmung aller dieser noch unbekannten Coefficienten. Es können in $\frac{\partial R}{\partial c_{n-1}}$ auch bereits bekannte Coefficienten eingehen, nämlich die aller Aggregate mit δ, $\varepsilon \neq 0$; die hierdurch sich ergebenden Beziehungen sind widerspruchsfrei, wie das aus der Existenz des Systems 10) folgt. Auf diese Art kann man fortfahren und so der Reihe nach sämmtliche Coefficienten u bestimmen.

Giessen. EUGEN NETTO.

XXIX. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte eines Kegelschnitts und einer Curve dritten Grades.

I.

1. Sind irgend drei Geraden L und zwei Punkte a, b gegeben, so ist dadurch ein Büschel von Curven C^3 bestimmt, die alle durch die Punkte a, b gehen und die Geraden L zu Asymptoten haben und zwar gehen alle diese Curven C^3 noch durch einen weiteren auf ab gelegenen Punkt c. Legen wir durch ab einen Kegelschnitt C^2, so bestimmt jede C^3 auf diesem Kegelschnitt vier weitere Punkte p und der Ort der Seiten

des Vierecks dieser vier Punkte p ist eine Curve der dritten Klasse K^3, indem durch jeden Punkt auf C^2 nur eine C^3 geht und von ihm also auch nur drei solche Vierecksseiten ausgehen. Unter den Curven C^3 ist aber auch eine solche, die in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und in die Gerade ab zerfällt und von den sechs Seiten des zugehörigen Vierecks fallen vier auf G_∞, während zwei die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 sind. Die Curve K^3 hat also die Gerade G_∞ zur Doppeltangente und die Asymptoten des Kegelschnitts C^2 zu einfachen Tangenten.

2. Liegt weiter die Mitte einer Sehne de des Kegelschnitts C^2 auf einer Geraden G, so ist ihr Ort eine Parabel P^2, die ebenfalls die Asymptoten von C^2 berührt. Die beiden Curven K^3 und P^2 haben aber ausser G_∞ und diesen beiden Asymptoten noch zwei weitere Tangenten gemein, das heisst, auf der Geraden G liegen zwei Punkte, die Mitten von Sehnen de sind, die zugleich zu Seiten obiger Vierecke werden; oder wir finden:

Jede der Curven C^3 bestimmt auf dem Kegelschnitt C^2 vier Punkte p und der Ort der Mitten der sechs Seiten des Vierecks der Punkte p ist ein Kegelschnitt K^2 und da der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts K^2 zugleich Schwerpunkt der Ecken jedes einzelnen Vierecks ist, so haben also die vier Punkte, die eine C^3 auf C^2 bestimmt, einen festen Punkt zum Schwerpunkt und ebenso haben auch alle sechs Punkte (ab und $4p$), die auf C^2 und irgend einer Curve C^3 gelegen sind, einen festen Punkt s zum Schwerpunkt.

3. Ist ferner irgend eine Curve $C^3{}_1$ gegeben, die dem obigen Büschel nicht angehört, dagegen die gleichen Geraden L zu Asymptoten hat, welche mit dem Kegelschnitt C^2 unter Anderem zwei Punkte r und t gemein hat, so können wir unter den obigen Curven C^3 zunächst diejenige auswählen, die durch den Punkt r geht. Durch die Punkte a und r ist dann ein neues Büschel von Curven C^3 mit den Asymptoten L bestimmt und die sechs Punkte, welche eine Curve dieses Büschels auf C^2 bestimmt, haben den gleichen Punkt s zum Schwerpunkt, indem eine Curve zugleich beiden Büscheln angehört. Von diesem zweiten Büschel können wir übergehen zu einem Büschel durch r und t und finden, dass auch die Curven dieses Büschels auf C^2 je sechs Punkte mit dem Punkte s als Schwerpunkt bestimmen und da diesem Büschel die Curve $C^3{}_1$ angehört, so folgern wir daraus, dass überhaupt jede Curve dritten Grades, welche die Geraden L zu Asymptoten hat, mit C^2 sechs Punkte gemein hat, die einen festen Punkt s zum Schwerpunkt haben, und da die drei Asymptoten selbst als eine solche Curve aufgefasst werden können, so haben wir, wenn wir noch berücksichtigen, dass die Abschnitte einer Geraden, welche die Asymptoten eines Kegelschnitts und den Kegelschnitt selbst ausschneiden, dieselbe Mitte haben:

Der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kegelschnitts C^2 und einer Curve dritten Grades ist der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte der Asymptoten der ersten Curve mit den Asymptoten der zweiten Curve und dieser Schwerpunkt bleibt derselbe, wenn wir die beiden Curven beliebig verändern, jedoch ihre Asymptoten beibehalten, und soll also der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte beider Curven bestimmt werden, so können wir eine oder beide Curven durch ihre Asymptoten ersetzen.*

II.

1. Die Polarkegelschnitte C^2 einer Basis C^3 für Pole auf der unendlich fernen Geraden bilden ein Büschel durch vier Grundpunkte. Jeder dieser Kegelschnitte schneidet eine Asymptote in zwei zugeordneten Punkten einer Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte der Kegelschnitte des Büschels sind, die die Asymptote berühren. Einer dieser Berührungspunkte ist aber der unendlich ferne Punkt der Asymptote selbst, in dem für diesen als Pol der zugehörige Kegelschnitt die Basis und somit auch die Asymptote selbst in diesem Punkt berührt. Der andere Berührungspunkt auf der Asymptote ist also Mitte der Strecke zwischen je zwei zusammengehörigen Punkten der Involution; oder, die Polaren C^2 für Pole auf G_∞ in Bezug auf eine Basis des dritten Grades bestimmen auf jeder Asymptote der letzteren Sehnen, die eine gemeinsame Mitte haben. Wir folgern daraus aber, dass die sechs Punkte, welche einer der obigen Polarkegelschnitte mit den Asymptoten gemein hat, einen festen Schwerpunkt haben, oder wir finden folgenden von Chasles gegebenen Satz:

Jeder Polarkegelschnitt C^2 eines Pols p auf der unendlich fernen Geraden in Bezug auf eine Basis des dritten Grades C^3 hat mit dieser sechs Punkte gemein, die einen festen Punkt s zum Schwerpunkt haben, oder, ziehen wir an eine Basis des dritten Grades irgend sechs parallele Tangenten, so haben deren sechs Berührungspunkte einen festen Punkt s zum Schwerpunkt.

Der Punkt s ist zudem Schwerpunkt des Asymptotendreiecks der Curve C^3.

2. Drehen wir eine Curve C^3 um einen Pol p um einen Winkel von 180°, so liegen von den gemeinsamen neun Punkten der beiden Lagen der Curve C^3 drei auf der unendlich fernen Geraden G_∞ und die übrigen sechs

* Dieser Satz gilt, wie wir a. a. O. gezeigt haben, ganz allgemein für zwei beliebige Curven des m^{ten} und n^{ten} Grades. Mit geringer Aenderung lässt er sich auf Kegelschnitte und Curven n^{ten} Grades ausdehnen, doch versagt diese Art des Beweises für den allgemeinen Fall; und wir haben es deshalb auch unterlassen, die in II. gez. Resultate auf eine beliebige Basis auszudehnen.

sind Endpunkte von drei solchen Sehnen aa_1, bb_1 und cc_1 der Basis, die ihre Mitte in p haben. Die Endpunkte dieser Sehnen liegen dann allemal auf einem Kegelschnitt J^2, der „inneren Polare“ des Punktes p in Bezug auf die Basis C^3. Ziehen wir weiter von p an die Basis C^3 die sechs Tangenten, so liegen die sechs Berührungspunkte derselben auf der „äusseren Polare A^2“ (ersten Polare) von p in Bezug auf dieselbe Basis.* Die unendlich fernen Punkte der letzteren sind aber die unendlich fernen Punkte der beiden Geraden L und L_1 durch p, die mit der Basis je drei Punkte gemein haben, deren Schwerpunkt p ist. Der Schwerpunkt der sechs Punkte a, a_1, b, b_1 und c, c_1 ist aber ebenfalls der Mittelpunkt p von J^2 und nach Obigem bleibt dieser derselbe, wenn wir die Polare J^2 durch deren Asymptoten ersetzen. Daraus folgt aber, dass die Asymptoten ebenfalls mit der Basis je drei Punkte gemein haben müssen, die in p ihren Schwerpunkt haben, da nur dann p Schwerpunkt der sechs gemeinsamen Punkte der Asymptoten mit der Basis sein kann. Die Asymptoten von J^2 sind also die Geraden L und L_1, oder wir finden: Die Polaren J^2 und A^2 haben parallele Asympoten (Steiner a. a. O.).

---

* Diese Bezeichnung rührt von Steiner her.

Cannstatt, im October 1895. BENEDIKT SPORER.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

---

40. Jahrgang.



Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1895.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Logik und logischer Calcul.

Arithmetik, Zahlentheorie, Analysis, Algebra.

Synthetische und analytische Geometrie. Trigonometrie.

Historisch-literarische Abtheilung.

Historische Miscellen II.

Von

Dr. Armin Wittstein.

1. Da ich über einen von Dorn erklärten arabischen Himmelsglobus des 13. Jahrhunderts leider nur in einem sehr kurzen Anhängsel zu meinen Historisch-astronomischen Fragmenten berichten konnte und vermuthe, dass die „Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland“, in deren zweitem Bande Dorn seine Beschreibung veröffentlicht hat, nicht jedem Leser meiner Zeilen leicht zugänglich sind, so will ich hier zunächst, an Stelle jenes ungenügenden Citates, eine etwas ausführlichere Mittheilung treten lassen. Der vollständige Titel der angezogenen Abhandlung lautet in getreuer Copie: Description of an Arabic celestial globe, belonging to Major-General Sir John Malcolm, deposited in the Museum of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. By Dr. Bernhard Dorn. (London, 1829. Gr. 4°. Mit zwei Figurentafeln.) — Der Globus ist von Messing und „augenscheinlich persische Arbeit“, wie der Verfasser aus verschiedenen Merkmalen schliessen zu können glaubt. Sein Durchmesser wird zu $9^1/_2$ Zollen angegeben; hat man darunter englische zu verstehen, so wären dies etwa 230 mm. Die Schrift-Charaktere sind kufische. In der Nähe des Südpoles findet sich die Inschrift:

صنعه الفقير الى الله تعالى محمد
بن هلال المنجم الموصلي في سنة
خعد هجرية

„Der vor Gott dem Höchsten ganz Niedrige Mohammed ben Hilâl, Astronom von Môsul [am Tigris in Mesopotamien], hat ihn im Jahre 674 der Flucht verfertigt.“

Das Jahr 674 der Hegra begann (jul.) am 25. Juni 1275.

2. Die Entscheidung der berüchtigten, noch immer schwebenden Streitfrage nach dem wahren Entdecker der dritten Mond-Ungleichheit ist vor ungefähr zwei Jahren durch die grosse kritische Untersuchung, L'Almageste d'Abû'l Wéfa Albûzdjâni, des Herrn Baron Carra de Vaux, im 19. Bande des „Journal Asiatique“ (Huitième série. Paris, 1892), in ein

Stadium gelangt, das man versucht sein möchte, ein abschliessendes zu nennen; zum Mindesten aber mussten ihre Ergebnisse auf die Anhänger des jüngeren Sédillot eine sehr ernüchternde Wirkung ausüben. Ich halte es geradezu für meine Pflicht — auch schon deshalb, weil ich mich in diesen Blättern selbst offen zur Meinung L. Am. Sédillot's bekannt habe — die Aufmerksamkeit der Astronomen und Mathematiker, die sich nicht mit der Lektüre philologischer Zeitschriften befassen, auf diese bedeutsame Arbeit des französischen Gelehrten zu lenken, und um so mehr glaube ich mich hierzu berufen, als meines Wissens bis jetzt von anderer Seite Nichts der Art geschehen ist.

Ausser der Einleitung, die übrigens keine Sylbe davon enthält, dass man irgend eine Entdeckung zu erwarten habe, zerfällt der „Almagest“ des Abû'l Wefâ in drei Theile: 1. Ebene und sphärische Trigonometrie. 2. Anwendung der trigonometrischen Formeln auf Beobachtungen. 3. Theorie der Bewegung der Planeten. Hiervon umfasst der erste Theil das Beste, während der dritte, der eigentlich den Kern des Werkes bilden sollte, viel gelitten hat; „er entspricht durchaus nicht Dem, was der erste erwarten lässt, und rechtfertigt in keiner Weise das Ansehen, dessen sich Abû'l Wefâ als Beobachter erfreute“.

„Die noch immer fortbestehenden Dunkelheiten im 10. Abschnitte des Kapitels vom Monde [الثالث الذى يوجد للقمر المسمّى اختلاف المحاذاة فى الاختلاف von der 3. Ungleichheit, die sich beim Monde findet und Ungleichheit moḥâḏât heisst] müssen auf einer nachtheiligen Textveränderung beruhen, die, wie wir an mehreren Stellen Gelegenheit hatten zu betonen, überhaupt die ganze dritte Abtheilung von Abû'l Wefâ's Almagest in schädlicher Weise beeinflusst hat. Gleichwohl scheint der in Rede stehende Abschnitt ganz besonders gelitten zu haben. Der Styl krankt an seltener Schwerfälligkeit, die Exposition ist ungemein weitschweifig; bald bezieht sich der Verfasser auf ein voraufgehendes Kapitel über denselben Gegenstand, bald äussert er sich so, als käme er nun zu Etwas, das bisher noch nicht erklärt worden sei.“ ...... „Geben wir daher Jedem, was ihm gebührt: Tyge Brahe den vollen Ruhm, da er niemals ein Schriftstück eines arabischen Astronomen vor Augen haben konnte, welches die erste Entdeckung der Variation enthielt; Ptolemaeus oder seinen Vorgängern die Ehre einer genaueren Theorie, als man im Allgemeinen anzunehmen geneigt ist, die den Keim der dritten Mond-Ungleichheit in sich trug; Abû'l Wefâ und seinen Landsleuten endlich sehr wenig in der bewussten Angelegenheit, höchstens das Verdienst fortgesetzter, aber unfruchtbarer Beobachtungen, insofern diese nämlich nur fähig waren, die Wissenschaft zu erstarken, nicht aber deren Fortschritt im Gefolge zu haben.“ — Diese Schlussworte anzuführen, schien mir nöthig; doch glaube ich kaum, dass ein Astronom, dem die Geschichte seiner Wissenschaft nicht ganz fremd ist, sie in allen

Punkten wird unterschreiben können. Derlei Bedenken haben jedoch mit der Hauptsache, auf die es hier ankommt, nichts zu thun, und kann daher ihre Begründung, die sich in Kürze nicht wohl würde erledigen lassen, füglich unterbleiben.

3. Ein Zufall setzt mich in den Stand, über die Lebenszeit des Mathematikers ʿOmar Alẖajjâmî Angaben machen zu können, die vielleicht als hinreichend erachtet werden dürften und, wenn ich recht unterrichtet bin, bis zur Gegenwart vermisst wurden, selbst bei Historikern, wie Franz Woepcke (L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî etc. Paris, 1851) und Moritz Cantor (im I. Bande seiner „Vorlesungen"), die der Würdigung seiner Leistungen im vollen Maasse gerecht werden. Er hat jedenfalls in dem Zeitraume von 1056 bis 1123 unter den Lebenden geweilt, später aber nicht mehr; denn im letztgenannten Jahre starb er. — Dazu hat das Excerpt aus einem persischen Codex verholfen, welches Hyde in seinem tiefgelehrten Werke über die Religion der alten Perser* glücklicherweise der Nachwelt überliefert hat, von dem aber nur der Anfang uns hier interessirt: In Libro *Persico* D. *Bunclei*, Num. 44, de Morte Celeberrimi *Astronomi Omar Cheiyâm*, sequente modo legitur;

وتاريخ قد مذكور ومسطور
است كه وفات ملك الحكما سلطان العلما
قدوة الفضلاء علام خواجه عمر خيام در سنة
سبع عشر وخمس مايه بوده است در
نيشابور ودر تمام علوم وحكميات يكانه
واعلم زمانه بود خواجه نظامى عروضى
سمرقندى كه اعلم وقت خود.بود
ويكى از شاگردان خواجه عمر بوده u. s. w.

In Chronico memoratum & exaratum est, quòd Mors Regis Sapientum & Principis Doctorum atque Exemplaris Excellentium, Doctissimi Chogja Omar Cheiyâm accidit anno 517 in Urbe Neishâbur. Atque in omnibus Scientiis ac Sapientiis unicus & scientissimus sui temporis fuit Chogja Nesâmi Versificator Samarcandensis, qui sui temporis Doctissimus atque unus ex Discipulis dicti Chogja Omar fuit: et is mortem Chogja Omar sequente modo narrat.

Der Anfang des Jahres 517 d. H. fällt (jul.) auf den 27. Februar 1123. — Da der H̱ôǵa (Lehrer, Meister) ʿOmar im Jahre 1076 zum anni persici reformator erwählt worden war, so musste er damals, auch wenn er der Monge seiner Zeit gewesen wäre, doch etwa 20 Jahre gezählt haben. Nîschâbûr, wo er aus dem Leben schied, liegt im nordöstlichen Persien ungefähr unter $36^1/_4{}^0$ Nordbreite.

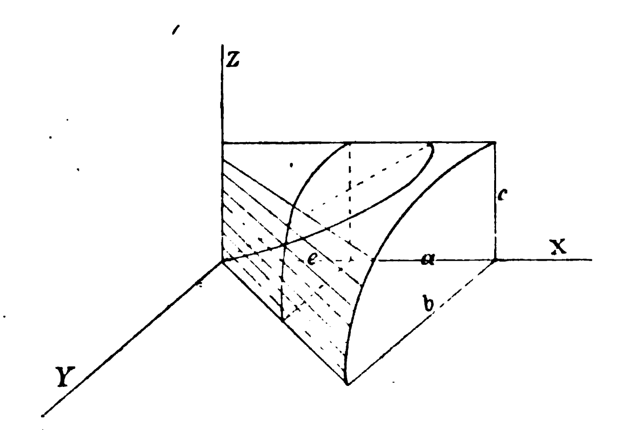
4. Schleifen bildende Curven, ganz besonders ihr Prototyp, die Lemniscate, hat das Alterthum eben so zweifellos gekannt, wie deren

---

* Veterum Persarum et Parthorum et Medorum Religionis Historia. (Autor est Thomas Hyde, S. T. D. Linguae Hebraicae in Universitate Oxon. Professor Regius, & Linguae Arabicae Professor Laudianus.) Editio secunda. Oxonii, MDCCLX. 4°. S. 529.

mathematische Discussion dazumal unterblieb, vielleicht auch unterbleiben musste, und erst sehr spät, im August 1638, also zu einer verhältnissmässig gar nicht so weit hinter uns liegenden Zeit, begegnen wir einer solchen, nämlich der des sogenannten „Cartesischen Blattes“; von dieser Curve sagt M. Cantor („Vorlesungen“, II. Bd. S. 781), „dass sie vermuthlich eine der ersten, wenn nicht die erste Schleifenlinie gewesen sei, mit der man sich beschäftigt habe“.

Die Lemniscate oder, wenn man lieber will, die Hippopede des Eudoxus* definirte vor ca. 2000 Jahren Heron von Alexandria als Schnitt eines wulstartigen Rotationskörpers ($\sigma\pi\varepsilon\tilde{\iota}\varrho\alpha$) mit einer Ebene, und nirgends ist angegeben, dass dieselbe jemals als ebener Schnitt einer Regelfläche betrachtet worden wäre, die sich auch schon den Alten fast von selbst hätte darbieten können. Es ist, wenn ich mich so ausdrücken darf, ein Mittelding zwischen dem geraden Cylinder und Kegel, das ich meine, d. h. eine Fläche, bei der die erzeugende Gerade, statt wie beim Kegel, durch den Mittelpunkt eines Basis-Kreises des Cylinders hindurchzugehen, sich längs eines Durchmessers dieses Kreises bewegt, wodurch zwei mit der Schneide an einander stossende keilförmige Gebilde oder Conoïde entstehen, aus denen die Lemniscate sammt ihrer allgemeinen Gestalt, die jetzt Cassini'sche Curve heisst, durch ebenen Schnitt hervorgeht, wie das Folgende durch eine höchst einfache Entwickelung, auf nur ein wenig allgemeinerer Grundlage, zeigen wird.



Eine Ellipse, von den Halbachsen b und c, sei so situirt, dass ihr Mittelpunkt auf der Achse der X, in der Entfernung $x=a$ vom Ursprunge, liegt, und ihre beiden Achsen resp. parallel den Achsen der Y und der Z sind. Eine zur Ebene der XY parallele Gerade möge nun gleichzeitig die Ellipse und die Achse der Z treffen;

* Die neueste, der Untersuchung der Hippopede gewidmete Schrift ist betitelt: „Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos. I. Theil: Lebensbeschreibung des Eudoxos, Ueberblick über seine astronomische Lehre und geometrische Betrachtung der Hippopede von Hans Künssberg. (Programm zum Jahresbericht der viercursigen Königl. Realschule Dinkelsbühl pro 1888.)“ 8°. Mit einer Figurentafel.

dann ist der geometrische Ort aller Lagen der erzeugenden Geraden die windschiefe Regelfläche

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Schneidet man diese Fläche durch eine Ebene, welche durch die Achse der Y gelegt und gegen die XY-Ebene um den Winkel α geneigt ist, und nimmt, um die wahre Schnittfigur zu erhalten, eine leichte Coordinaten-Transformation vor, so ergiebt sich

$$\frac{x_0}{y_0}(c - x_0 \sin\alpha) \cdot \frac{x_0}{y_0}(c + x_0 \sin\alpha) = \left(\frac{ac}{b\cos\alpha}\right)^2,$$

eine Gleichung, die sofort den Lemniscaten-Charakter der betreffenden Curve verräth. Letztere schneidet die neue Achse der X in $x_0 = 0$ und $x_0 = \pm c.\operatorname{cosec}\alpha$, oder im Coordinaten-Anfang und in zwei Punkten, in denen die Tangente senkrecht auf der Achse der X steht. Im ersten wird ihre Neigung durch $\pm\frac{b}{a}\cos\alpha$ bestimmt, d. h. die Neigung der beiden hier möglichen Tangenten; denn der Anfangspunkt der Coordinaten erscheint als ein Doppelpunkt, wenn auch nicht im allgemeinen Sinne. Weiter besitzt die Curve in

$$\left(x_0 = \pm\frac{c.\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{2}},\; y_0 = \pm\frac{bc}{2a}\cdot\operatorname{cotg}\alpha\right)$$

Maximalpunkte, in denen die Tangenten parallel der Achse der X sind. Führt man in die obige Gleichung die Polarcoordinaten r, γ ein und berücksichtigt, dass $r\cos^2\gamma = r_1$, so folgt:

$$r_1 = \pm\frac{\sqrt{(b^2c^2\cos^2\alpha - a^2c^2) + (b^2c^2\cos^2\alpha + a^2c^2)\cos 2\gamma}}{b.\sqrt{2}.\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Ist nun $\cos\alpha = \frac{a}{b}$, so erhält man die gemeine Lemniscate:

$$r_1 = \frac{\pm c}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}}\cdot\sqrt{\cos 2\gamma},$$

die im Coordinaten-Anfange, ihrem Inflexionspunkt, unter 45° mit concaver Krümmung ansteigt, und bei der die halbe Entfernung ihrer Brennpunkte

$$\frac{c}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\frac{a^2}{b^4}}}$$

beträgt. Ein solcher Schnitt ist aber nur dann reell, wenn $a < b$, d. h., wenn die beiden Geraden $(ay - bx)(ay + bx) = 0$, die Spuren unserer Fläche in der alten XY-Ebene, einen Winkel mit einander einschliessen, der grösser als 90° ist, oder wenn die Fläche eine grosse Apertur besitzt.

Jede, zur Ebene der YZ parallele Ebene, z. B. die in der Entfernung $x = e$ vom Anfangspunkte, schneidet das Conoïd nach einer Ellipse. Der körperliche Inhalt des keilförmigen Raumes zwischen Schnittellipse und Achse der Z wird, wenn man bei der Integration von einem der immer gleichschenkelige Dreiecke liefernden Querschnitte parallel der Ebene der XY ausgeht:

$$V = \frac{e^2 b}{ac} \cdot \int_{-c}^{+c} \sqrt{c^2 - z^2}\, dz = \frac{e^2}{2a} \cdot c b \pi.$$

Eine Tangentenebene

$$\zeta z x^2 b^2 + \eta y a^2 c^2 + \xi x (z^2 - c^2) b^2 - x^2 z^2 b^2 = 0$$

an die Fläche (welche für $b = c$ in den cono-cuneus von Wallis übergeht) schneidet sie nach einer Erzeugenden und einer Linie dritter Ordnung.

Wird endlich in der voraufgehenden Lemniscaten-Gleichung der Factor der Wurzelgrösse im Zähler der Einheit gleich, so nimmt das die Länge des Lemniscaten-Quadranten darstellende elliptische Integral erster Gattung die Form an:

$$\int_0^1 \frac{dr_1}{\sqrt{1 - r_1^4}}.$$

Die abgekürzte Multiplication.

Von

Maximilian Curtze

in Thorn.

Es unterliegt ja keinem Zweifel, dass in der freilich nur handschriftlich erhaltenen Arithmetica von Jost Bürgi die abgekürzte Multiplication gelehrt ist, und dass dieses Werk kurz nach 1592 geschrieben wurde. Aber Jost Bürgi ist nicht der Einzige, welcher auf diesen Rechnungsvortheil gelangt ist, und zwar geschah dies etwa um dieselbe Zeit oder etwas später. Vor mir liegt eine Handschrift, welche den Titel führt: „Georgii Joachimi Rhetici Canon Triangulorum. Johannes Praetorius Joachimicus Canonem hunc olim ab authore acceptum, descripsit Cracouiae, Anno 1569. Idem denuo differentiis et sinu verso auctum, eundem depinxit Anno 1599 Mense Julio, Altorfij."*

Dem eigentlichen Canon ist auf den folgenden leeren Blättern mancherlei hinzugefügt unter dem Gesammttitel: „Varii Generis Miscellanea Congesta a Johan. Praetorio Joachimico." Diese Miscellanea enthalten nach einander: „I. Methodus constructionis Magni Canonis Rhetici." „II. Recentiorum quaedam inuenta, ad compendiosam Canonis constructionem spectantia." „III. Compendiosa multiplicatio duorum interse sinuum, quando factus per 1000 etc. diuidendus est", und daran anschliessend steht dann Folgendes:

Possunt et in multiplicatione duorum sinuum, vel quorumcumque aliorum numerorum, praeteriri superuacaneae notae, quae alias per diuisionem sinus totius resecari solent.

237401	5
184710	2
237401	5
189920	8
9496	0
1661	8
23	7
	4
438504	

Si multiplicari debent nostri propositi, ducatur primus inferioris, velut 1, in omnes superiores. postea hac inferiore nota, cum postrema superioris scilicet 5 deleta, subsequens inferioris, scilicet 8, in residuas superioris multiplicetur. Rursus 8 cum penultima superioris, scilicet 1, deletis sequens inferioris, scilicet 9, in residuas superioris etc. Sed sciendum, si factus diuidi debet per sinum totum, qui habet unitati postpositas tot zyphras, quot sunt notae in inferiore numero multiplicato:

---

* Codex latinus Monacensis Nr. 24101, früher ZZ 1101. In gross Folio.

quod ultima linea adhuc amputari debet, ut vides in exemplo. ad id tamen prodest, ut ultima nota quoti nostri eo exactior definiri possit.

```
484809|6
 12452 4
--------
 48180|9
 33936|0
  9696|0
  1939|2
   242|0
     9|6
     1|6
--------
 60369|
```

Item sinus 29 gr scilicet sit ducendus in sinum 1 gr

```
484809|6
 12452 4
```

scilicet, et factus diuidendus in 10000000. Hic in inferiore sunt 6 notae et tamen propter 10000000 7 ultimae notae ampu-tandae. Ergo tollatur de superiore ordine ultima nota, ut vides. Ratio per se manifesta est.

Aliter. Vel ordine inverso, ut ultima inferior in primam superiorem, postea penultima inferioris in duas priores superioris: item antepenultima inferioris in tres priores superioris etc. et hic modus vulgaris multiplicationis ordinem seruat.

```
48480 9|6
 12482 4
--------
      1|6
      9|6
    242|0
   1939|2
   9696|0
  48480|9
--------
  60369|
```

Si sinus 7503415 multiplicari debet in 57320 et factus in 10000000 dividi. Siquidem superior numerus plene loca sinus explet, inferior deficit: sic collocato: et amputatis superioribus quoque duabus notis, perficiatur ut antea multiplicatio.

```
 7503 4|15
 5732 0|
----------
 37517|0
  5252|1
   225|0
    15|0
----------
 43009|
```

Item si 508071 ducendum sit in 3421, et factus in 10000000 dividendus. Quia maior numerus pro radio dato plenus non est, deberet enim habere 7 notas ab initio, defectum exple adposita 0 hoc modo: et amputatis tribus superioribus abundantibus notis supra inferiorem modo solita multiplica.

```
0508|071
3421|
--------
 152|9
  20|0
   1|0
--------
 173|
```

Sit 45082 ducendus in 425 et partiendus in 100000. Maiorem video notas pleni sinus habere, sic igitur collocandi:

```
     450|82
     425|
   --------
    180|0
      9|0
      2|0
   --------
Fac. 191|
```

Sit 7538 multiplicandus in 7041 et factus in 100000 dividendus. Neuter horum pleni sinus notas habet. Sic ergo notabis.

```
 0753|8        Proba:    7538
 7041                    7041
 ------              ----------
 527|1                  | 7538
   2|8                 3|0152
 ------              527|66
 530|                ----------
               Fac.: 530|
```

Multiplicetur 50384 in 70342 et factus diuidatur in 10000000. Sumo alterutrum et quidem maiorem.

```
   00703|42
   50384
  ---------
    351|5
      2|1
  ---------
Fac.: 353|
```

Possit el aliter fieri, sed haec collocatio est expedita.

Solent hypotenusae et quaedam tangentes pleno sinu esse abundantiores, si ergo cum aliis multiplicandi: vide exempla sequentia. Quoties sinus plenus in abundantiorem numerum multiplicandus, prior regula observetur, ut:

```
   753879
    30104
  ---------
 226163|4
    753|8
     30|0
  ---------
 226947|
```

Divisore existente 100000.

Si uterque aequaliter abundans, superiori tot zyphras adponito, quot sunt notae abundantes. Ut datis 3204534 et 3204534. Cum radius sumatur 100000, duae utrinque notae ultra sinum perfectum abundant, ergo duabus. Zyphris superior augeatur.

```
 320453400
   3204534
 -----------
 96136020|0
  6409068|0
   128181|2
    16022|5
      961|2
      128|0
 -----------
102690381|
```

Idem fiat, si alter in duabus notis reliquus in una abundat. Ut si dati sint 257312 et 25030. Diuisore posito 10000.

```
 257312 0
   2503 0
 ---------
 514624|0
 128656|0
    771|9
 ---------
 644052|
```

Si unus abundat, alter deficit, de abundante tot amputentur notae, quot in reliquo deficiunt et obseruatur regula. Ut datis: 32057 et 734. Diuisor autem sit 10000. Minori ad plenitudinem una nota deest, ergo abundanti una auferenda nota.

```
  320 5|7
   73 4
 ---------
  2243|5
    96|0
    12|8
 ---------
  2352|
```

Item dati sint 3201251 et 352. Diuisoris 100000. Quia minor duabus a pleno notis deficit: ergo de maiore duae amputandae notae, si numerus is sit plenus siue abundans.

```
  3201 2|51
    35 2
 ---------
   9603|6
   1600|5
     64|0
 ---------
  11268|
```

Si duo abundantes aequaliter, tot maiori Zyphras subiungantur, quot in alterutro abundant.

Si inaequaliter abundat uterque, tot maiori 0 adiungantur, quot notae in minore abundant.

Si multiplicandus
- I. Plenus in plenum: servatur generalis regula;
- II. Plenus in abundantem: eadem teneatur regula. abundante superiore loco collocato;
- III. Plenus in deficientem vel diminutum: tot amputantur notae de maiore, quot deficiunt in minore;
- IIII. Abundans in abundantem: tot . 0. maiori adiciantur, quot abundant in minore;
- V. Abundans in deficientem: de abundante tot auferantur notae, quot deficiunt in minore;
- VI. Deficiens in deficientem: de maiore tot notae auferantur, quot deficiunt in minore et subscribatur minor.

De quo vero numero una vel plures notae amputantur is semper superiori loco collocetur, reliquus ei subscribatur.

Dass hier für die abgekürzte Multiplication von Decimalbrüchen, denn nur um solche handelt es sich ja, alles geleistet ist, was an Fällen überhaupt vorkommen kann, ist klar. Praetorius hat für alle anderswoher entnommenen Regeln, ja selbst Beispiele, stets den Verfasser derselben angegeben — er nennt z. B. Otho, Rheticus, Pitiscus, Adrian van Romen, Ludolph von Coeln u. A. —, so dass anzunehmen erlaubt ist, dass er alles nicht mit solchem Hinweis Versehene als sein Eigenthum in Anspruch nimmt. Es ist daher wohl nicht mehr als billig, wenn man ihm für die Erfindung und Verbreitung dieser wichtigen Rechnungsart neben Jost Bürgi als Hauptbewerber nennt. An das eben Mitgetheilte schliesst sich als

IV. die vollständige Auflösung der rechtwinkligen und der schiefwinkligen sphaerischen Dreiecke sehr übersichtlich in Tabellenform gebracht.

Am Schlusse derselben findet sich folgende für die Geschichte wichtige Bemerkung:

„Johan. Wernerus Norimbergensis, in suis IIII de triangulis libris ut plurimum occupatus fuit in demonstratione qualitatis arcus quaesiti vel anguli, quae comitatur qualitatem datorum. **Eos libros Werneri Rheticus habuit, sed manuscriptos**, necdum puto excusos. In quarto libro duos illos casus pertractat, quorum regulas proximis duabus paginis exposuimus, sed aliquanto prolixior est, opus enim habet duabus operationibus."

Es ist dies jedenfalls diejenige Stelle, auf welche sich Doppelmayr* als in einem Manuskripte des Praetorius befindlich bezieht. Nach einigen leeren Blättern folgt dann folgende:

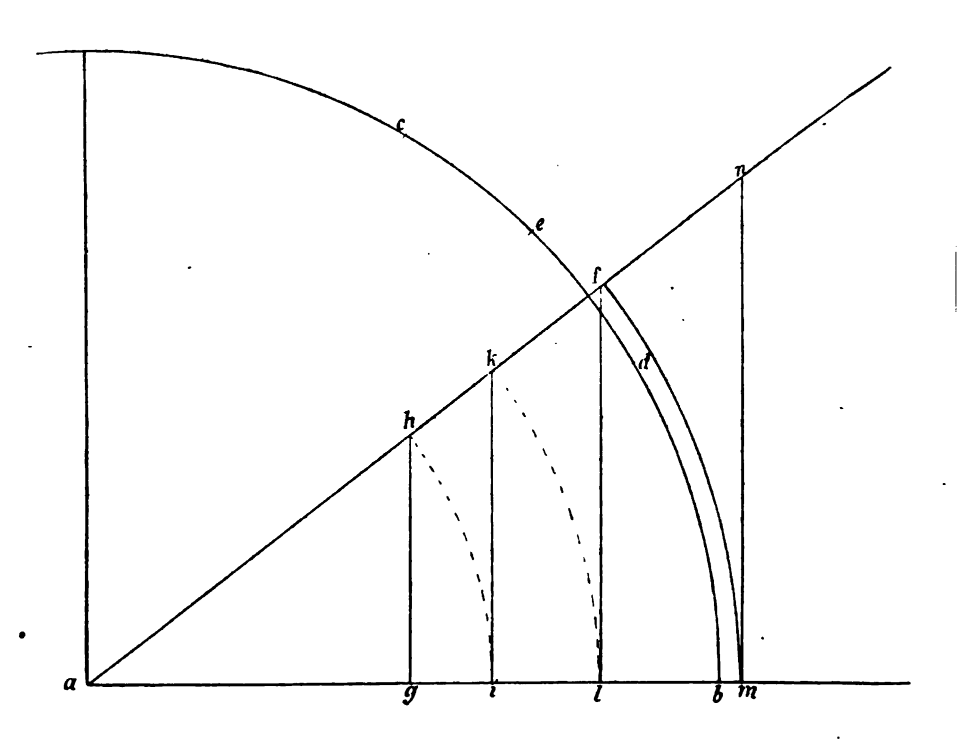
Cubi duplatio practica. Joh. Pr.

In quadrante sit *bc* arcus hexagoni, et bifariam secetur in *d*. Rursus arcus *dc* bifariam in *e* et iterum *de* in *f*, et connectatur *af*, et producatur *db*, *af* quousque libet. Detur iam latus cubi *ag* et erigatur perpendiculum *gh*. Et erit *ah* latus cubi, qui duplus est prioris differentia insensibili. Ad demonstratiuam autem praecisionem angulus *fab* in modico iusto maior est, non tamen duorum primorum scrupulorum unius gradus interuallo, quod perceptu difficile est. Ad sensum fiet probatio, si *ah* aequalis fiet *ai*, et ductu perpendiculari *ik* fiat huic aequalis *al*. Et rursus ducta perpendiculari *lf* fiat *af* aequalis *am*, et perpendicularis tandem erigatur *mn*. Manifestum est *ag*, *ai*, *al*, *am* deinceps analogos esse sicut et *ah*, *ak*, *af*, *an*. Item *gh*, *ik*, *lf*, *mn*. Quando igitur *am* dupla depraehendetur ipsius *ag*, vel *an* dupla *ah*, vel tandem *gh* dimidium ipsius *mn*, certum erit propositum. Ex diligenti autem descriptione hoc fieri

* Doppelmayr, Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern. Nürnberg 1730. Fol. S. 84, Anm. cc.

depraehendetur. Arbitramur verò practice hanc rationem commodiorem esse quam ullam veterum. Est enim certi aliquid ubi in diuisionibus subsistat absque errore sensibili.

Possit et ad aliam datam cuborum rationem similis angulus fieri mediante tab. sinuum, sed non est expedita scrupulorum numeratio in circumferentia quadrantis.



Nach Praetorius' Construction müsste $\sqrt[3]{2} = sec\,37^0\,30'$ sein. Nun ist

$$sec\,37^0\,30' = 1{,}2604724$$

und

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210,$$

sowie

$$sec\,37^0\,28' = 1{,}2599101,$$

daher ist seine Aussage gerechtfertigt, dass der Winkel baf noch nicht voll um $2'$ zu gross ausfalle. Bei einem Meter Seite würde die Kante des doppelten Würfels sich noch nicht um 0,6 mm von der Wahrheit entfernen.

Nach den auf losen Blättern vorn in der Handschrift befindlichen Notizen hatte Rheticus für den Umfang des Kreises vom Durchmesser 1 gefunden:

$$\pi < 3{,}141592653528.$$

Johann Otto* hatte Praetorius im August 1573 zu Wittenberg mitgetheilt, dass der Umfang des Kreises grösser sei als

$$6\frac{4247779609}{15000000000}:2, \text{ aber kleiner als } 6\frac{4247779611}{15000000000}:2.$$

Praetorius rechnet das um in

$$3{,}1415926536\tfrac{1}{2} < \pi < 3{,}1415926537.^{**}$$

Derselbe Otho hatte ihm damals noch gesagt: „Et contracte admodum proximum esse rationem ut 355 ad 113 et vere propiorem quam ea qua Ptolemaeus usus est, media scilicet inter Archimedis terminos videlicet et 377 ad 120.“***

Rheticus hatte seinen Werth aus dem sinus $1'' = 4848136811 : 10^{15}$ gewonnen, das heisst, aus der halben Seite des 648000ecks, während Ludolph von Cöln bis zum 167772160eck gegangen war. Nachdem Praetorius auch die beiden π einschliessenden Werthe Ludolph's gegeben hat, setzt er hinzu:

„Quid putas deberi ei, qui adhuc 10 vel 100 latera hisce adinuenit? Respondeo: Minus quam 0“,

und mit dieser sicherlich für das vortreffliche Verständniss ihres Verfassers zeugenden Bemerkung will ich diese vielleicht schon zu lange Notiz schliessen.

---

* Johann Otto muss heissen Valentin Otho. Man sehe meine kleine Note: „Zur Biographie des Rheticus“ (Altpreussische Monatsschrift XXXI, 5. u. 6. Heft, S. 491—496), wo ich weitläufiger über diese Notizen gehandelt habe.

** Hiervon ist offenbar die erste Behauptung falsch, da

$$\pi < 3{,}1415926536$$

ist.

*** Damals (1573) war also der Näherungswerth $\frac{355}{113}$ für π schon bekannt, von welchem Adrian Metius sagt, sein Vater habe ihn in einer Streitschrift wider Duchesne zuerst veröffentlicht. Diese Streitschrift kann doch aber vor 1583 resp. 1586, in welchen Jahren die Schriften des Duchesne erschienen sind, nicht herausgekommen sein, somit müsste also Otho als der Erfinder dieses bequemen Verhältnisses angesehen werden. Die Entstehungsart

$$\frac{355}{113} = \frac{377-22}{120-7}$$

ist ja wohl an sich klar. Es ist der sogenannte Correspondenzsatz mit Subtraction auf die näherungsweise richtige Proportion

$$\frac{377}{120} \sim \frac{22}{7}$$

angewendet worden.

Recensionen.

Sophus Lie. **Theorie der Transformationsgruppen.** Dritter und letzter Abschnitt. Unter Mitwirkung von Friedrich Engel. Leipzig 1893. B. G. Teubner. XXV u. 830 S.

Das grosse Werk über die von Herrn Lie begründete Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen — man vergleiche die in dieser Zeitschrift (Bd. 34 1889 S. 191 u. flg., Bd. 39 1894 S. 95 u. flg.) erschienenen Besprechungen der beiden voraufgegangenen Bände — liegt mit dem dritten Bande nunmehr abgeschlossen vor.

Man darf wohl schon jetzt behaupten, dass dieses Werk in der Geschichte der mathematischen Literatur eine bleibende Stelle einnehmen wird.

Was die Wirkung auf die nächste Zukunft angeht, so sind wir überzeugt, dass gerade der vorliegende Schlussband wegen der mannigfachen Anwendungen auf Geometrie und Invariantentheorie viele Fachgenossen veranlassen wird, das Studium der grundlegenden beiden ersten Bände nachzuholen.

Andererseits liegt es in der Natur der Sache, dass einmal eine Reihe von Anwendungen aus dem specifischen Bereiche der Gruppentheorie nicht heraustreten, andere wiederum (so auf die Theorie der complexen Zahlen, Differentialinvarianten, Mechanik) hier nicht berücksichtigt werden konnten.

Vorab sei hervorgehoben, dass ein sorgfältiges, von Herrn Engel ausgearbeitetes Namen- und Sachregister dem Leser eine nicht unwesentliche Erleichterung in der Orientirung gewährt. Viele werden auch den Herausgebern Dank wissen für das ausführliche Schlusskapitel über die gruppentheoretischen Untersuchungen anderer Forscher, welches damit zugleich die Leistungen von Herrn Lie selber in das richtige Licht rückt.

Der Inhalt lässt sich im Wesentlichen in vier verschiedene Theile zerlegen.

Im ersten Theile werden die endlichen continuirlichen Gruppen (von Punkttransformationen) im Gebiete der Geraden, der Ebene und des Raumes, unter ihnen wiederum insbesondere die projectiven Gruppen, klassificirt nach „Typen", aufgestellt.

Während diese Entwickelungen eine gewisse Vollständigkeit erreichen, stösst die Ausdehnung derselben auf den n-fach ausgedehnten Raum auf solche Schwierigkeiten, dass — im zweiten Theile — eine Beschränkung auf einzelne Klassen besonders wichtiger Gruppen eintritt.

Dagegen lassen sich die wichtigsten Eigenschaften der endlichen continuirlichen Gruppen mit verhältnissmässiger Leichtigkeit auf den Fall übertragen, wo die Transformationen derselben rein reell sind; insbesondere erfährt dadurch der erste Theil eine wesentliche Ergänzung.

Der dritte Theil erörtert eingehend eine der vorzüglichsten Anwendungen, die Herr Lie überhaupt von seiner Theorie gemacht hat, nämlich auf die Grundlagen der Geometrie, soweit dieselben eben den Mitteln der Gruppentheorie überhaupt zugänglich sind.

Im letzten Theile werden allgemeine Betrachtungen über endliche continuirliche Gruppen entwickelt, die eine Ergänzung zu den beiden ersten Bänden des Werkes bilden, namentlich insofern, als sie eine rein begriffliche Auffassung von den Beweisen der Hauptsätze ermöglichen.

Des Schlusskapitels ist bereits gedacht worden.

Bei der überreichen Fülle des Stoffes muss von vornherein auf eine gleichmässige Besprechung der einzelnen Kapitel verzichtet werden; da es sich überdies vorwiegend um Fruchtbarmachung von früher entwickelten Methoden handelt, mag es uns um so eher gestattet sein, nur die wichtigsten Ergebnisse, sowie den Standpunkt, den die Herausgeber bei den einzelnen Problemen einnehmen, zu skizziren.

Da ist denn gleich zu Anfang der grundlegende Satz zu betonen, dass die verschiedenen Gruppentypen der Geraden, das ist der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit — sofern immer alle Gruppen zu einem und demselben Typus gerechnet werden, die sich durch Ausübung irgend welcher Transformationen der Variablen in einander überführen lassen — auf die Normalform von projectiven Gruppen gebracht werden können. Es sind nur drei Typen, welche repräsentirt werden durch die allgemeine projective Gruppe auf der Geraden nebst den beiden Untergruppen von ihr, welche zwei Punkte resp. einen Punkt auf der Geraden festlassen. Dieser Befund mag Manchem sehr plausibel scheinen, ist aber keineswegs so sehr leicht beweisbar. Von den drei völlig verschiedenen Beweisen, welche dafür erbracht werden, mag etwa der zweite, als besonders durchsichtig, gekennzeichnet werden.

Die infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen, das heisst von r und nicht weniger Parametern abhängende Gruppe in einer Variablen x hat die Gestalt:

$$\{e_1 \xi_1(x) + e_2 \xi_2(x) + \cdots + e_r \xi_r(x)\} \frac{df}{dx} = \xi(x) \frac{df}{dx},$$

wo f eine beliebige Function, die ξ_i gewisse Functionen von x, und die e_i willkürliche Constante bezeichnen. Der Factor $\xi(x)$ kann als die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$\frac{d^r \xi}{dx^r} + \alpha_1(x) \frac{d^{r-1} \xi}{dx^{r-1}} + \cdots + \alpha_{r-1}(x) \frac{d\xi}{dx} + \alpha_r(x)\xi = 0$$

angesehen werden, und umgekehrt definirt eine solche Gleichung eine r-gliedrige Gruppe in x, sobald ihr die charakteristische Eigenschaft zu-

kommt, dass stets irgend zwei Lösungen ξ, η eine dritte $\xi\eta' - \eta\xi'$ bedingen.

Die genannte Forderung führt fast unmittelbar zu einer Reihe von Identitäten zwischen den a, welche erstens zeigen, dass r nur der Werthe 1, 2, 3 fähig ist; zweitens, dass in diesen drei Fällen die bez. Gleichungen lauten müssen:

$$\xi' + \alpha\xi = 0, \quad \xi'' + \alpha\xi' + \alpha'\xi = 0, \quad \xi''' + 2\alpha\xi' + \alpha'\xi = 0;$$

drittens, dass jede dieser Gleichungen — ganz gleichgiltig, welche Function man für $\alpha(x)$ nimmt — immer nur einen einzigen Gruppentypus definirt.

Wählt man den speciellen Werth $\alpha = 0$, so resultirt gerade die projective Normalform für die drei Gruppentypen:

$$1)\ \xi = e_1, \quad 2)\ \xi = e_1 x + e_2, \quad 3)\ \xi = e_1 x^2 + e_2 x + e_3,$$

oder, in endlicher Darstellung:

$$1)\ x_1 = x + a, \quad 2)\ x_1 = ax + b, \quad 3)\ x_1 = \frac{ax + b}{1 + cx},$$

wo die a, b, c Parameter bedeuten.

Hieran knüpft sich sofort die besondere, aber nicht minder wichtige Aufgabe, die verschiedenen Typen projectiver Gruppen auf der Geraden anzugeben, wo nunmehr alle die Gruppen zu einem und demselben Typus zu rechnen sind, welche durch projective Transformationen in einander übergehen.

Mit Hilfe der zu der „allgemeinen" projectiven Gruppe 3) adjungirten Gruppe und einer geeigneten geometrischen Deutung derselben findet man, dass zu den obigen drei projectiven Typen jetzt nur noch eine hinzutritt; die eingliedrige Gruppe 1) spaltet sich nämlich in zwei, von denen die eine zwei getrennte, die andere zwei zusammenfallende Punkte auf der Geraden festlässt. Während die letztere eben durch 1) repräsentirt wird, wird es die erstere durch:

$$1') \qquad x_1 = ax.$$

Die eben erörterte Aufgabe erweitert sich abermals zu der, alle Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in zwei Variabeln:

$$4) \qquad x_1 = a_1 x + a_2 y; \quad y_1 = a_3 x + a_4 y$$

zu bestimmen.

Die Durchführung stützt sich wesentlich darauf, dass diese Gruppe eine – durch die Bedingung $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1$ charakterisirte — invariante Untergruppe besitzt, welche mit der allgemeinen projectiven Gruppe 3) holoedrisch isomorph ist.

Im Ganzen ergeben sich elf Untergruppen von 4), von denen zwei dreigliedrig, vier zweigliedrig, fünf endlich eingliedrig sind.

Die Verfasser wenden sich nunmehr zu der ungleich schwierigeren Bestimmung aller Typen von endlichen continuirlichen Guppen der Ebene.

Die Lösung erfolgt stufenweise; erst werden die primitiven Gruppen erledigt, das sind solche, bei denen keine einzige Curvenschaar $\varphi(x, y) = const.$

invariant bleibt, sodann die imprimitiven Gruppen, diese wieder in gewisse Klassen eingetheilt.

Ob eine Gruppe G der Ebene primitiv ist oder nicht, lässt sich fast unmittelbar entnehmen aus den Anfangsgliedern der Reihenentwickelung, welche für die infinitesimale Transformation der einen beliebigen Punkt der Ebene in Ruhe lassenden Untergruppe von G besteht.

Hieraus wird, mit Hilfe früherer Sätze, ohne Weiteres das merkwürdige Ergebniss hergeleitet, dass nur drei primitive Typen existiren, die sich wieder auf eine projective Normalform bringen lassen:

$$5)\qquad x_1=\frac{ax+by+c}{gx+hy+1},\quad y_1=\frac{dx+ey+f}{gx+hy+1},$$

$$6)\qquad x_1=ax+by+c,\quad y_1=dx+ey+f,$$

7) dito mit der Bedingung $ae-bd=1$.

Sie heissen die allgemeine projective Gruppe (der Ebene), die lineare und die specielle lineare Gruppe, und führen resp. gerade acht, sechs, fünf Parameter mit sich.

Bei einer imprimitiven Gruppe G existirt mindestens eine invariante Curvenschaar $\varphi(x, y) = const$; führt man also an Stelle von x, y zwei neue Veränderliche ein, deren eine φ ist, so giebt es eine zu G isomorphe Gruppe G', welche die eine Variable φ für sich transformirt. Daher sind vier Fälle zu unterscheiden, da, wie wir wissen, φ nur drei-, oder zwei-, oder ein-, oder nullgliedrig (in letzterem Falle nämlich gar nicht) transformirt werden kann.

Eine eingehende Untersuchung der vier Fälle führt zunächst zu einem Systeme von Gruppentypen, welche sicher alle überhaupt möglichen Typen imprimitiver Gruppen umfassen.

Weiter handelt es sich darum, zu entscheiden, welche der so gewonnenen Typen etwa noch mit einander äquivalent sind.

Dies durchaus nicht so einfache Problem ist auch dadurch von Interesse, als es auf ein anderes, schon von Laguerre, Halphen, und weiterhin von englischen Mathematikern behandeltes Problem zurückführbar ist, nämlich festzustellen, welche invarianten Eigenschaften einer linearen Differentialgleichung gegenüber gewissen Transformationen beider Variabeln zukommen.

Die wirkliche Lösung der Aufgabe geschieht indessen auf einem directeren Wege: man wird die imprimitiven Gruppen der Ebene noch einmal in Klassen einzutheilen suchen, jetzt aber derart, dass jede Gruppe einer und nur einer Klasse angehört.

Dazu dient die Zahl der bei einer Gruppe invarianten Schaaren von je ∞^1 Curven; je nachdem diese Zahl gleich 1, oder 2, oder ∞^1, oder aber ∞^∞ ist, hat man vier Hauptklassen von Gruppen zu unterscheiden.

Die gemeinte Eintheilung lässt sich rein begrifflich durchführen und erlaubt dann, aus der kurz zuvor erwähnten Tabelle imprimitiver Typen die überflüssigen auszuscheiden; die Ermittelung der jeweils invarianten Curvenschaaren erfolgt aber auch auf analytischem Wege, sodass man die Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Schaaren wirklich hinschreiben kann.

Die endlichen continuirlichen Gruppen von Punkt-Transformationen lassen sich auch als reducible Gruppen von Berührungs-Transformationen auffassen; da andererseits bereits im zweiten Bande des Werkes alle Typen irreducibler Gruppen von Berührungs-Transformationen aufgestellt waren, so ist man nunmehr im Besitze eines jedenfalls vollständigen Systems der Gruppen von Berührungs-Transformationen in der Ebene. Auch hier bedarf es wieder einer ergänzenden Untersuchung, welche überflüssige Typen beseitigt.

Es erübrigt für das Gebiet der Ebene noch die Lösung der — Algebraiker, Geometer und Zahlentheoretiker in erster Linie interessirenden — Aufgabe, alle projectiven Gruppen in Typen einzutheilen.

Dieselben ordnen sich von selbst so an, dass entweder einem Typus der dualistische gegenüber steht, oder aber ein Typus zu sich selbst dualistisch ist.

Es ist beachtenswerth, dass die Entwickelungen dieses Kapitels unabhängig von den vorhergehenden gehalten sind, so dass ihr Verständniss nur die einfachsten Sätze aus der Gruppentheorie und der neueren Geometrie erfordert.

Zunächst werden die verschiedenen Typen von eingliedrigen projectiven Gruppen in Angriff genommen; es geschieht das auf Grund der Thatsache, dass jede projective Transformation der Ebene, also auch jede infinitesimale, mithin auch jede eingliedrige projective Gruppe mindestens einen Punkt und eine durch ihn gehende Gerade — oder, wie man kürzer sagt, ein „Linienelement“ — in Ruhe lässt. Verlegt man die Gerade in's Unendliche, so wird damit für eine infinitesimale projective Transformation von vornherein eine einfache canonische Gestalt gewonnen. Deren Discussion liefert fünf verschiedene Typen eingliedriger Gruppen; jeder von ihnen ist zu sich selbst dualistisch, und kann vollkommen dadurch charakterisirt werden, dass er je ein bestimmtes, aus Punkten und Geraden zusammengesetztes Gebilde invariant lässt.

Eine unmittelbare Anwendung davon wird gemacht auf die Behandlung der zuerst von F. Klein und Lie gelösten Aufgabe, diejenigen ebenen Curven zu bestimmen, welche (eine oder mehrere) infinitesimale projective Transformationen in sich zulassen.

Abgesehen von den Geraden und Kegelschnitten sind das nur die Curven $y = e^x$ und $y = x^\alpha$, wo der Parameter α von $0, \frac{1}{2}, 1, 2 - 1$ verschieden anzunehmen ist, und diese gestatten auch nur je eine einzige infinitesimale projective Transformation.

Von den fünf Typen eingliedriger Gruppen wird für die Fortführung der Aufgabe am wichtigsten der anderswo bei Lie auch als „Elation“ bezeichnete, welcher alle Punkte einer Geraden und zugleich alle Strahlen eines auf ihr liegenden Punktes invariant lässt. Untersucht man nämlich eine projective Gruppe daraufhin, ob und wieviel Elationen sie enthält, so gelangt man zu dem wichtigen Ergebniss, dass — mit Ausnahme der allgemeinen projectiven Gruppe, sowie der dreigliedrigen, welche einen (eigentlichen) Kegelschnitt invariant lässt — jede projective Gruppe mindestens einen Punkt, oder aber dualistisch eine Gerade in Ruhe lässt.

Man kann sich daher auf die Gruppen beschränken, bei denen ein Punkt in Ruhe bleibt, und man wird dieselben nunmehr in Klassen eintheilen, je nach der Art und Weise, wie die Gruppe die ∞^1 Richtungen durch den festgehaltenen Punkt unter sich transformirt.

So ergeben sich im Ganzen 35 verschiedene Typen projectiver Gruppen, deren infinitesimale Transformationen in einer Tabelle vereinigt werden.

Referent möchte hier die principielle Bemerkung einschalten, dass die Herausgeber vielen Fachgenossen, denen es vorerst weniger darum zu thun ist, sich die Methoden der Gruppentheorie anzueignen, als ihre Anwendungen kennen zu lernen, einen Dienst erwiesen haben würden, hätten sie ihrer symbolischen Tabelle der infinitesimalen Transformationen eine zweite reale an die Seite gestellt, mit den Gleichungen der Gruppen in der geläufigen endlichen Gestalt.

Herr Lie und seine Schüler werden zwar einwenden, dass es im einzelnen Falle nicht so schwer sei, die infinitesimale Form der Gruppe in die endliche umzusetzen; Referent muss aber persönlich gestehen, dass es bei ihm langdauernder Uebung bedurft hat, um eine derartige „Transponirung“ anstandslos vornehmen zu können. So naturgemäss das Rechnen mit den infinitesimalen Transformationen einer Gruppe ist, so lange über die Natur der Coefficienten in den endlichen Gleichungen gar keine Beschränkungen vorliegen, die Sachlage gestaltet sich ganz anders, wenn besondere Probleme — beispielsweise die Klassification algebraischer Differentialgleichungen bei Vessiot — eine functionentheoretische oder zahlentheoretische Präcisirung der Coefficienten erheischen.

Einem Coefficienten a der infinitesimalen Transformation kann in der endlichen Gleichung der Gruppe je nachdem wiederum ein Coefficient a entsprechen, oder aber e^a, oder auch la u. s. f.

Für die speciell hier in Betracht kommenden projectiven Gruppen der Ebene bieten die endlichen Gleichungen auch noch den nicht zu unterschätzenden Vortheil, dass man, von ihnen ausgehend, die Differentialinvarianten und invarianten Differentialgleichungen der Gruppen viel directer bestimmen kann, und zugleich so, dass ihre geometrische Bedeutung erhellt.

Es wäre übrigens für die Geometer eine dankbare Aufgabe, zunächst die projectiven Gruppen von Neuem zu bestimmen, ohne von den specifischen Methoden der allgemeinen Gruppentheorie Gebrauch zu machen.

Die Lie'sche Tabelle der projectiven Gruppen der Ebene dient ihrerseits wiederum als Grundlage zur Aufstellung einer entsprechenden Tabelle für die linearen, homogenen Gruppen in drei Veränderlichen, die nicht nur von Wichtigkeit ist für die Klassification der endlichen continuirlichen Gruppen von Punkt-Transformationen des Raumes, sondern auch für die Zwecke der Zahlentheorie Bedeutung gewinnen wird. Es tritt jetzt die Aufgabe heran, die für Gerade und Ebene erlangten Resultate auf den Raum auszudehnen. Da die vollständige Ausführung dieses schwierigen Problems, wie sich erwarten lässt, einen ungemeinen Aufwand von Zeit und Raum beanspruchen würde, so begnügen sich die Herausgeber damit — sowohl im Falle der endlichen continuirlichen Gruppen überhaupt, wie in dem der projectiven Gruppen —, gewisse hervorragende Kategorien von Gruppen wirklich aufzustellen, und im Uebrigen den Weg zu bezeichnen, auf dem der Leser die in Rede stehenden Fragen erschöpfen kann.

Unter den endlichen continuirlichen Gruppen des Raumes verdienen die meiste Beachtung die primitiven unter ihnen, bei denen also weder eine ∞^1 Schaar von Flächen, noch eine ∞^2 Schaar von Curven invariant bleibt.

Die Natur einer solchen Gruppe G hängt in erster Linie von derjenigen Untergruppe ab, welche einen beliebig gewählten Punkt P fest lässt, oder auch von der mit letzterer isomorphen Gruppe G', welche die ∞^2 Richtungen durch P transformirt. Diese Gruppen G' sind ja identisch mit den projectiven Gruppen der Ebene. Wirkliche Schwierigkeiten bereitet nur der Fall, wo G' einen (eigentlichen) Kegel zweiten Grades invariant lässt, oder, analytisch ausgedrückt, eine partielle Differentialgleichung in drei Variabeln, erster Ordnung und zweiten Grades.

Unter Zuziehung der Monge'schen Charakteristikentheorie reducirt sich dann die Aufgabe auf die andere, alle die Berührungs-Transformationen der Ebene (von einer gewissen Parameterzahl) zu finden, welche eine gewisse Curvenschaar der Ebene invariant lassen.

Derartige Ueberlegungen haben das beachtenswerthe Ergebniss zur Folge, dass es nur acht verschiedene Typen von primitiven (endlichen continuirlichen) Raumgruppen giebt, als deren canonische Repräsentanten man wählen kann:

1. die allgemeine projective Gruppe,
2. die affin-projective Gruppe,
3. diejenige Untergruppe von 2., welche zugleich alle Volumina unverändert lässt,
4. die Gruppe eines (eigentlichen) linearen Complexes,
5. die Gruppe einer (eigentlichen) Fläche zweiten Grades,
6. die Gruppe aller Bewegungen,

7. die Gruppe aller Bewegungen und Aehnlichkeits-Transformationen,
8. die Gruppe aller Transformationen durch reciproke Radien.

Einzeln genommen waren diese Gruppen den Geometern bekannt; das Wesentliche ist hier aber, dass sie zusammen ein „volles System“ primitiver Raumgruppen ausmachen.

Die imprimitiven Gruppen werden in drei Klassen eingeordnet, von denen die beiden ersten vollständig discutirt werden, nämlich einmal diejenigen Gruppen, bei denen eine Schaar von ∞^1 Flächen invariant bleibt, die sich aber nicht in eine invariante Schaar von ∞^2 Curven zerlegen lassen soll, sodann gerade umgekehrt diejenigen, welche eine ∞^2 Schaar von Curven in Ruhe lassen, ohne dass sich dieselben in eine invariante Schaar von ∞^1 Flächen zusammenfassen lassen.

Ist die Flächenschaar dargestellt durch $\varphi(x, y, z) = const$, die Curvenschaar durch $\varphi(x, y, z) = const$, $\psi(x, y, z) = const$, so kommt die Untersuchung (analog einem obenerwähnten Falle) darauf hinaus, zu ermitteln, wie die Mannigfaltigkeit der φ resp. der φ und ψ unter sich transformirt wird.

Hinsichtlich der noch fehlenden imprimitiven Gruppen werden wenigstens Methoden entwickelt, welche die ganze Aufgabe in eine grosse Anzahl einzelner Aufgaben zerlegen, deren jede unabhängig von den andern erledigt werden kann. Der Leser soll dadurch in den Stand gesetzt werden, sich jede Kategorie imprimitiver Raumgruppen, deren Kenntniss ihm gerade wünschenswerth ist, ohne principielle Schwierigkeiten zu verschaffen.

Herr Lie hat übrigens die erforderlichen Rechnungen schon vor längerer Zeit (wenn auch auf weniger einfachem Wege) durchgeführt und ist dabei zu dem theoretisch sehr wichtigen Ergebniss gelangt, dass jede transitive Raumgruppe, das heisst eine solche, welche zwei (innerhalb eines gewissen Bereiches) beliebig gewählte Punkte in einander überführen kann, sich auf eine solche canonische Form bringen lässt, dass die Coefficienten der infinitesimalen Transformation ganze rationale Functionen von x, y, z und von gewissen Exponentialausdrücken e^{λ_1}, $e^{\lambda_2}, \ldots$ werden, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ganze lineare Functionen von x, y, z bedeuten.

Ob ein ähnliches Gesetz für die transitiven Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes gilt, steht noch dahin.

Auch die Frage nach den (projectivisch) verschiedenen Typen projectiver Raumgruppen wird unter der Einschränkung behandelt, dass nur die primitiven unter ihnen nebst ihren sämmtlichen Untergruppen vollständig erforscht werden. Es sind das gerade die sieben ersten der oben mitgetheilten Tabelle.

Als Mittel zur Untersuchung dient die Frage nach den Curven und Flächen, welche eine Gruppe projectiver Transformationen in sich gestatten; für die vorliegenden Zwecke genügt die Annahme, dass die gemeinten Gruppen von mindestens drei Parametern abhängen.

Von Curven gehören hierher: Gerade, Kegelschnitt und cubische Raumcurve, von Flächen: Ebene, Kegel zweiter Ordnung, die Abwickelbare einer cubischen Raumcurve, die Fläche zweiten Grades und die Cayley'sche Linienfläche dritter Ordnung.

Im Interesse der Geometrie und Invariantentheorie möchte man es bedauern, dass die Herausgeber die in Rede stehende Frage nicht erschöpft haben, und im Zusammenhange damit, dass sie nicht wenigstens eine Tafel sämmtlicher eingliedriger projectiver Raumgruppen aufgestellt haben. Denn auf eine Fläche oder Curve (quaternäre Form oder Formenschaar), die infinitesimale projective Transformationen in sich zulässt, ist die übliche Invariantentheorie nicht ohne Weiteres anwendbar, so dass eben an dieser Stelle, wie Herr Lie in der Vorrede stark betont, der Invariantentheorie eine wesentliche Lücke auszufüllen bleibt. Die Vertreter dieses Gebietes würden, wie wir glauben, den ihnen gemachten Vorwurf geduldiger auf sich nehmen, wenn Herr Lie seine bittere Pille mit folgendem Zusatze etwa versüsst hätte: „Ihr habt allerdings eine wesentliche Lücke gelassen, aber ich kann es Euch nicht so übel nehmen, denn die Vorfrage, jene Formen — zunächst im quaternären Gebiete, wo die Sache überhaupt erst acut wird — selbst aufzustellen, ist eine gruppentheoretische und zwar keineswegs ganz leichte; meine Mittel indessen erlaubten mir deren Aufstellung: hier habt Ihr sie, verwendet sie nun fruchtbar und füllet jetzt mit Euren Mitteln Eure Lücke aus." Neben dieser drastischen Abschweifung sei noch eine andere damit verwandte Bemerkung pro domo gestattet.

In seiner Vorrede weist Herr Lie gelegentlich darauf hin, wie die mannigfaltigen Differentiationsprocesse, deren sich die projective Invariantentheorie bedient, nichts Anderes als Differentialinvarianten gegenüber gewissen projectiven Gruppen seien. Referent hat sich nun gerade in seinem „Berichte über die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie, von 1892" bemüht, zu zeigen, wie der gemeinte Gesichtspunkt vor Allem bei Study zur Geltung kommt.

Von den primitiven projectiven Gruppen kommt für die metrische Geometrie neben der Gruppe der Bewegungen vor Allem noch die „der Bewegungen und Aehnlichkeits-Transformationen" in Betracht, welche dadurch definirt ist, dass sie einen Kegelschnitt, den Kugelkreis, invariant lässt. Die einzigen (reellen) Flächen, welche bei dieser Gruppe gerade ∞^4 verschiedene Lagen annehmen, sind die Kugeln; andererseits die einzigen Curven, welche der nämlichen Bedingung entsprechen, die Geraden.

Dies ist die Quelle der Erscheinung, dass die Plücker'sche Liniengeometrie und die neuere, von Lie so sehr geförderte Kugelgeometrie unter den Versinnlichungen eines vierfach ausgedehnten Raumes eine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Die imprimitiven projectiven Raumgruppen lassen sämmtlich je eine gewisse Punktfigur invariant. Zuerst werden die wenigen Gruppen bestimmt,

bei denen die Figur keine ebene ist, sodann werden Methoden entwickelt, wie man zu den übrigen, welche also einen Punkt, oder eine Gerade, oder eine Ebene in Ruhe lassen, gelangen kann.

Das folgende Kapitel dehnt die bisher besprochenen Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen aus.

Was vor Allem die Erweiterungen auf den Raum R_n von n-Dimensionen angeht, so besteht vorläufig noch gar keine Aussicht auf Methoden, die die Bestimmung aller endlichen continuirlichen Gruppen, oder etwa blos der primitiven unter ihnen im R_n auch nur principiell erledigten.

Die Herausgeber begnügen sich daher mit einigen besonderen Untersuchungen, die, so zu sagen, als Muster dienen sollen. So über Gruppen des R_n, welche in gewissem Sinne analog sind den drei, früher an erster Stelle erwähnten projectiven Typen des R_3, ferner über solche, die möglichst transitiv sind, weiter solche, die einen Differentialausdruck zweiten Grades $D \equiv \Sigma f_{ik}(x) dx_i dx_k$, oder die Gleichung $D = 0$ invariant lassen.

Stehen schon die beiden letztgenannten Untersuchungen in nahem Zusammenhange mit denen über die Grundlagen der Geometrie, so gilt das in noch höherem Maasse von dem Kapitel über reelle Gruppen, das übrigens auch eine specifische Wichtigkeit für sich hat.

Es kommt darauf an, unter welchen Modificationen die allgemeinen Begriffe und Sätze der Gruppentheorie auf „reelle" Gruppen übertragbar sind, also auf solche, für die sämmtliche auftretenden Grössen (Variable, Parameter, Coefficienten, Zusammensetzungs-Constante u. s. f.) nur reelle Werthe annehmen sollen.

Sind $x_i' = f_i(x, a)$ die Gleichungen einer reellen Gruppe g (wo die a die Parameter bedeuten), so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob die f_i analytische Functionen ihrer Argumente, also auch für complexe Werthe derselben definirt sind, oder nicht.

Im ersteren Falle ist die Discussion der Gruppeneigenschaften verhältnissmässig einfach, zu g gehört eben stets eine zweite Gruppe G, die entsteht, wenn man für die Variablen und Parameter complexe Werthe zulässt, und man hat nur festzustellen, worin G und g übereinstimmen, und worin sie sich unterscheiden. So z. B. sind beide Gruppen stets gleichzeitig transitiv resp. intransitiv, dagegen kann sehr wohl die eine primitiv sein, die andere imprimitiv u. s. f.

Die Uebertragung der Fundamentalsätze geht glatt von Statten.

Verwickelter ist es im zweiten Falle, wenn die f reelle, nicht analytische Functionen der x und a sind. Hier ist es nöthig, tiefer liegende Untersuchungen von Cauchy und Lipschitz über die Lösungen reeller, nicht analytischer Differentialgleichungen heranzuziehen, wobei besondere Voraussetzungen über die Existenz erster und zweiter Ableitungen der f nach den x und a erforderlich sind. Die Beweise der Sätze werden nur angedeutet.

Als besonders merkwürdig und wichtig sei ein Theorem mitgetheilt, wonach es bei transitiven reellen Gruppen erlaubt ist, sich auf analytische Functionen f zu beschränken.

Die oben erwähnten Entwickelungen über Gruppen mit invarianter Gleichung $D \equiv \Sigma f_{ik}(x) dx_i dx_k = 0$ werden jetzt noch einmal für reelle Gruppen und reelle Ausdrücke D durchgeführt. In gleichem Sinne werden die in den ersten Kapiteln erhaltenen Listen von Gruppen auf der Geraden und in der Ebene ergänzt, wobei nur wenige Gruppen als neu aufzunehmen sind.

Wir müssen uns beeilen, zu einem der hervorragendsten Kapitel überzugehen, welches die Grundlagen der Geometrie vom gruppentheoretischen Standpunkte aus beleuchtet.

Bekanntlich hat zuerst Lobatschewski 1829 auf indirectem Wege dargethan, dass bei Preisgebung des elften Euklid'schen Axioms ausser der Euklid'schen Geometrie noch eine zweite existire. Sodann wies Riemann 1854 mit analytischen Hilfsmitteln — indem er vor Allem das Axiom zu Grunde legt, dass der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei — nach, dass bei gewissen Forderungen, über die Natur des Bogenelements, über die freie Beweglichkeit einer Linie ohne Aenderung ihrer Länge, und anderen, ausser der Euklid'schen Geometrie noch zwei andere möglich seien, von denen die eine eben die Lobatschewski'sche ist, während die andere mit der auf der Kugeloberfläche zusammenfällt. Die Riemann'schen Beweise sind 1870 von Lipschitz geprüft und vervollständigt worden.

von Helmholtz hat weiter in einer sehr bekannt gewordenen Arbeit von 1868 versucht, zu den Riemann'schen Ergebnissen zu gelangen, indem er die Riemann'schen Axiome durch elementarere und anschaulichere ersetzte, vor Allem unter Ausschluss solcher über unendlich benachbarte Punkte.

F. Klein wies Lie 1869 darauf hin, dass der Riemann-Helmholtz'schen Behandlung der Frage ein gruppentheoretisches Problem implicite zu Grunde liege. Lie hat dann 1884 mit seinen Mitteln die angeregte Untersuchung durchgeführt und dieselbe in zwei Arbeiten 1886 (ohne Beweise) und vollständig 1890 veröffentlicht.

Das fragliche Problem, hier schlechtweg als das „Riemann-Helmholtz'sche" bezeichnet, wird wörtlich formulirt (S. 397) wie folgt: „Es sollen solche Eigenschaften gefunden werden, die sowohl der Schaar der euklidischen, als den beiden Schaaren von nichteuklidischen Bewegungen zukommen, und durch die diese drei Schaaren vor allen anderen möglichen Schaaren von Bewegungen einer Zahlenmannigfaltigkeit ausgezeichnet sind."

Unter Schaaren von Bewegungen sind hier allgemeine Schaaren von Ortsveränderungen oder Punkt-Transformationen im R_n zu verstehen; da es indessen naturgemäss erscheint, davon auszugehen, dass die Zusammen-

setzung zweier eigentlicher Bewegungen stets wieder eine Bewegung liefert, so wird das Problem gleich im Anfange näher dahin präcisirt, dass unter einer Schaar von Bewegungen von vornherein eine „Gruppe“, das heisst eine reelle, continuirliche Gruppe von paarweise inversen Punkt-Transformationen gemeint sein soll. Wir werden uns im Wesentlichen auf den gewöhnlichen Raum, den R_3, beschränken.

Im Uebrigen sollen die gesuchten charakteristischen Eigenschaften für die Gruppen der drei Bewegungen in engerem Sinne — oder kürzer: für die drei „Urgruppen“ — geometrischer und zwar möglichst einfacher Natur sein.

Dass das Riemann'sche Axiom des Raumes als einer Zahlenmannigfaltigkeit hier adoptirt ist, ist ja selbstverständlich, da die Lie'sche Gruppentheorie ein rein analytisches Gebäude ist.

Auch jetzt ist das gestellte Problem noch sehr verschiedener Lösungen fähig, je nach der Auswahl der zu treffenden Merkmale. Lie hat wohl zuerst betont, dass derartige Merkmale für Bewegungen in zwei wesentlich getrennte Klassen zerfallen, je nachdem sie sich auf die infinitesimale Umgebung eines Punktes beziehen, oder aber auf endlich von einander entfernte Punkte.

Demgemäss wird die Aufgabe auch doppelt behandelt, so, dass einmal nur Eigenschaften der ersten Klasse, das andere Mal nur solche der zweiten benutzt werden, und zwar jedesmal ein System von nicht nur hinreichenden, sondern auch wirklich nothwendigen Eigenschaften der drei Urgruppen.

Das erstere Problem, bei dem nur unendlich benachbarte Punkte in Betracht kommen, erweist sich als das leichtere.

Es wird der neue Begriff der „freien Beweglichkeit im Infinitesimalen“ eingeführt: bei Festhaltung eines (reellen) Punktes P und eines (reellen) durch P gehenden Linienelementes p soll noch continuirliche Bewegung möglich sein, hingegen nicht mehr, wenn ausserdem noch ein durch P und p gehendes (reelles) Flächenelement π festgehalten wird.

Das Hauptresultat lautet dann, dass jede Raumgruppe, welche in einem (reellen) Punkte von allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzt, vermöge einer (reellen) Punkt-Transformation stets in eine der drei Urgruppen überführbar ist.

Der Kernpunkt des Beweises ist, dass man die Eigenschaften der fraglichen Gruppen, welche offenbar transitiv und sechsgliedrig sind, zurückführt auf die der dreigliedrigen projectiven Gruppe, welche die (reellen) Linienelemente durch P transformirt, wobei ein (imaginärer) Kegel von Linienelementen

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

invariant bleibt. Alle (reellen) sechsgliedrigen Gruppen der Art sind aber, nach einer früheren Rechnung, gerade unsere drei Urgruppen.

Im $R_n (n > 3)$ gestaltet sich die Sache ganz analog; nur in der Ebene reicht die freie Beweglichkeit im Infinitesimalen noch nicht hin zur Charakterisirung der drei Urgruppen.

Die zweite Lösung des Riemann-Helmholtz'schen Problems sollte nur Merkmale der zweiten Klasse benöthigen, also solche, die sich auf endlich entfernte Punkte beziehen.

Dass in der That zwischen den Merkmalen beider Klassen ein tiefgehender Unterschied herrscht, wird durch eine Reihe auffälliger Erscheinungen illustrirt.

So folgt z. B. aus der Annahme, dass bei einer (etc. continuirlichen) Gruppe zwei endlich entfernte Punkte im R_n stets eine und nur eine Invariante besitzen sollen, durchaus noch nicht das Gleiche für zwei benachbarte Punkte, sondern nur, dass solchen mindestens eine Invariante zukommt.

Ferner kann dabei (wie auch durch ein Beispiel belegt wird) der besondere Fall eintreten, dass eben diese Invarianten von zwei benachbarten Punkten alle homogen von nullter Ordnung in den dx sind. Da aber der Ausdruck für das Riemann'sche Bogenelement homogen von erster Ordnung in den dx ist, so kann also aus der Existenz einer Invariante zweier endlich entfernter Punkte, oder, wie man sagt, einer „Abstandsfunction", durchaus noch nicht mit Sicherheit auf die Existenz eines Bogenelementes geschlossen werden.

Die zweite Lösung des Problems verlangt von der fraglichen „Gruppe" nur, dass sich, nach Festhaltung eines Punktes P, irgend ein anderer, endlich von P entfernter Punkt Q noch auf einer, nicht durch P gehenden Fläche (oder doch zum Mindesten auf einem irreducibeln Theile derselben) völlig frei bewegen können soll, also so, dass Q in jeden anderen Punkt der Fläche noch continuirlich überführbar ist. Dass die Fläche nicht durch P hindurchgehen soll, verhütet, dass jemals zwei endlich entfernte Punkte in zwei benachbarte übergehen.

Eine solche Gruppe G erweist sich wiederum als transitiv, und zwei endlich entfernte Punkte haben bei ihr eine und nur eine Invariante; ferner ist sie als reelle Gruppe primitiv, weiter endlich und sechsgliedrig; endlich werden die Linienelemente durch einen Punkt P durch eine dreigliedrige Gruppe g transformirt.

Aus früheren Rechnungen lässt sich dann wiederum entnehmen, dass die einzig möglichen Gruppen G die drei Urgruppen sind.

Der Beweis für den Raum von mehr als drei Dimensionen ist entsprechend; nur bleibt hier immerhin die Möglichkeit offen, dass die analogen Axiome noch überflüssige Bestandtheile enthalten.

Man kann nunmehr auch noch verlangen, dass die drei Urgruppen selber durch rein gruppentheoretische Merkmale von einander geschieden werden.

Dies ist in der That ausführbar: beschränken wir uns wieder auf den gewöhnlichen Raum, so enthält die Gruppe der Euklid'schen Bewegungen eine „invariante" (reelle) Untergruppe, die beiden anderen Gruppen nicht; andererseits besitzen die letzteren (reelle) viergliedrige Untergruppen, die im Falle der Lobatschewski'schen Geometrie „integrabel" sind, im Falle der Riemann'schen nicht.

Die Helmholtz'schen Deductionen werden von Lie einer eingehenden Kritik unterzogen; als Haupteinwand ist anzuführen, dass von Helmholtz Eigenschaften endlich entfernter Punkte auf unendlich benachbarte Punkte überträgt, was, wie schon oben betont, nicht ohne Weiteres zulässig ist.

Lie hat sich damit aber nicht begnügt, sondern hat die Helmholtz'sche Arbeit — ähnlich, wie Lipschitz die Riemann'sche — in positiver Richtung ergänzt.

Hält man nämlich ausschliesslich an den vier Helmholtz'schen Axiomen fest, und versucht, deren Forderungen gruppentheoretisch zu präcisiren, so ergiebt sich, dass die drei ersten Axiome bereits gerade hinreichen zur Charakterisirung der drei Urgruppen, dass also dann das vierte, das sogenannte „Monodromie-Axiom", überflüssig wird.

Der Lie'sche Ansatz besteht darin, dass sich ein Theil der Helmholtz'schen Forderungen mit einer bestimmten gruppentheoretischen Frage deckt. Bezeichnet man nämlich eine Invariante, welche r Punkte des gewöhnlichen Raumes einer Gruppe gegenüber besitzen mögen, dann als „wesentlich", wenn sie sich nicht durch Invarianten von weniger als r Punkten ausdrücken lässt, so besagt die fragliche Formulirung, dass die drei Urgruppen jedenfalls solche sein müssen, für die je zwei Punkte stets eine einzige Invariante, mehr als zwei Punkte dagegen keine wesentliche Invariante haben.

Die Durchführung der Aufgabe, alle derartigen Gruppen zu ermitteln, führt auf elf Gruppentypen, von denen aber acht nachträglich in Wegfall kommen, da sie die weiteren Forderungen der drei ersten Helmholtz'schen Axiome nicht befriedigen.

Gegen die durch Riemann und Lipschitz vertretene Auffassung wird im Wesentlichen nur eingewandt, dass Begriffe, wie Bogenelement und a fortiori Länge einer Curve nicht elementar genug seien, um gerade bei den Grundlagen der Geometrie als Bausteine verwendbar zu sein.

Aehnlich wird allerdings Mancher auch die erste Lösung von Herrn Lie selber ansehen, denn die Vorstellung unendlich benachbarter Punkte ist schliesslich ebenso wenig „elementar", das heisst in diesem Falle so viel als anschaulich.

Am Schlusse seiner Entwickelungen wirft Herr Lie selber die Frage auf, welchen Nutzen dieselben für die Gesammterkenntniss der Grundlagen der Geometrie gewähren. Denn das letzte Ziel aller derartigen Bestrebungen müsse doch sein, die Geometrie auf einem „vollen" Systeme möglichst ein-

facher geometrischer Axiome aufzubauen, nämlich einem solchen, das zu dem Zwecke hinreichend sei, aber auch keine überflüssigen Bestandtheile enthalte.

Da ist denn nun die Meinung von Herrn Lie, dass seine beiden Lösungen des Problems je ein volles System von Axiomen involviren, nur dass das Axiom von der Zahlenmannigfaltigkeit des Raumes eben kein geometrisches (und einfaches) sei.

Es würde sich demnach weiterhin darum handeln müssen, das letztgenannte Axiom seinerseits durch ein äquivalentes System elementargeometrischer Axiome zu ersetzen, das zusammen mit den übrigen gruppentheoretischen Axiomen ein definitives volles System der gewünschten Art lieferte.

Einen Weg dazu giebt er nicht an, erwähnt auch die in dieser Richtung liegenden verdienstvollen Untersuchungen Neuerer, vor Allem von F. Klein, mit keinem Worte.

Unseres Erachtens müsste man zu dem Behufe den von Lie eingeschlagenen Weg consequent rückwärts verfolgen und seine Gruppentheorie selbst, wie schon oben bei dem Beispiele der projectiven Gruppen der Ebene bemerkt, rein geometrisch zu begründen versuchen.

Die grössten Schwierigkeiten würden hierbei voraussichtlich die Voraussetzungen machen, welche Herr Lie den reellen Gruppen zu Grunde legen musste, nämlich über die Existenz erster und zweiter Differentialquotienten der die Gruppe darstellenden Functionen.

Eben dieser Umstand macht die Lie'schen Axiome weit weniger einfach, als es auf den ersten Blick erscheint.

Herr Lie übt wiederholt an verschiedenen Fachgenossen eine sehr scharfe Kritik vom gruppentheoretischen Standpunkte aus. Es würde dem Referenten nicht anstehen, eine Kritik seinerseits wieder kritisiren zu wollen; es darf denn aber wohl doch nicht unerwähnt bleiben, dass z. B. eine Aeusserung (Vorrede S. XII) wie „das Verdienst der damit zusammenhängenden Untersuchungen des Herrn F. Klein über nichteuklidische Geometrie liege wesentlich darin, dass in ihnen die Resultate seiner Vorgänge popularisirt würden", auf starken Widerspruch stossen wird und muss.

Das letzte Kapitel bringt eine Reihe werthvoller Ergänzungen zu den beiden ersten Bänden: besonders instructiv für den Leser dürfte eine neue Redaction der Beweise für die grundlegenden Sätze der Theorie sein, welche den begrifflichen Kern der analytischen Operationen deutlich hervortreten lässt.

Möchten diese Zeilen an ihrem Theile zu einer unbefangenen Würdigung der Lie'schen Schöpfung beitragen.

Die selbstlose Hingabe des Mitarbeiters, Herrn F. Engel, die das Gelingen des ganzen Werkes erst ermöglichte, sei noch einmal rühmend hervorgehoben.

W. Fr. Meyer.

Leçons de l'agrégation classique de mathématiques par G. Königs, maître de conférences à l'Ecole normale supérieure et à la Sorbonne, professeur remplaçant au Collège de France. Paris 1892. A. Hermann. In 4⁰ lith. 208 pag. 10 Frs.

„Vielleicht ist es angemessen, für diejenigen unter unseren Lesern, welche mit den französischen Unterrichtsverhältnissen nicht vertraut sind, hier zu erwähnen, dass die „agrégation de mathématiques“ eine Prüfung ist, welche denjenigen, die sie bestehen, die Berechtigung verleiht, (Titular-) Professoren der Mathematik an einem staatlichen Gymnasium zu werden. Diese Prüfung umfasst verschiedene Theile von recht bedeutender Art, unter denen auch Lehrvorträge auftreten, die vor einer staatlichen Commission über Themata stattfinden, welche auf den Gymnasialunterricht Bezug haben und ein Jahr vorher bekannt gegeben werden. Diese Themata sind in den Lehrbüchern gewöhnlich sehr unvollständig behandelt und eben das ist einer der Gründe, sie zu wählen: sie sind natürlich der Gegenstand, mit dem sich vorzugsweise diejenigen beschäftigen, die, wie Herr Königs, damit beauftragt sind, die Candidaten anzuleiten, die sich zur Prüfung vorbereiten. Aus dieser Beschäftigung ist das Buch hervorgegangen, das wir besprechen.“ (Aus einer Recension des Herrn J. Tannery im „Bulletin des sciences mathématiques.“)

Jedoch ist nicht der ganze Band diesen Themen gewidmet; er zerfällt vielmehr in zwei Theile, die allerdings äusserlich nicht von einander geschieden sind: der eine (S. 5—108) enthält „einige der schwierigsten Themen, die für die Prüfung des Jahres 1892 aufgestellt sind“, und der zweite (S. 108—208) beschäftigt sich mit den anallagmatischen Curven und Flächen. Der Zweck dieses Theiles ist der, „die Studirenden mit einem der schönsten Kapitel der Geometrie bekannt zu machen, welches ihnen so schwer zugänglich geworden ist, seitdem das Buch des Herrn Darboux „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des Imaginaires“ (1873) vergriffen ist.*

Was an dem ersten Theile besonders angenehm auffällt und die Lectüre desselben zu einem wahren Genuss macht, ist die klare Durchführung aller dieser an sich ja einfacheren Probleme, der echt pädagogische Geist, der das Ganze durchweht, der alles Unnöthige bei Seite lässt, den Gedanken aber, der ausgearbeitet werden soll, bis zu seinen letzten Consequenzen durchführt, so dass Nichts unklar bleibt, und es wäre nur zu wünschen, dass eine ganze Reihe solcher Themen auch bei uns in ähnlichen Musterarbeiten erschienen; es könnte das nur von bestem Einfluss auf die Gediegenheit der Arbeiten unserer Candidaten sein.

---

* Dem Referenten ist dieses Werk leider nicht bekannt, so dass er eine Vergleichung mit demselben, die gewiss recht interessant gewesen wäre, nicht durchführen kann.

Die einzelnen Theile sind:

Schnitt zweier Flächen zweiten Grades in dem Falle, in welchem dieser Schnitt zerfällt. Auf der einen Fläche werden die Parameter λ und μ der geradlinigen Erzeugenden als Variable genommen; jeder Gleichung zwischen λ und μ entspricht eine Curve auf dieser Fläche, welche vom zweiten Grade in λ, sowie auch in μ ist, wenn die Curve durch eine zweite Fläche zweiten Grades ausgeschnitten wird. Jedem möglichen Falle der Zerlegung dieser Gleichung wird die geometrische Interpretation gegeben. — Ueber die metrischen Eigenschaften eines Büschels von Kegelschnitten. — Achsen eines ebenen Schnittes einer Fläche zweiten Grades. Um dieselben zu bestimmen, wird das Maximum und das Minimum des Quadrates eines Radius vector in dem Schnitte gesucht, mit seinem Mittelpunkte als Anfangspunkt. (Der parabolische Schnitt ergiebt sich als Grenzfall.) — Die Flächen zweiten Grades in Ebenencoordinaten. — Ueber die Zahlen e und π. Dieser einzige rein analytische Aufsatz hat Herrn Tannery zum Verfasser. In demselben ist der Beweis der Transcendenz beider Grössen nach den Arbeiten von Hermite, Lindemann, Weierstrass und Molk geliefert und eine aus diesen Beweisen hervorgehende Bestimmung beider Grössen gegeben. — Von den Kugeln, welche vier gegebene Ebenen berühren. — Von den Kugeln, welche vier gegebene Kugeln berühren. Es wird diese Aufgabe als Verallgemeinerung der vorhergehenden behandelt und dabei die Gergonne'sche Lösung noch vervollständigt. — Ueber die Gleichung in λ. Mit λ ist hier der variable Parameter eines Kegelschnittbüschels bezeichnet, so dass $f + \lambda g = 0$ die Gleichung desselben ist, wenn $f = 0$ und $g = 0$ zwei Kegelschnitte des Büschels sind. Die behandelte Gleichung ist diejenige dritten Grades, deren erstes Glied die Discriminante der Form $f + \lambda g$ ist.

Damit endet der erste Theil, in welchem am Schlusse vieler Aufsätze noch auf die Literatur hingewiesen ist, die dabei nachgelesen werden kann.

Im zweiten Theile werden nach einer Einleitung über Inversion und Systeme von Kugeln im Raume die anallagmatischen Flächen und Curven als sich selbst inverse Flächen bez. Curven behandelt, die anallagmatischen Flächen besonders als die Enveloppen einer Kugelschaar, die zu einer gegebenen Kugel orthogonal sind. Je nachdem die Kugeln von einem oder von zwei Parametern abhängig sind, beschreibt der Mittelpunkt derselben ein Curve oder eine Fläche. Die anallagmatischen Flächen der ersten Art werden von jeder Kugel in einer kreisförmigen Krümmungslinie berührt und ihre Rückkehrkanten (nach der erweiterten Definition des Herrn Darboux) sind die allgemeinsten anallagmatischen Curven. Die Flächen der zweiten Art werden von den Kugeln nur in je zwei Punkten berührt. — Unter den anallagmatischen Curven beanspruchen diejenigen ein erhöhtes Interesse, bei welchen die erzeugende Schaar von Kugeln sich

auf eine reducirt. Wir erhalten dadurch die sphärischen anallagmatischen Curven, die durch stereographische Projection in ebene übergehen.

Nach einigen Bemerkungen über die Anwendung der Inversion auf die Systeme von Kugeln beschränkt sich der Herr Verfasser auf den Fall, dass die Systeme von Kugeln bez. von Kreisen vom zweiten Grade sind, also auf diejenigen Enveloppen, die cyklische Flächen bez. Curven genannt werden. Die cyklischen Curven auf der Kugel und in der Ebene theilt er in drei Arten ein, je nachdem sie keinen Doppelpunkt, einen Doppelpunkt mit verschiedenen Tangenten oder einen Rückkehrpunkt besitzen. Die Eigenschaften dieser Curven, besonders auch die Focaleigenschaften, werden geometrisch abgeleitet und die Gleichungen vierten und dritten Grades discutirt, welche sie darstellen.

Den Schluss bildet die Behandlung der cyclischen Flächen, der Cykliden im allgemeineren Sinne, bei welchen der Mittelpunkt der erzeugenden Kugel eine Curve bez. eine Fläche zweiten Grades beschreibt; die Bearbeitung ist eine eingehende, doch muss wegen der grossen Zahl der verschiedenen Fälle auf die auch in diesem Theile sehr klar und anschaulich geschriebene Originalabhandlung verwiesen werden.

Dr. Willgrod.

Die Kegelfocalen. Von Prof. Dr. G. Huber. Bern 1893. Buchdruckerei Karl Stämpfli und Cie. 56 Quartseiten. Mit einer Figurentafel.

Es seien a, b, c drei positive Zahlen, $a > b$, und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung $\mathfrak{K}$ in gewöhnlichen Coordinaten. Kegelfocale nennt der Verfasser den Brennpunktsort C der Curven, nach welchen $\mathfrak{K}$ geschnitten wird durch die Ebenen eines Büschels, dessen Kante K auf der Hauptebene (a, c) des Kegels senkrecht steht (in einem Punkte O). Die zum Theil auch imaginären und räumlichen Curven, welche das Analogon bei den Hauptebenen (ab) und (bc) bilden würden, werden nicht erwähnt. Die Focalen sind Curven vierter Ordnung in der Ebene (ac). Ihre Gleichung hängt ausser von a, b, c noch von den Parametern p, s ab, den cartesischen Coordinaten des Punktes O, gemessen resp. auf den Achsen (c) und (a) als Coordinatenachsen. Wegen Symmetrie genügt die Discussion positiver Werthe p, s. Die Kegelerzeugenden f_1, f_2 in der Ebene (ac) („Focalerzeugende") sind Asymptoten aller doppelt unendlich viel Focalen. Berühren sich K und $\mathfrak{K}$ in einem Punkte von f_1 (oder f_2), so zerfällt C in f_1 (oder f_2) und eine „Berührungsfocale" dritter Ordnung mit Oval. $s = 0$ giebt die Schaar der zur Achse (c) symmetrischen „Achsenfocalen", $p = 0$ die zur Achse (a) symmetrischen „Scheitelfocalen", $s = \infty$ und $p = \infty$ geben Schaaren von Geradenpaaren. O ist Doppelpunkt der Curve; und zwar verwandelt sich derselbe aus einem isolirten über einen Selbst-

berühr-* in einen Knotenpunkt und weiter über einen Rückkehr- in einen isolirten Punkt, wenn s^2 von ∞ über $\frac{a^2p^2}{c^2}$ und weiter über $p^2\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}$ gegen 0 abnimmt. Der Kegelscheitel S ist stets Knotenpunkt der Focalen vierter Ordnung; die Berührungsfocalen berühren sich in S; alle Achsenfocalen haben in S das nämliche Paar Tangenten. Die Focallinien des Kegels tangiren alle C, umhüllen die Systeme $p = const$, und $s = const$, ihre von der Achse (c) durchzogenen Winkel sind von Zweigen der Focalen unbetreten. Das Geschlecht der Focalen ist 1, die Coordinaten ihrer Punkte sind also durch elliptische Functionen eines Parameters u darstellbar:

$$x = sn\,u \cdot \frac{c^2 s\, sn\,u - a^2 p\, cn\,u + a\sqrt{b^2+c^2}(p\, sn\,u - s\, cn\,u)dn\,u}{c^2 sn^2 u - a^2 cn^2 u}$$

$$y = cn\,u \cdot \frac{c^2 s\, sn\,u - a^2 p\, cn\,u + a\sqrt{b^2+c^2}(p\, sn\,u - s\, cn\,u)dn\,u}{c^2 sn^2 u - a^2 cn^2 u}$$

[Coordinaten-Anfang O, X parallel der Achse (a), Y der Achse (c)]. Die auf einer Geraden $\frac{y}{x} = cotg\, am\, u$ ausser O liegenden Curvenpunkte heissen „conjugirt". Die Mitten ihrer Verbindungsstrecken liegen auf einer Hyperbel bei den Focalen vierter, auf einer Geraden bei denen dritter Ordnung. Specialisirungen werden für die Cylinderfocalen unter Ankündigung einer Dissertation von F. Stähli am Schlusse des Kapitels I angedeutet, für die Kreiskegelfocalen in Kapitel II ausgeführt. Für diese ist $b = a$ und erscheint ein dritter Knotenpunkt A im Schnitt der Achse (c) mit ihrer durch K gehenden Normalebene; das Geschlecht wird 0, „rationale" Darstellung möglich:

$$x = \frac{(c^2 s - a^2 p\, tg\,\varphi) + a^2 m(p - s\, tg\,\varphi)\sin\varphi}{c^2 - a^2 tg^2\varphi},$$

$$y = \frac{(c^2 s - a^2 p\, tg\,\varphi) + a^2 m(p - s\, tg\,\varphi)\sin\varphi}{c^2 - a^2 tg^2\varphi}\cdot tg\,\varphi,$$

$$(0 \leqq \varphi < 2\pi), \quad \left(m = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\right),$$

oder:

$$x = \frac{-\{c^2 s\lambda^2 + 2ap(am+a)\lambda + s(am+a)^2\}(1-\lambda^2)}{[c^2\lambda^2 - (am+a)^2](1+\lambda^2)},$$

$$y = \frac{-2\{c^2 s\lambda^2 + 2ap(am+a)\lambda + s(am+a)^2\}\lambda}{[c^2\lambda^2 - (am+a)^2](1+\lambda^2)},$$

$$(-\infty \leqq \lambda < +\infty).$$

Die Focalen gehen durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen, die zugehörigen Tangenten durch O. Eine Gerade durch O schneidet noch

* Zwischen einer Geraden und einer Curve dritter Ordnung.

zwei Curvenpunkte aus, für deren Parameter $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ ist; analog ist beim Doppelpunkt S giltig:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{c^2}\right)^2.$$

Der Ort der Berührpunkte der von A an die Kreiskegelfocalen gehenden Tangenten ist sechster Ordnung und wird discutirt.

Die folgenden Abschnitte: Wendepunktsgleichung, Wendekegelschnitt, Doppeltangenten und Doppeltangentenkegelschnitt bei Kreiskegelfocalen stellen eine Anwendung der von Brill (Math. Ann. Bd. 12) gegebenen allgemeinen Formeln für rationale Curven vierter Ordnung dar. Die Wendepunktsgleichung sechsten Grades ist nur für specielle Fälle bequem zu discutiren. Die reellen Wendepunkte liegen bei Achsen- und Berührfocalen für $s = const$, bei Scheitelfocalen für $p = const$ auf geraden Linien; der Wendekegelschnitt kann Ellipse, Hyperbel, Parabel sein, für Achsenfocalen wird er eine Hyperbel, welche die Curve in zwei reellen Punkten schneidet, für Scheitelfocalen ein Kreis, dessen Radius von s allein abhängt. Allgemein hat die Kreiskegelfocale zwei, einen, keinen reellen Wendepunkt, je nachdem k den Kegel schneidet, berührt oder gar nicht trifft. Reelle Doppeltangenten sind nicht vorhanden, abgesehen davon, dass Achsen- und Scheitelfocalen einen Selbstberührpunkt besitzen, dessen Tangente senkrecht zur Achse (c) steht oder mit ihr zusammenfällt. Die Mittelpunkte der Doppeltangenten-Kegelschnitte für ein System $p = const$ oder $s = const$ liegen auf einer Curve fünfter Ordnung, welche discutirt wird.

Kapitel III bringt Specialisirungen des vorhergehenden auf den Kreiscylinder. Wir erwähnen nur, dass als Berührungsfocale die Strophoïde oder logocyklische Curve von Booth auftritt. Capitel IV giebt eine directe Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Kreiskegelfocale durch rationale Functionen eines Parameters, Kapitel V die verhältnissmässig einfache Quadratur der Schleife bei Berührungs- und Achsenfocale.

Dies im Grossen und Ganzen der Inhalt der Broschüre, welche Studirenden, die in Ermangelung eines eigenthümlichen Gedankens die Discussion einer algebraischen Curve oder eines Systems solcher Curven als Arbeit sich vornehmen wollen, zum Muster dienen kann.

Im Interesse der Aufstellung einer unzweideutigen Terminologie möchten wir darauf hinweisen, dass in dem ersten Satze der Abhandlung drei verschiedene Bedeutungen des Wortes Achse durcheinander spielen: Achsengerade, positiver Achsenparameter, Hauptachse. Die positiven Grössen a, b, c beim Kegel und entsprechend überhaupt bei Flächen zweiter Ordnung, welche sicher eine eigene Wortbezeichnung verdienen, scheinen dieselbe, nach verschiedenen der gebräuchlichsten Lehrbücher zu schliessen, noch nicht gefunden zu haben. Von „Längen" der Achsen und Halbachsen kann man glattweg doch nur beim Ellipsoid sprechen. Vielleicht findet der oben gebrauchte Ausdruck „positiver Achsenparameter" Anklang; von den Kegelachsen die eine als Hauptachse, die anderen als Nebenachsen zu bezeichnen, liegt ungemein nahe. H. Brunn.

La gémétrographie ou l'art des constructions géométriques par Emile Lemoine. Paris 1893. Gauthier-Villars.

In den geometrischen Untersuchungen unserer Tage wird das geometrische Ding an sich oft mit Formeln zugedeckt oder aus dem dreidimensionalen Raume hinausprojicirt. Bei dieser Art der Betrachtung ist es eine überflüssige Aufgabe für die Werthung von geometrischen Constructionen einen Maassstab zu schaffen. Wer aber gezwungen ist, nicht nur mit dem Munde zu construiren, sondern seine geometrischen Gedanken mit dem Stifte zu fixiren, der wird die Lösung dieser Aufgabe freudig begrüssen. Ein Versuch dazu liegt in einem Büchlein von E. Lemoine vor, welches „Géométrographie“ betitelt ist.

Der Verfasser lässt alle Constructionen durch folgende fünf Grundoperationen entstehen:

1°. Man legt das Lineal bei einem Punkte an. Op. (R_1).
2°. Man zieht eine gerade Linie. Op. (R_2).
3°. Man setzt eine Zirkelspitze auf einen bestimmten Punkt. Op. (C_1).
4°. Man setzt eine Zirkelspitze auf irgend einen Punkt einer Linie. Op. (C_2).
5°. Man beschreibt einen Kreis. Op. (C_3).

Jede Construction kann durch Wiederholungen der Grundoperationen ausgeführt werden. Die Gesammtheit der Operationen wird durch die Formel

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$$

bestimmt.

Aus dieser Formel werden zwei Coefficienten zur Beurtheilung der Constructionen abgeleitet. Der eine ist $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ und heisst die Einfachheit (S, simplicité) der Construction. Der andere Coefficient ist $l_1 + m_1 + m_2$ und wird Genauigkeit (E, exactitude) genannt. l_2 giebt die Anzahl der gezogenen Geraden, m_3 die Anzahl der Kreise oder Kreisbogen an.

Der Verfasser wendet diese Grundsätze auf eine Reihe von Aufgaben der Elementargeometrie an und gelangt zu dem überraschenden Resultate, dass viele als „klassisch“ geltende Constructionen weit davon entfernt sind die einfachsten zu sein. Der Grund dieser Erscheinung liegt meistens darin, dass der Geometer die Aufgaben mit dem geringsten Aufwande von Gedanken und Worten zu lösen sucht, während der Constructeur die Lösung vorzieht, welche die kleinste Zahl von Linien fordert. Es ist nicht leicht, beiden Gesichtspunkten gleichzeitig gerecht zu werden. Aber es ist schon viel erreicht, wenn der theoretisirende Geometer die Bedürfnisse des Constructeurs zu berücksichtigen sucht und bedenkt, dass für Viele die Geometrie eigentlich doch nur um des Construirens willen da ist.

Lemoine deutet selbst an, dass die von ihm aufgestellten Grundsätze für die darstellende Geometrie und die graphische Statik noch einiger Erweiterungen bedürfen, welche sich auf das Zeichnen mit Winkeln

beziehen. Dann aber wäre ein Maassstab geschaffen, nach dem Lösungen derselben Aufgabe auf ihre constructive Einfachheit hin verglichen werden können.

Es wird nicht an Einwendungen gegen die Grundsätze von Lemoine fehlen und besonders die vollständige Gleichstellung des Kreises mit der Geraden erregt Bedenken theoretischer Art. Aber abgesehen davon wird jeder Geometer das Büchlein mit Freude und Nutzen lesen und vielleicht dadurch veranlasst werden, von seinen Constructionen einige Linien abzuschneiden. Er wird sich dadurch den Dank aller Derer erwerben, welche diese Linien wirklich zeichnen müssten. Dr. BEYEL.

An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics with applications to problems in mathematical physics, by WILLIAM ELWOOD BYERLY (Harvard University). Boston 1893. Ginn & Comp. 8⁰. 287 p.

Das in der Ueberschrift genannte Werk gehört einer namentlich in England und Amerika cultivirten Richtung an, welche vornehmlich auf die Technik des Rechnens und auf die leichte Verwendbarkeit mathematischer Entwickelungen zur Lösung von Aufgaben Gewicht legt, während ein tiefer gehendes Erfassen der behandelten Gegenstände, zumal im Sinne der modernen Functionentheorie, durchaus zurücktritt. Es zeigt sich dies einmal darin, dass der Herr Verfasser gegen die neue zum grossen Theil mit geometrischen Anschauungen arbeitende Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in keiner Weise Stellung nimmt, und dass er andererseits (in Ansehung der älteren Theorie) Convergenzbetrachtungen gar zu sehr in den Hintergrund zurückdrängt. Der Hauptinhalt des Buches besteht vielmehr in der formal analytischen Behandlung von Reihen- und Integral-Darstellungen der in der Ueberschrift angedeuteten Functionen, die theils direct durch ihre analytischen Ausdrucksformen, theils mittelbar als Integrale wohlbekannter Differentialgleichungen eingeführt werden. Die letzteren anlangend, so handelt es sich um die Differentialgleichungen der Potentialtheorie, der Wärmeleitung, der schwingenden Saiten u. s. w.; doch giebt der Herr Verfasser jeweils nur die physikalische Bedeutung der einzelnen Differentialgleichung an, ohne auf deren Entwickelung einzugehen. Betreffs der Stoffanordnung bringt es eine geringe Erschwerung mit sich, dass in dem einleitenden Kapitel bereits mehrere Untersuchungen gegeben werden, welche zweckmässiger vielleicht erst bei den späteren Ausführungen gebracht wären; besonders macht sich dieser Umstand bei der Behandlung der Kugelfunctionen geltend. Bezugnahme auf die Originalliteratur wird im Verlaufe des Textes fast überall vermieden; doch muss es als besonders werthvoll hervorgehoben werden, dass im letzten Kapitel eine von Herrn Dr. M. Bôcher (Harvard-University) verfasste historische Skizze über die

im Buche behandelten Gegenstände beigegeben ist. Im Uebrigen ist sehr anzuerkennen, dass die physikalischen Anwendungen jederzeit durch Ausführung zahlreicher Einzelbeispiele noch weiter erläutert werden. Doch ist, hiervon abgesehen, eine Aufnahme des in Rede stehenden Werkes bei dem deutschen mathematischen Publikum wohl schon deshalb weniger empfehlenswerth, weil wir in den Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen, in denjenigen F. Neumann's über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen, vor allem in Heine's Kugelfunctionen u. s. w. Werke besitzen, welche die nämlichen Gegenstände in einer vielseitigere Anforderungen befriedigenden Weise behandeln.

Im Einzelnen ist die Stoffanordnung die folgende. Im einleitenden Kapitel I werden einige Angaben über Integration der Differentialgleichungen, speciell der linearen homogenen, entwickelt und besondere Ausführungen über Integration durch Reihen gegeben. Hieran schliesst sich gleich die Behandlung eines besonderen Problems aus der Wärmeleitung zur Einführung der Fourier'schen Reihen, sowie die Behandlung einer besonderen Potentialfunction zur Einführung der gewöhnlichen Kugelfunctionen $P_m(x)$, $Q_m(x)$ (Surface Zonal Harmonics) und endlich die Besprechung der schwingenden kreisförmigen Platten zur Einführung der Bessel'schen Functionen (Cylindrical Harmonics). Es folgen weitere allgemeine Erörterungen zur Integration der linearen Differentialgleichungen.

Im zweiten und dritten Kapitel sind die Fourier'schen Reihen behandelt; doch werden in Betreff der Convergenz derselben im Wesentlichen nur einige Resultate ohne Ableitung angegeben. Bemerkenswerth ist, dass in Einzelbeispielen das Zustandekommen des Summenwerthes durch wirkliches Zusammenfügen der einzelnen Sinuscurven geometrisch erläutert wird.

Kapitel IV bringt zahlreiche Anwendungen der Fourier'schen Reihen auf Probleme der Physik, und zwar vor Allem auf das Problem der Wärmeleitung; es wird ferner das Problem der Strömung der Elektricität in einer unendlichen Ebene und die Vibration quadratischer Platten behandelt.

Das fünfte Kapitel ist den Kugelfunctionen erster und zweiter Art $P_m(x)$ und $Q_m(x)$ (Zonal Harmonics) gewidmet, die gleich in der ersten Hälfte des Kapitels wieder zu einer Reihe physikalischer Anwendungen benützt werden. Es folgen einige elegante analytische Ausführungen über Kugelfunctionen, welche im Wesentlichen die bekannte Darstellung gegebener Functionen in Reihen nach Kugelfunctionen zum Ziele haben.

In entsprechender Weise behandeln die drei folgenden Kapitel die allgemeinen Laplace'schen Kugelfunctionen (Spherical Harmonics), die Bessel'schen Functionen und endlich die Lamé'schen Functionen (Ellipsoidal Harmonics). In einem Anhange sind Tafeln über die numerischen Werthe der mehrfach genannten Functionen beigefügt.

R. Fricke.

Uniplanar Algebra, being part I of the propaedeutic to the higher mathematical analysis, by Irving Stringham (University of California). San Francisco 1893. Berkeley press. 8°. 141 p.

Das vorliegende Buch hat einen ausgesprochen didactischen Charakter und ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche Herr Stringham an der University of California zur Einführung in das höhere mathematische Studium gehalten hat. Es ist das auch in England stark verbreitete Studium des Euklid, welches hier nach Denkweise, Methodik und Form der Darstellung von bestimmenden Einfluss war. Scharfe logische Fundirung und präcise Abgrenzung des dargebotenen Stoffes zeichnen die Darstellung aus. Uebrigens ist von geometrischer Denkweise ausgedehnter Gebrauch gemacht, und das Buch schliesst sich in seiner ganzen Eigenart den bekannten englischen Elementarbüchern „Syllabus of Plane Geometrie“ und „Text-Book of Euclid's Elements“ an.

Etwas apart ist die Stringham'sche Definition „einer“ Algebra. Ein bei gewissen wohldefinirten Operationen sich immer wiedererzeugendes System von Zahlen, das man in Verallgemeinerung einer bekannten Sprechweise einen Zahlenkörper nennen würde, bezeichnet der Herr Verfasser als eine „Gruppe“ und fährt dann fort „such a group is an algebra“, obwohl unter den anzuwendenden Operationen auch Logarithmirung und Exponentiation sich finden.

Die Darstellung beginnt mit Euklid's Lehre von den Proportionen, entwickelt sodann die Regeln der algebraischen Grundoperationen, die Eigenschaften der Logarithmen, Exponentialfunctionen, der goniometrischen und hyperbolischen Functionen. Es folgt die Erweiterung der bisherigen Entwickelungen auf complexe Grössen, und es ist endlich ein Kapitel über conforme Abbildung, sowie eines über den Fundamentalsatz der Algebra gegeben.

R. Fricke.

Die nichteuklidische Geometrie vom Alterthum bis zur Gegenwart. Eine historisch-kritische Studie von Dr. A. Karagiannides. Berlin 1893. In Kommission bei Mayer & Müller.

In dem ersten Abschnitte des Werkes werden diejenigen Mathematiker des Alterthums besprochen, welche sich mit der Begründung des Parallelenaxioms beschäftigten. Den Gegenstand des zweiten Abschnittes bilden die Untersuchungen von Gauss, Lobatchefsky und Riemann, während der dritte sich mit den Arbeiten der Herren Helmholtz, Klein und Poincaré beschäftigt. Eine eigentliche Geschichte der nichteuklidischen Geometrie ist das vorliegende Werk nicht, da dasselbe nicht ein Gesammtbild des Schaffens der in demselben behandelten Autoren bietet. Der Werth desselben besteht vielmehr in der scharfen und treffenden Kritik, die es der nichteuklidischen Geometrie zu Theil werden lässt. Um den Standpunkt des Verfassers zu charakterisiren und zugleich eine Probe seines

eigenthümlichen bilderreichen Styls zu geben, seien hier einige Stellen aus der Recapitulation angeführt:

1. Es giebt nur einen einzigen Raum, in welchem alle Menschen leben und denken, und in welchem eine Klasse von Mathematikern nach eigenem Geschmack und eigener Willkür ihre besonderen Räume construirt hat und construirt. — Dass es mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten giebt, bestreitet Niemand; der Raum aber hat drei Dimensionen.

2. Diejenigen Mathematiker, welche einen Raum durch reine Zahlen construiren, gleichen denjenigen Menschen, welche ihr Millionenvermögen im Traume construiren. — Die beiden Gebiete Arithmetik und Geometrie helfen sich einander, aber nie erzeugt das eine Gebiet das andere, oder ersetzt es vollständig. Wir operiren in der analytischen Geometrie z. B. mit Gleichungen, aber wir dürfen nicht vergessen, dass wir zugleich Coordinaten gebrauchen; und diese Coordinaten müssen wir erst haben.

3. Diejenigen Geometer, welche die Definition der Parallelengraden, das fünfte Postulat und den daraus folgenden Satz der Winkelsumme im geradlinigen Dreiecke fallen lassen und synthetisch eine ebene Geometrie construiren wollen, die entsprechen genau, kann man sagen, denjenigen Arithmetikern, welche das Axiom der Gleichheit fallen lassen und ihre algebraischen Probleme nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen auflösen wollen.

M. Meyer.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1894.

Periodische Schriften.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ohrtmann, herausgegeben von E. Lampe. 23. Band. Jahrgang 1891. Heft 3 (Schluss). Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. III. Theil. Herausgegeben von C. Börgen. Berlin, Mittler & Sohn. 2 Mk. 50 Pf.

Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen zu Potsdam in den Jahren 1890 und 1891. Berlin, Asher. 10 Mk.

Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der königl. preuss. Landesaufnahme. Band 8 (Schluss). Berlin, Mittler & Sohn. 10 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem des Königreichs Sachsen. XI. Jahrgang. Herausgegeben von P. Schreiber. Chemnitz 1893. Bülz. 10 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts; Jahrgang 1894. 1. Heft. Herausgegeben von W. von Bezold. Berlin, Asher. 2 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Grassmann, R., Die Folgelehre oder Functionenlehre in strenger Formelentwickelung. Stettin, R. Grassmann. 3 Mk. 50 Pf.

Bocher, M., Die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. Mit Vorwort von F. Klein. Leipzig, B. G. Teubner. 8 Mk.

Graf, H., Einleitung in die Theorie der Gammafunctionen und der Euler'schen Integrale. Bern, Wyss. 1 Mk.

Segnier, S. J., Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker. Berlin, Dames. 12 Mk.

Weyer, E., Die parabolische Spirale. Eine Monographie. Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk.

Gille, A., Lehrbuch der Geometrie. I. Theil. Ebene Geometrie. Halle a. S., Buchhandlung des Waisenhauses. 1 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Olbers, W., Gesammelte Werke. Herausgegeben von C. Schilling. 1. Band. Berlin, Springer. 16 Mk.

Henke, R., Ueber die Methode der kleinsten Quadrate. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk.

Laska, W., Lehrbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, Maier. 10 Mk.

Karstens, K., Neue Berechnung der mittleren Tiefen der Oceane nebst Kritik der bisherigen Rechnungsmethoden. Gekrönte Schrift. Kiel, Lipsius & Tischer. 2 Mk.

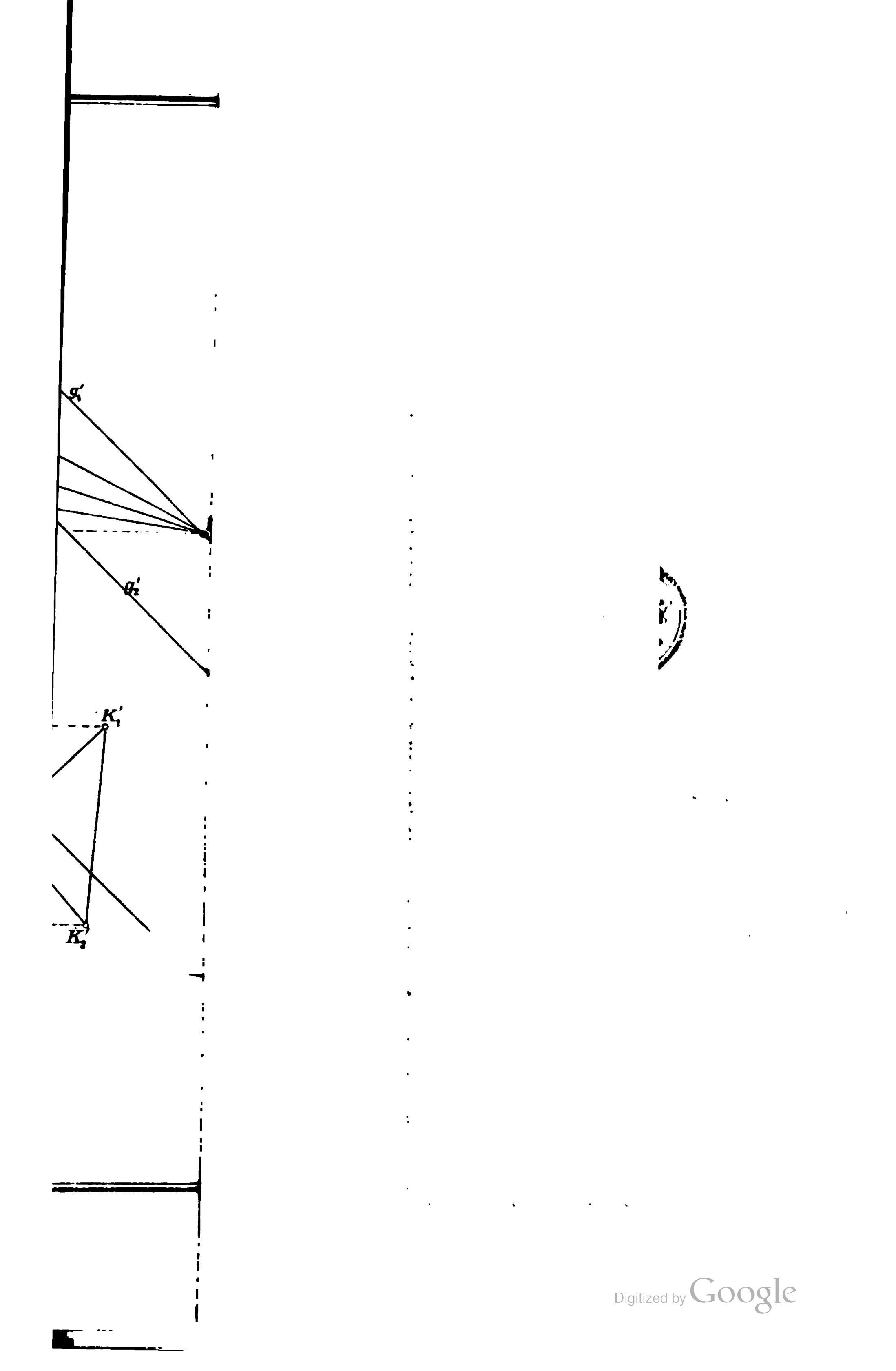
Physik und Meteorologie.

Lohse, O., Planetographie. Leipzig, Weber. 3 Mk. 50 Pf.

Poincaré, H., Mathematische Theorie des Lichts; deutsche Ausgabe von E. Gumlich und W. Jaeger. Berlin, Springer. 10 Mk.

Stricker, S., Ueber strömende Elektricität (Schlussheft). Wien, Deutike. 1 Mk. 25 Pf. (compl. 3 Mk. 75 Pf.).

Helm, G., Grundzüge der mathematischen Chemie. Energetik der chemischen Erscheinungen. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.



q_1'
q_2'
K_1'
K_2'

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

The Evanston Colloquium. Lectures on mathematics, delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893 at Northwestern University Evanston, Ill. by FELIX KLEIN, reported by ALEXANDER ZIWET. New-York 1894. Macmillan and Co. 8°. 109 p.

Ueber die Entstehung dieses Buches sind folgende Bemerkungen vorauszuschicken. Herr Prof. F. Klein hatte sich während der Universitätsferien im Herbst 1893 im Auftrage der königl. preuss. Regierung nach Chicago begeben, um bei dem dortselbst während der Zeit vom 21. bis 27. August tagenden Mathematiker-Congress als Vertreter der deutschen Mathematik zu fungiren. Nach Abschluss des Congresses hat Herr Klein aus eigener Initiative vor einem grösseren Zuhörerkreise in der Northwestern University zu Evanston (bei Chicago) eine Reihe weiterer Vorträge gehalten und dieselben zu einem Colloquium ausgestaltet. Diese Vorlesungen wurden von Prof. Ziwet (Ann Arbor) ausgearbeitet und in dem in der Ueberschrift genannten Buche publicirt.

Herr Klein hat in den in Rede stehenden Vorlesungen einen summarischen Ueberblick über diejenigen Theile der modernen Mathematik gegeben, in welche er selbst fortbildend und umgestaltend eingegriffen hat. In vieren unter den zwölf Vorlesungen ist überdies Bericht erstattet über die Untersuchungen anderer deutscher Forscher, welche Herrn Klein wissenschaftlich besonders nahe stehen. In allen Vorlesungen ist Nachdruck darauf gelegt, dass die Grundgedanken und Hauptgesichtspunkte der einzelnen vorgetragenen Theorien möglichst lebhaft in Evidenz treten. Es erscheint dieserhalb das vorliegende Buch auch für deutsche Leser sehr werthvoll, und es wird ein kurzes Referat über den Inhalt der Vorlesungen gewiss willkommen sein. Nur wolle man bei der Beurtheilung dieses Inhalts bemerken, dass sich das Evanston Colloquium unmittelbar an den Congress anschloss, und dass daher Gegenstände, welche im Congress bereits ausführliche Berücksichtigung fanden (wie z. B. die Gruppentheorie) im Colloquium dementsprechend in den Hintergrund gestellt wurden.

Die erste Vorlesung ist Clebsch gewidmet. Im Anschluss an eine Charakteristik seiner wissenschaftlichen Eigenart werden, unter vorläufiger Zurückschiebung seiner geometrischen Arbeiten, als seine hauptsächlichsten

Leistungen diejenigen in der Invariantentheorie und in der Verknüpfung der Abel'schen Functionen mit der Geometrie genannt. Es knüpft sich hieran eine kritisch gehaltene Gegenüberstellung Riemann's und seiner modernen Fortsetzer einerseits, sowie von Clebsch und seiner Schule andererseits. Als weitere von Clebsch inaugurirte Untersuchungsrichtungen werden genannt, einmal die Untersuchungen über algebraische Functionen mehrerer Veränderlichen, die durch Noether, Picard, Poincaré u. A. fortgesetzt sind, sodann die mit den Differentialgleichungen erster Ordnung enge verbundene Theorie der Connexe.

In der zweiten und dritten Vorlesung wird Bericht erstattet über einen Theil der Forschungen von Sophus Lie. Es handelt sich hierbei aber nicht um die allgemeinen gruppentheoretischen Principien, von welchen die neueren Werke Lie's und seiner Schüler handeln, sondern Prof. Klein bespricht die rein geometrischen Ergebnisse, welche einer früheren Forschungsperiode Lie's angehören. An Stelle des Punktes, der Ebene, der Geraden benutzt Lie die Kugel als Raumelement und gründete hierauf eine „Kugelgeometrie" nach dem Modell der Plücker'schen Liniengeometrie, mit welcher erstere in höchst interessantem Zusammenhange steht. Ein anderer Gedanke Lie's ist es, an Stelle der Kugel in gleichem Sinne ein nach Lage und Richtung orientirtes „Flächenelement" zu setzen. Die hier entspringende Geometrie steht in engster Beziehung zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese, sowie auch die Beziehung zu den Berührungs-Transformationen wird in der dritten Vorlesung erläutert.

Die folgende Vorlesung, über die reellen Züge der algebraischen Curven und Flächen, giebt in ihrem ersten Theile eine historische Uebersicht über die hier in Betracht kommenden Arbeiten. Newton's „enumeratio linearum tertii ordinis" steht natürlich voran; den gleichen Gegenstand behandelt 1852 Möbius mit rein geometrischen Mitteln. Es folgt ein Bericht über Clebsch's Modell der Diagonalfläche, sowie über die sich anschliessenden eigenen Arbeiten Klein's und diejenigen Rodenberg's über die Gestalten der Flächen dritter Ordnung; es werden ferner Rohn's Arbeiten über Flächen vierter Ordnung ausführlich charakterisirt. Die Untersuchung der reellen Züge algebraischer Curven ist für die vierte Ordnung von Zeuthen geleistet, allgemeinere Ansätze für beliebige Ordnungen sind von Harnack, Hilbert, sowie in eigenen Arbeiten Klein's entwickelt; die letzteren basiren auf der Heranziehung symmetrischer Riemann'scher Flächen, welche am Schlusse der Vorlesung etwas ausführlicher behandelt werden.

Eine weitere Vorlesung ist Schwarz' Theorie der Dreiecksfunctionen gewidmet, jedoch nicht innerhalb der beschränkten, von Schwarz selbst eingehaltenen Grenzen. Vielmehr entwickelt Klein die geometrische Theorie der Kreisbogendreiecke in solcher Allgemeinheit, dass

sie für die Gesammtheit der hypergeometrischen Functionen eine ausreichende Grundlage bietet.

Demnächst entwickelt Prof. Klein seine Ueberzeugungen über „den mathematischen Charakter der Raumanschauung und die Beziehung der reinen Mathematik zu anderen Wissenschaften, in denen sie Verwendung findet". An der Hand interessanter Beispiele wird der Unterschied zwischen „naiver" und „begrifflich geläuterter" Raumanschauung entwickelt. Ein ganz entsprechendes Sachverhältniss findet bei der innerhalb der Physik, Astronomie etc. angewandten Mathematik einerseits und der für sich entwickelten abstracten Mathematik auf der anderen Seite statt.

Die siebente und achte Vorlesung behandeln zahlentheoretische Gegenstände, nämlich die erstere ist im wesentlichen ein Referat über Hilbert's Beweis der Transcendenz von e und π, die letztere entwickelt die Gittertheorie der binären ganzzahligen quadratischen Formen. Dieselbe basirt auf einer von Gauss herrührenden geometrischen Interpretation der binären quadratischen Formen und ist von Herrn Klein dazu benutzt, die Composition der Formen, sowie die Eigenart der idealen Zahlen quadratischer Körper geometrisch verständlich zu machen.

In der neunten Vorlesung, die Auflösung der höheren algebraischen Gleichungen, entwickelt Klein seine Auffassung vom Grundproblem der Algebra; seine Arbeiten über die Gleichungen fünften Grades, sowie über diejenigen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen geben hier die Richtung an.

Auch die folgende Vorlesung, über einige neuere Fortschritte bei den hyperelliptischen und Abel'schen Functionen, giebt zusammenhängenden Bericht über eine längere Forschungsperiode Klein's und seiner damaligen Schüler Burkhardt, Pascal, Wirtinger u. A. Die Tendenz kann man kurz dahin angeben, dass die hergebrachte Lehre von den genannten Functionen in lebhafte Wechselbeziehung gesetzt wird zu den neueren Theorien der Invarianten, der projectiven Geometrie, der Gruppen u. s. w.

In der elften Vorlesung, die neuesten Untersuchungen über nicht-euklidische Geometrie, ist nach einer allgemeineren Einleitung erstlich über Lie's bezügliche Untersuchungen (zumal betreffend Helmholtz'. Monodromieaxiom) Bericht erstatten, sodann wird über Clifford's Ideen gesprochen, welche durch Klein's eigene Arbeiten allgemeiner bekannt geworden sind.

Ein Vortrag über „das Mathematikstudium in Göttingen", sowie der Wiederabdruck eines von Klein verfassten Artikels „Die Entwickelung der Mathematik an den deutschen Universitäten" aus der Lexis'schen Festschrift „Die deutschen Universitäten" beschliessen das Buch.

R. Fricke.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen preussischen Lehrplänen bearbeitet von Dr. Bernhard Hercher, ordentlichem Lehrer am grossherzoglichen Gymnasium zu Jena. Drittes Heft. Enthaltend: Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten (Lehraufgabe der Prima). Leipzig 1893. Verlag von Carl Jacobsen. Preis 1 Mk. 10 Pf.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Für höhere Schulen von Dr. Bernhard Hercher. Erweiterter Sonderabdruck aus dem Lehrbuch der Geometrie von demselben Verfasser. Preis 75 Pf.

Im ersten Theil bietet das vorliegende Buch eine leicht verständliche Darstellung des wichtigsten Lehrstoffes aus dem Gebiete der Stereometrie. Der zweite Theil enthält einen Grundriss der analytischen Geometrie, welchem in einem Anhang noch die Cubatur des Rotations-Ellipsoids hinzugefügt ist. Von diesem zweiten Theil hat der Verfasser noch einen erweiterten Sonderabdruck erscheinen lassen. Die Erweiterungen bestehen in der Einführung der Polar-Coordinaten, der Ableitung der Polar-Gleichungen für die Kegelschnitte und der Dreitheilung des Winkels.

M. Meyer.

Ueber adjungirte Systeme simultaner linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängig veränderlichen Grösse. Von Dr. E. Grünfeld. Nikolsburg 1893. Druck von A. Rosenau.

Herr Frobenius hat im 77. Bande des „Journals" für die reine und angewandte Mathematik merkwürdige Determinantenbeziehungen gefunden, welche zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung und denen ihrer Lagrange'schen Adjungirten bestehen. Der Verfasser stellt analoge Beziehungen für adjungirte Systeme simultaner linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung auf und beweist, dass die Integrale des einen Systems die integrirenden Factoren des anderen sind. Ferner zeigt er, wie sich ein System linearer nicht homogener Differentialgleichungen mit Hilfe der Integrale des zugehörigen homogenen und seines adjungirten Systems integriren lässt und wie man andererseits die Integration eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen auf die Integration eines nicht homogenen Systems, welches eine Unbekannte und daher eine Gleichung weniger enthält und auf eine Quadratur zurückführen kann; die Integration dieses letzteren Systems erreicht der Verfasser auch durch Anwendung der Theorie des „letzten Multiplicators". Die gewonnenen Resultate werden fast durchweg auf dasjenige specielle System angewendet, aus welchem die lineare (homogene resp. nicht homogene) Differentialgleichung n^{ter} Ordnung hervorgeht.

M. Meyer.

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Freiburg i. Br. 1893. Herder-sche Verlagshandlung. 79 S. 8⁰. Preis: broschirt 1 Mk., gebunden 1 Mk. 80 Pf.

Die tiefsinnigen und fruchtbaren neueren Forschungen eines Lipschitz, Dedekind, G. Cantor und anderer über die Grundlagen der Arithmetik sind von solcher Bedeutung, dass sie nicht ohne Einfluss auf die Elementar-Mathematik bleiben können. Es fragt sich nun, was und wie viel davon für die Schule zu verwenden sei. Offenbar nur dasjenige, was den bisherigen Gang einfacher, klarer und zusammenhängender macht. So hat der Verfasser des vorliegenden Buches es gehalten, und dadurch, indem er weise Maass hielt, strenge Wissenschaftlichkeit und Klarheit mit praktischer Brauchbarkeit gepaart. Darin und in der Berücksichtigung des Geistes der neuen Lehrpläne beruht das Neue und Originelle des Buches. In der althergebrachten Weise ein neues Lehrbuch zu schreiben, hat der Verfasser mit Recht wohl für überflüssig gehalten. Der Inhalt ist in drei Lehrgänge getheilt; der erste umfasst etwa das Lehrpensum der Untertertia, der zweite das der Obertertia und Untersecunda eines Gymnasiums, der dritte enthält einerseits die Erweiterung derjenigen Gebiete, die im zweiten nur mit Berücksichtigung des Allernöthigsten und Wichtigsten behandelt sind, andererseits die schwierigeren Partien und auch solche, die durch die Lehrpläne nicht vorgeschrieben werden. So werden im zweiten Lehrgange z. B. der Begriff des Logarithmus und die logarithmischen Sätze nur an der Basis „10" erläutert — ein sehr glücklicher und höchst praktischer Griff — um dann im dritten ihre Verallgemeinerung und Erweiterung zu erfahren. Die Regeln über die Bruchrechnung und die negativen Zahlen, ein wunder Punkt in vielen Lehrbüchern, entspringen hier lediglich der Permanenz der Multiplicationsgesetze. Hierin diese Einfachheit und befriedigende Klarheit geschaffen zu haben ist ein besonderes Verdienst des Verfassers. Neu ist ferner eine näherungsweise Auflösung der Gleichung $x^n = a$ und die Lösung der Gleichungen vierten Grades, sowie eine Reihe kleinerer Bemerkungen.

Alles Künstliche und wissenschaftlich Werthlose, wie negative und gebrochene Wurzelexponente, die ja selbst dem Fachmanne nicht vorkommen, ist ausgeschieden. Die Einführung neuer Sätze etc. geschieht unter steter Vergleichung mit dem gewöhnlichen Zahlenrechnen; es gilt dem Verfasser als Princip: „Keine Rechnung ohne Probe, kein Satz ohne Zahlenbeispiel".

Wir sind überzeugt, dass das Buch, wenn es mit Einsicht und Geschick verwendet wird, nicht nur ungemein brauchbar, sondern auch sehr fruchtbar sich zeigen wird. Zum Selbstunterrichte würde es sich dagegen nicht empfehlen, womit wir aber keineswegs einen Tadel aussprechen, sondern nur eine das Buch charakterisirende Bemerkung machen wollen.

Zum Selbststudium ist es nämlich so zu sagen nicht „langstielig" genug; es wäre zu knapp, wissenschaftlich, vornehm exclusiv. — Der Druck ist tadellos, das Papier gut.

F. Schütte.

Trigonometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet von Karl Schwering, Director des stiftischen Gymnasiums in Düren. Mit 16 Figuren. Freiburg i. Br. 1893. Herder-sche Verlagshandlung. 52 S. 8°. Preis: broschirt 80 Pf., gebunden 1 Mk. 10 Pf. — Hiervon getrennt und einzeln käuflich der erste Lehrgang u. d. T. Anfangsgründe der Trigonometrie für die sechste Stufe höherer Lehranstalten nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. gr. 8°. 12 S. Preis: 20 Pf.

In der vorliegenden Trigonometrie ist das Lehrgebäude nicht, wie bisher üblich, wissenschaftlich systematisch aufgebaut, sondern den neuen Lehrvorschriften entsprechend methodisch concentrisch. Wir wollen den hübschen Bauplan kurz skizziren. Ohne einleitenden Pomp und Festgepränge wird sogleich der erste Stein gelegt: Die Aufgabe, aus den Seiten eines Dreiecks den Inhalt zu berechnen (Heronische Formel). Daran schliesst sich: Man berechne die Höhen. Ein Zahlenbeispiel verankert die Steine. Die Aufgabe, die Winkel aus den Seiten zu berechnen, liefert den einen Eckstein, Sinus, und eine zweite Lösung derselben Aufgabe den anderen, Cosinus. Die bekannte Aufgabe, eine senkrechte Höhe zu bestimmen, liefert die übrigen Ecksteine Tangens und Cotangens. Zahlenbeispiele, Proben und Uebungen sorgen dafür, dass die Steine fest und richtig liegen. Nach der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks folgt die des gleichschenkligen, und das Fundament und der Unterbau ist fertig.

Der Cosinus-Satz — bemerkenswerth ist die Einführung seiner allgemeinen Gültigkeit —, der Sinus-Satz und die Beziehungen zum Radius des eingeschriebenen Kreises, der Tangens-Satz, geometrisch abgeleitet, bilden den Oberbau. Dass die Tangens-Formeln für die halben Winkel und die Beziehungen zu den Radien des ein- und der angeschriebenen Kreise mit eingemauert werden, dient dem Gebäude nicht nur zur Schönheit, sondern auch zu praktischem Nutzen. Gleichzeitig wird unten noch ausgebaut: die Beziehungen der vier Functionen unter einander. Nun ist der Bau schon so fest, dass wir uns darin einrichten, zum Schrecken derer, die da erst Verputz und Stuckarbeit angebracht wissen wollen. Wir machen schon schöne Berechnungen von Stücken am Dreiecke, Vierecksaufgaben und Berechnung von regelmässigen Vielecken.

Dann erst (dritter Lehrgang) arbeiten wir die Einzelheiten des Unterbaues aus: Additions-, Multiplications- und Divisionstheoreme; die ersteren führen uns zu Verallgemeinerungen. Nöthig haben wir noch die Functionen kleiner Winkel; die Berechnung von π dient mehr zur Zierde. So baut man leicht, und es macht allen viel Freude, so den Bau erstehen zu lassen.

Eine Reihe von Aufgaben, geometrische und analytische, zeigen uns, dass der Bau gut, solid und praktisch hergestellt ist, und zeigen uns, wo wir noch bequemere Einrichtungen, Erweiterungen, Verzierungen und Verschönerungen anbringen können.

F. Schütte.

Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre. Von Prof. H. Martus, Director des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. I. Theil: Ebene Figuren. 96 S. gr. 8⁰. II. Theil: Dreiecksrechnung und Körperlehre. 138 S. gr. 8⁰. Bielefeld und Leipzig 1893. Verlag von Velhagen & Klasing.

In diesem Leitfaden bringt uns der Verfasser einen vollständigen, etwa auf die Hälfte des Umfanges beschränkten Auszug seines ausführlichen Lehrbuches „Raumlehre für höhere Schulen“. Er enthält an Lehrsätzen und Uebungen alles das, was zum Aufbau des Systems nothwendig ist. Die Einrichtung und Anordnung ist genau die des grösseren Werkes, so dass es leicht ist, den Inhalt des Leitfadens nach jenem zu ergänzen und weiter auszubauen. Das grössere Werk haben wir im 4. Hefte des 37. Jahrganges und im 6. Hefte des 37. Jahrganges ausführlich besprochen und wir weisen auf diese Besprechungen hierdurch hin. Alle die Eigenthümlichkeiten und Vorzüge, die wir da dem Hauptwerke beigelegt haben, haften auch dem vorliegenden Leitfaden an, unter anderen die musterhaft klare und verständliche Darstellung und Anordnung, die Vermeidung fremdsprachlicher Ausdrücke und deren glückliche Verdeutschung, die vielen schönen der Praxis entnommenen Zahlenbeispiele, und bei der Körperlehre insbesondere die perspectivisch richtigen und sauberen Figuren, wodurch das Buch fast einzig in seiner Art dasteht, schliesslich die vorzügliche Ausstattung. Von dem grösseren Werke haben wir behauptet, dass es zu den besten seiner Art gehöre; wir können auch von diesem kürzeren Auszuge dasselbe sagen.

F. Schütte.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Ein Leitfaden für den Unterricht mit Uebungsaufgaben von Jos. Lengauer, Professor am königl. alten Gymnasium zu Würzburg. Vierte, umgearbeitete Auflage der „Ebenen Geometrie“ von A. Stegmann. Kempten 1893. Verlag der Jos. Kösel'schen Buchhandlung. 180 S. 8⁰.

Vorliegendes Lehrbuch unterscheidet sich von den meisten ähnlichen Büchern in Bezug auf Inhalt, Darstellung, Anordnung und Behandlung des Stoffes, welche die schon vor Menschenaltern übliche ist, im Ganzen so wenig, dass man hierüber nichts sagen kann. Der Lehrstoff ist noch recht umfangreich; der Uebungsstoff ist zwar erweitert, aber, dass Petersens „Methoden und Theorien“ von Einfluss darauf gewesen seien, wie es in der Vorrede heisst, davon merkt man leider nicht viel. Denn weder sind

die Aufgaben nach jenen Methoden geordnet, noch auch treten die Ideen der Auflösung irgendwo prägnant hervor. Ueberhaupt merkt man nicht viel von modernem Zuschnitt. Auch der Umstand, dass das Werk in Frakturschrift gedruckt ist, während man doch jetzt fast allgemein für derartige Sachen Antiqua verwendet, muthet einen etwas altmodisch an. Loben wollen wir, dass die Constructionsaufgaben mit Zahlenbeispielen versehen sind; unglücklicherweise liefern aber die meisten dieser Zahlen als Millimeter genommen sehr winzige Dreieckchen, während sie als Centimeter genommen viel zu gross für die Ausführung auf Papier sind. Sonst giebt es nicht viel zu loben noch auch zu tadeln; das Buch ist eben zu wenig originell. Auch die Figuren sind nur mittelmässig schön. F. Schütte.

Methodisches Hilfsbuch für den **Vorunterricht in der Geometrie** und das geometrische Zeichnen. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und Fortbildungsschulen. Von O. Bürklen, Professor am Reallyceum in Schw. Gmünd. Stuttgart 1893. Verlag von Ad. Bonz & Comp. 48 S. 8°.

Die in diesem Buche befolgte Methode ist so trefflich dem kindlichen Geiste angepasst, dass sie sicher die schönsten Früchte tragen und dem Schüler Freude an Geometrie bekommen lassen wird. — Was erklärt werden soll, wird vorher gezeichnet und kommt so durch das Auge zunächst in die Anschauung. Handelt es sich um die Congruenz von Figuren, so werden sie auf Carton gezeichnet, ausgeschnitten und wirklich zur Deckung gebracht, so sind Irrthümer und Unklarheit ganz ausgeschlossen. Die Fundamentalaufgaben (man möchte wünschen, dass sie auch typographisch hervorgehoben würden) sind sorgfältig behandelt und werden durch vielerlei Wiederholungen befestigt. Die Constructionsaufgaben sind einfach und leicht, und die gegebenen Stücke sind in bestimmten Maassen, Centimetern, angegeben. Dies erleichtert dem Schüler, der das Concrete mehr liebt, als das Allgemeine, die Aufgabe und übt sein Auge, es erleichtert dem Lehrer die Controle und schützt vor ungünstigen Fällen und Zeichnungen, die das zu Erweisende nicht deutlich erkennen lassen. Besondere Freude werden dem Schüler die Zeichenübungen machen, namentlich die einfachen und doch so hübschen Ornamente. Sie geben auch der Phantasie Nahrung, wecken den Schönheitssinn, und es hat für den Schüler hohen Reiz, die Construction selbstständig, oder nach leichten Andeutungen zu finden. So lernt er spielend eine Reihe geometrischer Wahrheiten kennen und zugleich anwenden, und spielend lernt doch das Kind am liebsten. Wir möchten dem Verfasser sogar rathen, die Zahl derartiger Figuren noch zu vermehren und sie passend durch das ganze Buch hin zu vertheilen. Gerne gestehen wir ein, dass wir selten ein Werkchen gefunden, das so sehr seinem Zwecke entsprechend wäre wie dieses kleine Hilfsbuch.

F. Schütte.



Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von Dr. Ernst Bardey. Vierte Auflage. Leipzig 1893. Druck und Verlag von B. G. Teubner. 378 S. 8°. Preis: brosch. 6 Mk.

Dieses ausgezeichnete Werk, das nicht nur theoretisch interessant, sondern auch für den Lehrenden in vieler Hinsicht praktisch verwendbar ist, liegt nunmehr in vierter Auflage vor. Es dürfte bei den Fachgenossen wohl allgemein so bekannt sein, dass eine kurze Charakteristik hier genügen wird. Das Buch enthält etwa 1000 Gleichungen nach bestimmten Principien geordnet nebst ihren Lösungen, und zwar quadratische Gleichungen und solche höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen, namentlich solche, die interessant in der Form, elegant und überraschend in der Lösung, einfach in den Resultaten sind, dann solche mit ausgezeichneten oder leicht erkennbaren Wurzeln. Die Durcharbeitung dieses Buches schärft den Blick ungemein für die Erkennung der Zurückführbarkeit einer Gleichung und die Art und Weise wie sie anzugreifen ist. Ferner werden Gleichungen mit mehreren Unbekannten behandelt, die in ähnlicher Weise bemerkenswerth sind. Die meisten Gleichungen erscheinen in allgemeiner Form, nur wenige in Zahlenwerthen.

In dieser neuen Auflage sind Druckfehler ausgemerzt, einzelne Theile verbessert, einige Lösungen erweitert; die Veränderungen sind jedoch keine wesentlichen.

F. Schütte.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln für neue (centesimale) Theilung mit sechs Decimalstellen. Von W. Jordan, Professor an der königl. technischen Hochschule zu Hannover. Stuttgart 1894. Verlag von Konrad Wittwer. 420 S. Royal-Octav. Preis 10 Mk.

Diese Tafeln enthalten zunächst die Logarithmen der gewöhnlichen Zahlen von 1 bis 100000 auf sechs Stellen; dann folgen die Logarithmen der trigonometrischen Functionen. Bei der hier zu Grunde liegenden Kreistheilung ist ein Quadrant gleich 100 Graden, ein Grad gleich 100 Minuten, eine Minute gleich 100 Secunden. Bezeichnung: $1^g = 100^c = 10000^{cc}$. Von 0^g bis 20^g sind die Logarithmen angegeben von je 10 zu 10^{cc}, von $20^g - 50^g$ von jedem 1^c ($20^g = 18^0$ alter Theilung). Das kleinere Intervall am Anfange der Tafel ist nothwendig wegen der sehr grossen und ungleichen Differenz von *log sin* und *log tg*. Es hätte ausgereicht, mit dem kleineren Intervall bis zu 5^g zu gehen, im Interesse der Bequemlichkeit ist weiter gegangen, und soll in späteren Auflagen das kleinere Intervall von 10^{cc} bis ans Ende der Tafel fortgeführt werden. Dies ist jedenfalls viel bequemer, denn nichts ist lästiger bei derartigen Rechnungen, als das langweilige Interpoliren, das man wegen grosser Differenzen nicht im Kopfe machen kann. Für ganz kleine Winkel sind auch die bekannten Zahlen S und T, wie z. B. bei Bremiker und Schrön unten angebracht.

Der Mangel an sechsstelligen Tafeln — und eine solche ist für den Landmesser nöthig — für die neue Theilung hat den Verfasser zur Herausgabe dieses Werkes veranlasst. Benutzt wurde eine grosse achtstellige Tafel, die 1891 in Paris erschien, jedoch hat der Verfasser zur Controle 100 Werthe des *log sin* und *log cos* auf 15 Stellen selbstständig berechnet, sowie eine Anzahl Zwischenwerthe. Die Tafel ist in verschiedener Weise so controlirt, dass Fehler so gut wie ausgeschlossen sind.

Die technische Anordnung ist wohlgelungen und übersichtlich, der Druck sehr correct. Eine Verbesserung möchten wir vorschlagen. Da die erste Tafel auf jeder Seite 60 Zeilen hat, also nicht rund abschliesst, so möchte jedes 10000 durch einen auffallenderen, dickeren oder doppelten Querstrich hervorgehoben werden. Das Papier ist hervorragend schön und dauerhaft.

F. Schütte.

Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung. Von Joh. Thomae in Jena. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten und 16 lithographirten Figurentafeln. Halle a. S. 1894. Verlag von Louis Nebert. 181 S. 8⁰. Preis 6 Mk.

Der Verfasser hatte im Jahre 1873 unter dem Titel „Geometrie der Lage" ein Werk über Gebilde erster und zweiter Ordnung veröffentlicht, dessen Inhalt diesem neuen Werke einverleibt und insbesondere in den Kegelschnitten, Kegelschnittbüscheln und Scharen in weit ausführlicherer Weise behandelt ist. Vor allem sind die Grundaufgaben auch für die Fälle gelöst, in denen ideale Gebilde in dieselben eingehen. Diese sind in dem berühmten Werke von Reye nicht berücksichtigt. Von den ähnlichen Werken der Herren Zech, Cremona, Rulf und den Steiner-Schröter-schen Vorlesungen unterscheidet sich das vorliegende Werk vornehmlich durch die Reinheit der Methode. Es sind sämmtliche Ableitungen und Beweise rein projectiv erbracht. Dadurch gewährt es dem Lernenden einen reinen und in hohem Grade befriedigenden Genuss. Denn nicht mit Unrecht bemerkt der Verfasser in der Vorrede: „Wie ein schriller Pfiff in eine harmonische Musik tönt es herein, wenn z. B. in Schröter's Abhandlung über die Clebsch'sche Configuration, die im Allgemeinen projectiv gehalten ist, plötzlich eine quadratische Gleichung aufgelöst wird." — Von hohem Interesse sind die einleitenden Erklärungen über die Unmöglichkeit einer reinen Geometrie der Ebene ohne den Raum, über den Begriff des Punktes, der Linie, und der Continuität, die Eigenschaften der Geraden, Adjunction des uneigentlichen Punktes, und der uneigentlichen Geraden einer Ebene, das Lineal als Constructionsmittel, Dualität u. A. Ebenso ist bemerkenswerth das Schlusskapitel über Maassverhältnisse. Ausser den specifischen Kapiteln über die idealen Elemente enthält das Buch an vielen Stellen Neues oder schon Bekanntes in neuer Beleuchtung, wie dies ja bei einem so einheitlich und individuell-eigenartig durchgearbeiteten Buche nicht

ausbleiben kann. Die Darstellung ist dabei klar und sorgfältig, so dass sie auch dem weniger Geübten keine Schwierigkeiten bietet. Hervorheben wollen wir noch die reiche Anzahl von Figuren auf Tafeln und im Texte, denn mit Recht hält Verfasser es für nützlich, von Figuren einen ausgedehnten Gebrauch zu machen, da es eine zu grosse Unterstützung der Vorstellung ist, deren sich nur wenige entschlagen möchten.

F. Schütte.

Notations de logique mathématique par G. Peano, professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin. Introduction au Formulaire de mathématique publié par la Rivista di Matematica. Turin 1894. 52 pag.

Wenn unter dem Namen eines Mathematikers ein solcher Gelehrter verstanden werden müsste, dem alle Theile der Mathematik gleich geläufig wären, so erzwänge diese Forderung das Eingeständniss, dass in der Gegenwart Niemand mehr auf diesen Namen Anspruch erheben könnte. Mindestens in gleichem Maasse, wie in irgend einer Wissenschaft, hat in der Mathematik die Arbeitstheilung sich eingestellt. Und dennoch sind alle Einzelgebiete so mit einander verbunden, dass kein Bearbeiter des Einen Kenntniss der Anderen entbehren kann. Aus diesem Dilemma kann man auf zwei Arten sich erretten. Die eine Art besteht in Rathserholung bei einem Fachmanne im engeren Sinne des Wortes. Der seit Anfang 1894 in Paris erscheinende „*Intermédiaire des mathématiciens*“ hat sich die Aufgabe gestellt, solche Anfragen und ihre Beantwortung zu vermitteln, ein, wie uns scheint, sehr glücklicher Gedanke, insbesondere deshalb glücklich, weil die Fragen, wenn auch von einem Einzelnen gestellt, meistens Vielen aus der Seele gesprochen sind, und weil deshalb die Antworten erst recht auf allgemeineres Interesse rechnen können. Die andere Art, das dem weniger Bewanderten Nothwendige zu beschaffen, besteht in dem Nachschlagen in eigens zu solchem Zwecke hergestellten Sammelwerken. Ein solches Werk ist Herrn Hagen's *Synopsis*, und ähnliche Zwecke soll das „*Formulaire de mathématique*“ erfüllen, dessen Herausgabe die „*Rivista di matematica*“ unternommen hat. Will eine solche Sammlung der bekannten Sätze ihren vollen Nutzen gewähren, so muss sie Vollständigkeit mit Uebersichtlichkeit verbinden, und Letztere hat die Leitung der „Rivista di matematica“ dadurch zu erreichen gesucht, dass sie bei der Drucklegung die wesentlich abkürzenden Zeichen der mathematischen Logik in Anwendung bringt. Ein Missstand findet hier allerdings statt, der nämlich, dass nicht jeder Mathematiker die Schrift zu lesen im Stande ist! Aber wohl oder übel wird man es lernen müssen, die Zeichen zu verstehen, welche die allgemeine Schrift Leibnizens zur Wahrheit machen sollen. Fangen doch wenigstens in Italien auch Schriftsteller ausserhalb der „Rivista di matematica“ an, sich ihrer zu bedienen, wie z. B. Herr Francesco Giudice in den

„*Atti*“ der Turiner Akademie vom 31. December 1893. Freilich bedarf es zur Erlernung einer Sprache der Hilfsmittel. Eine Sprachlehre, ein Wörterbuch müssen vorhanden sein, und als solche hat das kleine Buch zu gelten, von dessen Erscheinen wir unseren Lesern Kenntniss geben. Dass Herr Peano mehr als irgend ein Anderer dazu berufen war, eine solche Anleitung zur Kenntniss der Symbole der mathematischen Logik zu verfassen, bedarf nicht erst der Begründung, und ein Blick in die Schrift selbst wird Jedem die Ueberzeugung beibringen, dass der Berufene in diesem Falle auch der richtig Ausgewählte war. Wird die neue Schriftsprache in der That das leisten, was Leibniz beabsichtigte und erwartete? Wird sie mehr sein als eine Kurzschrift? Wird sie das Denken unterstützen, das Erfinden erleichtern? Diese Fragen zu beantworten ist es noch nicht an der Zeit. Erfolg oder Misserfolg werden darüber entscheiden.

Cantor.

Logica Matematica (Manuale Hoepli). C. Burali-Forti, Professore nella R. Accademia Militare di Torino. Milano 1894. Ulrico Hoepli. VI, 158 pag.

In der gleichen Stadt, in welcher Herr Peano wirkt, und in ähnlicher Richtung wie er, ist auch Herr Burale-Forti thätig. Er hat an der Turiner Universität Vorlesungen über mathematische Logik gehalten und dieselben zu einem ganz kurzen Leitfaden verdichtet. Nur die mathematisch-logische Symbolik gestattete ihn so kurz sich auszudrücken, nur wer jene vollständig beherrscht, wird die kleine Schrift zu lesen im Stande sein, welche allerdings eine Erklärung der gebrauchten Zeichen voraus-schickt, so dass sie selbst dem Leser ermöglicht, jene Aneignung der Symbole sich zu verschaffen.

Cantor.

Giulio Vivanti. **Il concetto d'infinitesimo** e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico. Mantova 1894. Bei G. Mondovi, 134 S.

Herr Vivanti hat in dem ungemein fesselnd geschriebenen Buche, welches wir durch diese Zeilen zu empfehlen wünschen, eine in dieser Form neue Aufgabe sich gestellt. Er ist dem Begriffe des Unendlichen, und zwar sowohl des Unendlichgrossen als des Unendlichkleinen, in seiner geschichtlichen Entwickelung von den ältesten Zeiten bis zu Cauchy nachgegangen, während er die Geschichte des Operirens mit dem Unendlichen, das heisst die verschiedenen Methoden der Infinitesimalrechnung als nebensächlich, wenn nicht schon als bekannt bei Seite schiebt. Dadurch sind zwar nicht wesentlich neue, von Vorgängern des Verfassers nie behandelte Dinge zur Sprache gebracht, aber die Anordnung ist eine eigenartige und lässt das Behandelte in neuer Beleuchtung erscheinen. Wir zweifeln nicht, dass Leser, welche philosophische Betrachtungen den geschichtlich erzählenden vorziehen, dem uns vorliegenden Buche eine besondere Anziehungs-

kraft nachrühmen werden. Aber auch solche Leser, welche gleich dem Referenten der entgegengesetzten Geschmacksrichtung huldigen, werden weder ohne Vergnügen, noch ohne Nutzen Herrn Vivanti's Auseinandersetzungen folgen. Ist doch jeder Historiker bis zu einem gewissen Grade insoweit von seinem Wohnorte abhängig, als ihm nicht überall alle Schriftsteller gleich bekannt und deren Werke gleich zugänglich sein können. Herr Vivanti z. B. beherrscht die italienische Literatur in einem Maasse, wie es bei Forschern aus anderer Heimath unmöglich wäre, und wir persönlich haben Mancherlei bei ihm gelernt.

Cantor.

Abriss der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im Alterthum. Von Dr. Siegmund Günther, ord. Professor an der technischen Hochschule München. Separatabdruck aus dem „Handbuch der klassischen Alterthumswissenschaft". 2. Aufl. Bd. V, 1. Abtheilung. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung (Oskar Beck) in München. 1893. S. 231—313.

Es war eine schwere, fast unlösbare Aufgabe, auf den Raum von 78 Druckseiten (S. 309—313 sind durch die Erklärung benutzter Abkürzungen und durch ein alphabetisches Register in Anspruch genommen) die Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften im klassischen Alterthume zusammen zu drängen. Zu ihrer blosen Inangriffnahme gehörte eine Beherrschung des Stoffes und ein Talent zu übersichtlicher Anordnung, wie sie nur wenigen Persönlichkeiten eigen sind. Herr Günther hat gerade diese beiden Eigenschaften schon wiederholt an den Tag gelegt, und so auch bei dieser Gelegenheit. Ueber eine so kurz gefasste und dennoch verhältnissmässig vollständige Darstellung zu berichten, will kaum angehen. Wir begnügen uns damit, zu erklären, dass wir an dem mathematischen Theile des Abrisses — über den naturwissenschaftlichen Theil zu urtheilen fühlen wir wir uns nicht befugt — nichts Wesentliches auszusetzen haben, und dass der Leserkreis des Handbuches sich um so vertrauensvoller dort Rath holen kann, als Herr Günther nicht versäumt hat, überall diejenigen Schriften anzuführen, in welchen die Einzelheiten weitläufigere Behandlung gefunden haben.

Cantor.

Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland. Vortrag, gehalten am 8. Januar 1894, Gedenktag der Amsterdamer Universität durch D. J. Korteweg. 20 S.

Als Blüthezeit der holländischen Mathematik bezeichnete der Festredner die Jahrzehnte von dem Auftreten Simon Stevin's in Leiden bis zu Huygens, diesen mit eingeschlossen. Es ist einleuchtend, dass von einer solchen Zeit und den grossen Dingen, welche sie hervorbrachte, auf einem Druckbogen (4 Seiten sind durch Anmerkungen in Anspruch genommen)

kaum die Umrisse gezeichnet werden konnten. Niemand weiss das besser als Herr Korteweg selbst, der schon vor mehreren Jahren einen 45 Seiten starken Aufsatz im XXII. Bande des *Archives Néerlandaises* veröffentlichte, welcher ausschliesslich mit Constantin Huygens dem Vater sich beschäftigt, mithin nur einen winzigen Theil des Inhaltes der Festrede behandelt. Aber Herr Korteweg hat es verstanden, jene Umrisse mit fester Hand zu entwerfen, so dass sie seinen Zuhörern sich gewiss zu bleibender Erinnerung eingeprägt haben. Ganz beiläufig hat er bei dieser Gelegenheit eine Entdeckung veröffentlicht. Das Geburtsjahr von Johannes Hudde, welches man nicht kannte, fällt auf 1624. In einem Kirchenregister ist nämlich die am 26. Januar 1673 vollzogene Trauung Hudde's eingetragen und bemerkt, er sei damals 49 Jahre alt gewesen. CANTOR.

Der Magister Johann Fabricius und die Sonnenflecken nebst einem Excurs über David Fabricius. Eine Studie von GERHARD BERTHOLD. Leipzig 1894. Veit & Comp. 60 S.

Am 9. März 1611 hat Johann Fabricius die Sonnenflecken entdeckt. Zur Herbstmesse des gleichen Jahres erschien dessen Narratio, die gedruckte Beschreibung der auffallenden Erscheinung. Am 21. October 1611 begann Christoph Scheiner seine Beobachtungen, welche er im Januar 1612 im Drucke veröffentlichte. Galilei endlich stellte seine Beobachtungen der Sonnenflecken seit dem 5. April 1612 an. Scheiner und Galilei nennen Fabricius nie in den Schriften, in welchen sie sich gegenseitig die Entdeckung streitig machten. Gleichwohl konnten sie, um nicht zu sagen mussten sie Kenntniss von dessen älteren Rechten haben. Johann Fabricius starb zwischen dem 9. März 1616 und dem 7. Mai 1617. Diese, soweit es um Fabricius sich handelt, durchaus neue Daten stellt Herr Berthold in seiner sehr werthvollen Abhandlung fest, welche 20 Seiten Text, 8 Seiten Anmerkungen umfasst. Die letzten 32 Seiten sind durch Abdrücke ungemein seltener, theilweise nur noch in einem einzigen Exemplare auffindbar gewesenen Schriften erfüllt, von welchen die Narratio des Fabricius von 1611 besonderes Interesse erwecken dürfte. CANTOR.

Die geometrische Entwickelung des Infinitesimalbegriffs im Exhaustionsbeweis bei Archimed und ihre Bedeutung für die Differentialgeometrie und die Schule. Von HERMANN BECKER, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahresbericht des königl. Gymnasiums zu Insterburg für 1893—1894 [Programm-Nummer 6], 26 S.

Sobald die geometrische Betrachtung sich den Aufgaben zuwandte, welche heute mit Hilfe der Infinitesimalrechnung behandelt werden, konnte sie dieser ähnliche Auffassungen nicht missen. Ihnen entsprang die

Exhaustionsmethode der Griechen, welche namentlich von Archimed mit grosser Kunstfertigkeit gehandhabt wurde. Herr Becker hat sich der Aufgabe unterzogen, sämmtliche Beispiele der Exhaustion in Archimed's Schriften aufzusuchen und in moderner Sprache zusammenzustellen. CANTOR.

Les mécaniques ou l'élévateur de Héron d'Alexandrie publiées pour la première fois sur la version arabe de Qostâ ibn Lûqâ et traduites en français par M. le Baron CARRA DE VAUX. Extrait du Journal Asiatique. Paris 1894. Imprimerie Nationale. 309 p.

Der hochinteressante Band besteht aus 36 S. Einleitung, 115 S. arabischem Texte und 158 S. französischer Uebersetzung. Vermöge unserer vollständigen Unkenntniss des Arabischen waren wir nur im Stande mit dem in französischer Sprache Gedruckten uns zu beschäftigen, und müssen wir uns wegen der Richtigkeit der Uebersetzung auf die anderweits erprobte Zuverlässigkeit des Herausgebers verlassen. Er selbst ist indessen weit davon entfernt, überall mit gleicher Sicherheit aufzutreten. An den verschiedensten Stellen finden sich Fussnoten, welche die Verstümmelung und Unverständlichkeit des Textes bedauern, ein Umstand, mit welchen man wohl rechnen muss, bevor man aus einzelnen Sätzen weitgehende Folgerungen zieht. Wenn z. B. auf S. 73 „Posidonius der Stoiker" als Gewährsmann angeführt wird, wenn daran sich anschliesst, Archimed habe eine von diesem ausgehende Erklärung gespaltet, wenn eine Fussnote dazu bemerkt, der Name Posidonius sei zweifelhaft, und die Bezeichnung als Stoiker nicht minder, da es auch heissen könnte „ein Maler", so möchten wir den Schluss, Heron müsse also noch 90 vor Christi Geburt gelebt haben, weil damals erst Posidonius von Rhodos blühte, weniger leicht unterschreiben als den anderen, die hier genannte Persönlichkeit sei eben nicht Posidonius von Rhodos. Jene Uebersetzung würde der Herausgeber wahrscheinlich auch nicht in seinen Text aufgenommen haben, wenn er nicht mit Herrn Diels der Ansicht wäre, die Meinung, die seit Martin sich eingebürgert hat, Heron von Alexandrin habe seine Blüthezeit um 100 vor Christi Geburt gehabt, müsse wieder verlassen werden, indem Heron erst in einer Zeit lebte, zu welcher römische Kunstausdrücke in die griechische Sprache eingedrungen waren, etwa im zweiten nachchristlichen Jahrhunderte. Selbstverständlich würde diese Verschiebung von Heron's Lebenszeit die wesentlichsten Veränderungen in der Geschichte der Mathematik bedingen. Die unbestreitbaren Uebereinstimmungen zwischen römischer, griechischer, arabischer Feldmessung würden auf eine andere Urquelle als auf das grosse Werk Heron's zurückgeführt werden müssen. Ein Anonymus, den man aber doch nur als Alexandriner sich denken könnte, träte an die Stelle Heron's und dieser selbst verlöre an der Werthschätzung, die man ihm entgegenzubringen sich gewöhnt hat. Gerade diese letztere

Nothwendigkeit würde uns persönlich, wir können fast sagen, schmerzen und macht uns widerwillig, die Gründe ohne Weiteres anzuerkennen, welche Heron an das Ende eines Zeitraums versetzen, als dessen Lehrer wir ihn betrachteten. Auch die durch Herrn Carra de Vaux einem grösseren Leserkreise erschlossene Mechanik stimmt zu der Bewunderung, welche wir für Heron besassen, und zeigt ihn im schönsten Lichte. In dieser Beziehung ist übrigens der Herausgeber durchaus gleicher Meinung mit uns, und er hebt in seiner sehr schönen Einleitung hervor, wie Heron, gestützt auf die mechanischen Schriften eines Aristoteles und Archimedes, von welchen er Letzteren wiederholt nennt, während man den Namen des Ersteren vergebens sucht, einen erheblichen Fortschritt bezeichnet. Lesern, die nicht selbst Untersuchungen anzustellen beabsichtigen, ist die Einleitung ganz besonders zu empfehlen, da sie ihnen erspart, sich durch den mitunter, wie wir bereits erwähnt haben, recht dunklen und bruchstückartigen Text hindurch zu arbeiten. Unser Bericht würde eine wesentliche Lücke lassen, wenn wir nicht erwähnten, dass Herr Carra de Vaux S. 21—22 der Einleitung nachzuweisen sucht, Heron müsse nach Vitruvius und nach Plinius, also nicht vor dem Ende des ersten nachchristlichen Jahrhundert gelebt haben, weil er eine Art Presse mit Hilfe der Schraube beschreibe, von welcher Plinius berichte, dass sie in seiner eigenen Lebenszeit erfunden worden sei. Aber auch dieser Schluss gleich den anderen, welche dazu bestimmen sollen die Lebenszeit Heron's wesentlich später zu setzen, als man es seither that, beruht auf einer Annahme: dass nämlich die Mechanik nicht ähnliche Einschiebungen erlebte, wie sie in den geometrischen Schriften Heron's nachweisbar sind. Dieser, wie uns scheint, sehr schwerwiegende Einwurf ist von Herrn Hultsch in dem „Literarischen Centralblatt" vom 14. April 1894 S. 554—555 gemacht.

Cantor.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis-en natuurkundige wetensschappen in de Nederlanden door D. Bierens de Haan. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (Eerste Sectie, Deel II. No. 1) met 5 Kaarten. Amsterdam 1893. Joh. Müller. 60 S.

Wer mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigt, kennt und schätzt die Funde, welche Herr Bierens de Haan in den verschiedensten niederländischen Archiven gemacht hat und welche in der That als werthvolles Baumaterial bezeichnet werden können, nicht immer vollkommen zubehauen und geglättet, um ohne Weiteres in ein Mauerwerk eingefügt werden zu können, aber stets verwendbar und von festem inneren Gefüge. Die gleichen Eigenschaften kommen auch der neuesten Veröffentlichung unseres bewährten Fachgenossen zu Gute. Quetelet hat in seiner *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Brüssel 1864) sich auf S. 247—253 mit Michael Florentius van Langren beschäftigt, der von etwa 1600

bis etwa 1660 gelebt habe, dessen Mondkarte als diejenige bezeichnet wird, welche wahrscheinlich zuerst die heute noch gebräuchlichen Namen der einzelnen Erhöhungen und Vertiefungen enthielt, der auch Verbesserungen des Hafens von Ostende vorschlug und überhaupt die Sicherung dieser letzteren Festung sich angelegen sein liess, wie sein Briefwechsel mit Bouillaud erweise. Eben dieser Langren ist es, dem die neuen Forschungen des Herrn Bierens de Haan gewidmet sind. Er kam im Jahre 1600 in Begleitung seiner Eltern nach Brüssel, lebte also damals schon. Er starb im Mai 1675 in Brüssel als königlicher Kosmograph. Er sah eine lohnende Aufgabe darin, die Versandung von Seehäfen zu verhindern und, wo sie bereits begonnen hatte, ihr entgegenzutreten. Allerdings widersprachen seine Theorien den hergebrachten Meinungen der Wasserbaupraktiker, und deshalb wurden sie bezüglich des Hafens von Mardyck gründlich unterschätzt, bis dieser unfähig war Kriegsschiffe in genügender Anzahl zu fassen, was den Verlust von Dünkirchen für den König von Spanien zur Folge hatte. Um so lebhafter drang Langren auf die Entsandung des Ostender Hafens. Dieselbe Absicht wollte ein gewisser Pierre de Roberti, Vorsteher der Befestigungsarbeiten, mit wesentlich anderen Mitteln erreichen, welche bedeutend kostspieliger waren und statt Nutzen nur Schaden brachten. Unter Langren's Freunden, welche seine Pläne im Grossen und Ganzen billigten, war auch Constantin Huygens der Vater, und Langren beging die Taktlosigkeit, zwei Briefe desselben einer seiner Streitschriften einzuverleiben, worüber Jener sich dann bitter beschwerte. Stand es doch dem Rathe Friedrich Heinrichs von Oranien übel an, öffentlich als Gewährsmann in einer Sache zu erscheinen, welche, wenn auch wissenschaftlicher Natur, dem Könige von Spanien Nutzen zu bringen geeignet war. Herr Bierens de Haan hat die auf die Ostender Hafenarbeiten bezüglichen Acten nebst den dazu gehörigen Karten fast vollständig zum Abdrucke gebracht, so dass es nunmehr möglich ist, sich ein eigenes Urtheil über Langren's Theorien zu bilden.

Cantor.

Die Geometrie von Réné Descartes, deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Mit zwei Figurentafeln. Berlin 1894. Mayer & Müller. X, 116 S.

Die älteste Ausgabe der Descartes'schen Geometrie von 1637, sowie deren lateinische Uebersetzung von 1649 dürften zu den grössten bibliographischen Seltenheiten gehören. Häufiger begegnet man in antiquarischen Katalogen dem zweiten Abdrucke der lateinischen Uebersetzung von 1659. Das französische Original ist seitdem dreimal neu aufgelegt worden: im Jahre 1728 in der Cousin'schen Gesammtausgabe der Descartes'schen Werke Band V und im Jahre 1886. Herr Schlesinger hat nun auch eine deutsche Uebersetzung der nach so manchen Richtungen bahnbrechenden Schrift angefertigt, welche ihm bei Uebungen zur analytischen Geometrie im Anschluss

an Descartes diente, die er an der Berliner Universität im Sommer 1893 abhielt, und ein Verleger fand sich bereit, diese Uebersetzung der allgemeinen Benutzung zugänglich zu machen. Möge ihr Erscheinen dazu beitragen, dass unsere heutigen Mathematiker jenes unsterbliche Werk mehr also nur dem Namen nach oder aus kurzen Auszügen kennen lernen. Niemand, dessen sind wir überzeugt, wird die darauf verwandte Zeit nachträglich bereuen. Die Uebersetzung ist, so weit wir uns mit derselben näher bekannt gemacht haben, recht treu und lesbar, letzteres sogar noch etwas mehr als das Original, in welchem Descartes mitunter absichtlich dunkle Redewendungen bevorzugte. 44 angefügte Anmerkungen erleichtern das Verständniss.

Cantor.

Ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676 von Oberlehrer Riessen. Programmbeilagen aus Glückstadt. [1893: Programm Nr. 280 und 1894: Programm Nr. 279.] 26 und 24 S.

Im Jahre 1647 gab Arnold Möller, Rechenmeister zu Lübeck, den *Güldenen Lehrschatz* heraus. Im Jahre 1719 veröffentlichte Paul Halcke sein *Mathematisches Sinnenconfect*. Zwischen beide Schriften fällt das Rechenbuch, welches Heinrich tho Aspern (1631—1695), der seit 1667 an der Schule in Neuendorf in Holstein thätig war, im Jahre 1676 verfasste, und welches sich handschriftlich im Besitze der Familie tho Aspern erhalten hat. Die Zwischenstellung ist keine blos äusserliche. Herr Riessen, der in zwei aufeinander folgenden Jahresprogrammen sich der dankenswerthen Mühe unterzog, über jenes ungedruckte Rechenbuch zu berichten, hat sichergestellt, dass Heinrich tho Aspern einerseits Halcke's Lehrer war, andererseits Möller's Vorlage mit Vortheil benutzte. Insbesondere ist die vielfach gereimte Form, sind einzelne Aufgabengattungen, auch einzelne bestimmte Aufgaben sammt ihren Zahlen von dem einen Verfasser zum anderen und zum dritten zu verfolgen gewesen. Ein theils beabsichtigter, theils unfreiwilliger Humor ist in allen diesen Schriften wahrnehmbar, der namentlich dann, wenn er in plattdeutsche Verse sich kleidet, geradezu erfrischend wirkt. Tho Aspern's Rechenbuch zerfällt in vier Klassen und einem Lustgärtlein. Die I. Klasse lehrt die vier gemeinen Rechnungsarten an ganzen Zahlen, die II. Klasse an Brüchen. Die III. Klasse hat es mit der Regeldetri zu thun, die IV. Klasse mit Vermischungsrechnungen (*Regula Alligationis*), unbestimmten Aufgaben (*R. Virginum*) und dem falschen Ansatz (*R. Falsi*). Das Lustgärtlein geht über diese Aufgaben dann noch hinaus. In seinen Beeten — so heissen die einzelnen Kapitel — wachsen Ausziehungen von Wurzeln zweiten bis neunten Grades, Auflösung von Gleichungen bis zum dritten Grade einschliesslich, Untersuchungen über figurirte Zahlen. Herr Riessen hat überall Anmerkungen beigefügt, welche dem heutigen Leser das Verständniss erleichtern.

Cantor.

Professor Dr. Rudolf Wolf 1816—1893. Der Bernischen naturforschenden Gesellschaft zum Andenken beim 50jährigen Jubiläum ihrer „Mittheilungen" gewidmet von Professor Dr. J. H. GRAF. Mit dem Portrait von Professor R. WOLF. Bern 1894. Bei K. J. Wyss. [Separatabdruck aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft von Bern.]

Mit 23 Jahren wurde Rudolf Wolf (1839) in Bern an der Realschule angestellt; acht Jahre später (1847) trat er an die Spitze der dortigen Sternwarte; wieder acht Jahre später (1855) berief ihn sein Heimatscanton Zürich als Lehrer der Mathematik an das Gymnasium und als Lehrer der Astronomie an das neu gegründete Polytechnikum; Ende 1864 bezog er die nach Semper'schen Plänen erbaute neue schöne Sternwarte, als deren Director er noch 29 Jahre wirkte. Dem Berner Aufenthalt gehört Wolf's bahnbrechende Entdeckung von dem Zusammenfallen der Sonnenfleckenperiode von 11⅓ Jahren mit einer genau ebenso langen Periode der Declinationsvariationen der Magnetnadel an, einem Zusammenfallen in dem Sinne, dass die Maxima beider Erscheinungen und ebenso ihre Minima stets gleichzeitig auftreten. Ebendort begann Wolf mit den Würfelversuchen, durch deren Anstellung er das Gebiet der Wahrscheinlichkeit a priori mit dem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in Verbindung brachte. In Zürich setzte er beide Untersuchungsreihen fort, Sonnenfleckenbeobachtungen und Würfelversuche beschäftigten ihn bis in seine letzte Lebenszeit, aber daneben trat eine neue Geistesrichtung Wolf's glänzend hervor, die historische. Die „Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz" (1858—1862), das „Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie" (1872), die „Geschichte der Astronomie" (1877), die „Geschichte der Vermessungen in der Schweiz" (1879), das „Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur" (1890—1893) sind geschichtliche Leistungen allerersten Ranges, mit welchen zu wetteifern fast unmöglich ist, insbesondere, wenn man die Raschheit der Aufeinanderfolge und die Gründlichkeit der Schriften nebeneinander beachtet. In Zürich begann Wolf auch die Veröffentlichung seiner werthvollen „Astronomischen Mittheilungen", welche er bis zur 82. Nummer brachte; die 83. Nummer liess er redactionell vollendet zurück; für die weitere Fortsetzung des verdienstlichen Unternehmens sorgte er testamentarisch. Diese nackten Thatsachen entnehmen wir theils dem uns vorliegenden warm geschriebenen kleinen Buche, theils eigener Erinnerung. Niemals wird aus dieser die liebenswürdige Persönlichkeit Wolf's verschwinden, wie er in seinen Briefen, wie er in der mündlichen Unterredung sie offenbarte. Wieder genau den gleichen Eindruck gewinnen wir aus einem Nekrologe, den Herr Wolfer, des Verstorbenen Nachfolger an der Sternwarte, in der „Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft" Jahrgang 29 Heft I veröffentlicht hat.

CANTOR.

Erinnerung an Moritz Abraham Stern von FERDINAND RUDIO. Zürich 1894.

Am 2. Februar 1894 wurde in Zürich die Leiche eines 86½jährigen Greises der Erde übergeben, der gewiss keinen Feind, wohl aber zahlreiche ihn verehrende Schüler und Freunde zurückgelassen hat. Wie konnte man auch anders, als mit hochschätzender Liebe an ihm hängen, dem selbst so liebevollen, dienstwilligen, zuvorkommenden Manne, an dem die Jahre spurlos vorüber zu gehen schienen bis auf die Spuren geistiger Thätigkeit, die er selbst in die wissenschaftliche Geschichte jener Jahre eintrug. Herr Rudio hat an Stern's Grab als jüngerer Fachgenosse warme Worte gesprochen.* Dem Referenten persönlich war Stern mehr als das. Ich hatte die Freude, in den Jahren 1849—1851 seine Vorlesungen in Göttingen als aufmerksamer Zuhörer zu besuchen und an dem mustergiltigen Vortrage des Lehrers mich zu bilden. Es sei gestattet, aus meinen Erinnerungen an jene Zeit wenige ergänzende Striche zu dem von Herrn Rudio Gesagten hinzuzufügen. Im Sommersemester 1850 las Stern über Elementarmathematik, eine Vorlesung, welche unter den in Anmerkung 4 genannten nicht enthalten ist. Vielleicht gehörte sie nicht zu seinem gewöhnlichen Kreislauf der Gegenstände, aber jedenfalls war die Vorlesung hochinteressant und gab Stern Gelegenheit, nach zwei Richtungen sich breiter zu fassen, als es ihm in seinen anderen Vorlesungen möglich war. Er verweilte bei den philosophischen Grundlagen der Mathematik und bei deren geschichtlichem Wachsen. In beiden Dingen kann ich mich nur seinen dankbaren Schüler nennen. Stern gehört die Auffassung der Mathematik als Erfahrungswissenschaft an, welche ich in meinen „Grundzügen einer Elementararithmetik“ (Heidelberg 1855) an die Spitze stellte, bei Stern entwickelte sich meine Neigung zu Forschungen über die Geschichte der Wissenschaften. Seine Vortragsweise war klar, anspruchslos, einfach, wie der ganze Mann, und auch der humoristische Zug, den man noch auf der Photographie zu erkennen vermag, fehlte nicht. Stern sprach meistens ganz frei. Nur wenn es sich um ein bestimmtes Beispiel handelte oder um Fortsetzung einer Erörterung, welche in der vorhergehenden Stunde nicht zu Ende hatte geführt werden können, zog er einen bei seinen Zuhörern sprichwörtlich gewordenen kleinen Zettel aus der Westentasche, dem er die nöthigen Aufzeichnungen anvertraut hatte. Er rechnete an der Tafel mit grosser Sicherheit. Kam es ja einmal vor, dass er sich irrte, so war ihm Nichts lieber, als dass man ihn unterbrach, um den Irrthum so früh als möglich verbessern zu können. Während meines Aufenthaltes in Göttingen wurde das dortige mathematische Seminar eingerichtet, in dessen Leitung Stern sich mit Ulrich theilte. Grade diese Theilung war geeignet, uns erkennen

* Die Grabrede ist ausser in dem uns vorliegenden besonderen Drucke nochmals in der Vierteljahrsschrift der Züricher naturwissenschaftlichen Gesellschaft, Jahrgang 39 Heft 2, erschienen.

zu lassen, was wir an Stern besassen. Nur Wenige mögen mit mir sich der damaligen Zeit erinnern, unter ihnen jedenfalls Richard Dedekind. Aber die noch Vorhandenen haben ohne Zweifel an jene Zeit und an unseren Lehrer ein treues Gedächtniss sich bewahrt. Cantor.

Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik, Theil II. Die Arbeiten deutscher Physiker über die Sirene in dem Zeitraume von 1830 bis 1856. Von Dr. Ernst Robel, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1894. [Programm Nr. 98.] Berlin 1894. R. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 31 S.

Für den I. Theil der Untersuchungen verweisen wir auf Bd. XXXVII dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 71. Der II. nicht minder interessante Theil ist der Hauptsache nach den Arbeiten von Opelt, Seebeck, Dove, v. Helmholtz, Ohm gewidmet. Dieselben sind theils experimenteller, theils mathematisch-theoretischer Natur gewesen, theils haben sie die Aufgabe nach beiden Richtungen hin behandelt und gefördert, wie es in der persönlichen Richtung der einzelnen Forscher begründet lag. Die drei zuerst Genannten waren die experimentell arbeitenden, der an letzter Stelle Erwähnte der in mathematischen Entwickelungen geübte Akustiker. Helmholtz vereinigte in sich die beiden Begabungen. Opelt hat auf seine Versuche eine Musiklehre aufgebaut. Seebeck hat unter Anderem die Interferenz der Töne einfach nachweisbar zu machen gewusst. Dove vervollkommnete die sogenannte mehrstimmige Sirene, so dass sie zur Hervorbringung von Combinationstönen geeigneter wurde. v. Helmholtz brachte die Lehre von diesen Combinationstönen durch Versuche und mathematische Entwickelungen in's Reine. Ohm hat zuerst den Gedanken ausgesprochen, dass jede beliebige periodische schwingende Bewegung nach dem Fourier'schen Theoreme entwickelt werden kann, und dass dann jeder der Coefficienten dieser Reihe die Amplitude eines einzelnen wahrgenommenen Tones darstellt. Bei dem Widerspruch Seebeck's gegen die Anwendung dieses Gedankens auf die Sirene bricht die Abhandlung ab. Cantor.

Systematisches Verzeichniss der Abhandlungen, welche in den Schulschriften sämmtlicher an dem Programmtausche theilnehmenden Lehranstalten erschienen sind. Bearbeitet von Dr. Rudolf Klussmann. Nebst zwei Registern. II. Band 1886—1890. Leipzig 1893. Bei B. G. Teubner. VII, 285 S.

Wie viele Gelehrsamkeit steckt doch in unseren Schulprogrammen, wie viele Arbeit ruht dort vergraben, manchmal auch begraben! Der geregeltere Programmtausch hat zwar einige Abhilfe getroffen. Lehrern derjenigen

Anstalten, welche an dem Tausche theilnehmen, dürfte nicht leicht der Titel eines Programmes unbekannt bleiben, welches ihn interessiren kann. Aber Privatgelehrten und Universitätslehrern kommt gerade umgekehrt nur selten ein für sie wichtiges Programm zur Kenntniss, es sei denn, dass der Verfasser es ihnen zuschicke. Herstellung eines systematischen Verzeichnisses solcher Abhandlungen war deshalb geradezu ein Bedürfniss, und Herr Klussmann hat die Aufgabe der Anfertigung dieses Verzeichnisses vortrefflich gelöst. Die Anordung ist nach Fächern und innerhalb jedes Faches nach der alphabetischen Folge des Verfassernamens. Am Schlusse ist ein Verzeichniss nach dem Orte der betreffenden Anstalt, ein zweites nach dem Namen der Verfasser angelegt, so dass das Auffinden gesuchter Programme wesentlich erleichtert ist. CANTOR.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen. Zusammengestellt von C. ROHRBACH, Dr. phil., Oberlehrer am Gymnasium Ernestinum zu Gotha. Gotha 1893. Verlag von E. F. Thienemann. 32 S.

Vierstellige Logarithmen, das scheint bis auf Weiteres die Forderung der Mittelschulpädagogik geworden zu sein. Im 38. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 69) zeigten wir solche von Herrn E. R. Müller an, die in Stuttgart gedruckt waren, heute liegen uns solche aus Gotha vor. Druck und Ausstattung dürften bei beiden Tafeln gleich gut sein, auch der Preis ist der gleiche. Als Vorzug der Rohrbach'schen Tafeln können wir hervorheben, dass am Schlusse eine graphische Darstellung der goniometrischen Functionen beigegeben ist, das heisst die Zeichnung der auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogenen Curven $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tang x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$. Die Curven wurden, wie das Vorwort mittheilt, im doppelten Maassstabe gezeichnet und photographisch reducirt. CANTOR.

Ueber das Versicherungswesen der Bergwerks-Bruderladen und ähnlicher Kasseneinrichtungen. Von Dr. E. KOBALD, ordentlichem Professor an der kaiserl. königl. Bergakademie zu Leoben. Zweiter Theil: Die Wittwen- und Waisenversicherung, mit einem Anhange über die Krankenversicherung und über das Begräbnissgeld. [Sonderabdruck aus dem Berg- und Hüttenmännischen Jahrbuch etc., XLI. Bd.] Leoben 1893. Bei Ludwig Nüssler. 48 S.

Wir haben im 38. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 70) den ersten Theil der Kobald'schen Untersuchungen besprochen. Wenn wir ihm die klare Weise nachrühmen durften, in welcher der Verfasser die zusammengesetzten Fragen, um welche es sich handelte, in ihre Bestand-

theile zu zerlegen wusste, so können wir das gleiche Lob auch der Fortsetzung ertheilen. Die Frage der Wittwenversicherung ist hier behandelt, und dabei mussten zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem der Mann, welcher als arbeitstüchtig in die Ehe trat — denn nur dann gewähren die österreichischen Bruderladen Wittwenversorgung —, als arbeitstüchtig verstorben ist oder früher invalid wurde, also selbst schon Unterstützung bezog. Die Waisenversicherung kommt nur im Titel des Heftes vor, im Texte ist von ihr so gut wie nicht die Rede. Bezüglich der anhangsweise behandelten Krankenversicherung hegen wir einiges Bedenken. Die in Tagen ausgedrückte Krankheitsdauer während eines Jahres fasst Herr Kobald als eine Function des Alters x auf und bezeichnet sie mit $K(x)$. Ist das wohl richtig? Dass die Lebensdauer von dem Alter abhängt, wird von Jedem bereitwilligst zugestanden werden. Auch die Lebensgefährlichkeit gewisser bestimmter Krankheiten dürfte Function des Alters sein. Ob aber das Gleiche von der Krankheitsdauer behauptet werden darf, scheint uns zweifelhaft.

Cantor.

Synopsis der höheren Mathematik. Von Johann G. Hagen, S. J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington, D. C., II. Band: Geometrie der algebraischen Gebilde. Berlin 1894. Verlag von Felix L. Dames. IV, 416 S.

Als wir im XXXVII. Bande (Histor.-liter. Abthlg. S. 151—152) den I. Band der Synopsis unseren Lesern empfahlen, nannten wir ihn den Anfang eines ganz grossartig angelegten Werkes. Wir dürfen bei der Anzeige des II. Bandes, der dem ersten in der fast unglaublich kurzen Zeit von nur drei Jahren nachfolgte, nicht bereuen, jenes Ausdruckes uns bedient zu haben, denn die Fortsetzung ist des Anfanges, so weit zahlreiche Stichproben zu einem Urtheile befähigen, in jeder Weise würdig. Die dreizehn Abschnitte des II. Bandes führen die Ueberschriften: I. Die Grundlagen der Geometrie. II. Die projectivische Geometrie. III. Die Coordinatensysteme. IV. Die linearen und quadratischen Liniensysteme. V. Die Ausdehnungslehre. VI. Die ebenen Curven im Allgemeinen. VII. Die ebenen Gebilde ersten und zweiten Grades. VIII. Die ebenen Curven dritten Grades. IX. Die ebenen Curven vierten Grades. X. Die Raumgebilde im Allgemeinen. XI. Die Raumgebilde ersten und zweiten Grades. XII. Die Flächen dritten Grades. XIII. Die Flächen vierten Grades. Man wird aus diesen Ueberschriften einigermassen den Umfang des behandelten Stoffes ermessen können. Herr Hagen hat auch in diesem Bande eine über nahezu alle Zeiträume der mathematischen Literatur sich erstreckende staunenswerthe Belesenheit an den Tag gelegt, und wir gestehen gern ein, dass wir bei der Durchsicht des Bandes wiederholt an Dinge erinnert wurden, welche wir in unseren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik mit Stillschweigen übergangen hatten, kleine Lücken lassend, welche bei nächster Gelegenheit

ausgefüllt werden sollen. Als der Druck des Bandes schon ziemlich weit vorgeschritten war, fand Herr Hagen einen ebenbürtigen Mitarbeiter in Herrn Franz Meyer (Clausthal), dessen Mitwirkung in der Vorrede als sehr fruchtbar gerühmt wird. Unsere eigene Kenntniss Meyer'scher Arbeiten lässt uns an das Verdientsein dieses Lobes nicht zweifeln, und bleibt diese Mitwirkung auch für den III. Band erhalten, so können wir dessen Erscheinen nur mit um so höher gespannten Hoffnungen erwarten. Ohne Herrn Hagen's grossen Verdiensten irgend zu nahe treten zu wollen, bleibt es doch immer wahr, dass bei einem Sammelwerke vier Augen noch mehr sehen als deren zwei.

CANTOR.

Berechnung von Renten und Lebensversicherungen an der Hand von Beispielen erläutert von Jos. THANNABAUR, kaiserl. königl. Oberrealschul-Professor in Olmütz. Wien 1893. Verlag von Karl Graeser. 132 S.

Zinseszinsen- und Renten-Tafeln. Von Jos. THANNABAUR. Wien 1893. Verlag von Karl Graeser. 78 S.

Wir vereinigen in dieser kurzen Anzeige zwei Bücher, welche der gleiche Verfasser zu gleicher Zeit in demselben Verlage erscheinen liess, denn wiewohl als getrennte Werke dem Verkaufe ausgesetzt, gehören sie doch eigentlich zusammen. In dem einen umfangreicheren Bändchen sind in etwas breitspuriger, leichtverständlicher Weise die verschiedenen Formeln abgeleitet, welche bei Renten und Lebensversicherungen Anwendung finden, in dem weniger starken Hefte sind Tafeln abgedruckt, die auf Grundlage jener Formeln hergestellt, auch von solchen Persönlichkeiten benutzt werden können, welche um die Begründung sich nicht kümmern können oder wollen. In dem dogmatischen wie in dem praktischen Theile ist mit gleicher Ausführlichkeit wie der gewöhnliche Fall einer Verzinsung am Ende eines Termines auch der der anticipativen Verzinsung behandelt, bei welcher der Zins zum Voraus abgezogen wird. Wir können den Zweck dieser Behandlung eines rechtmässig nicht vorkommenden Falles nicht einsehen.

CANTOR.

Annuaire du Bureau des Longitudes avec des Notices scientifiques. Paris 1893 und 1894. Gauthier-Villars et fils.

Indem wir den beiden letzten Jahrgängen des berühmten Jahresbuchs einige Worte der Anzeige widmen, dürfen und müssen wir uns darauf beschränken, die Ueberschriften der dem eigentlichen Jahrbuch angehängten wissenschaftlichen Mittheilungen zur Kenntniss zu bringen. Das Jahrbuch für 1893 enthielt: J. Janssen, Das Observatorium auf dem Mont Blanc. Cornu, Ueber die Wechselbeziehung zwischen den Erscheinungen der ruhenden und der bewegten Elektricität, und über elektrische Einheiten. Tisserand, Rede bei der Beerdigung von Ossian Bonnet. Faye,

Bouquet de la Grye, Loewy, Reden bei der Beerdigung des Admiral Mouchez. J. Janssen, Rede bei der Einweihung eines Denkmals des General Perrier. Dem Jahrbuche für 1894 sind beigegeben: Poincaré, Licht und Elektricität nach Maxwell und Hertz. Fleuriais, Ursprung und Gebrauch des sogenannten Compasses. J. Janssen, Vier Beobachtungstage auf dem Mont Blanc. Faye, Bouquet de la Grye, Fleuriais, Reden bei der Beerdigung des Admiral Pâris. Tisserand, Cornu, Mouchez, Reden bei der Einweihung des Arago-Denkmals. Cantor.

Exercises d'arithmétique. Enoncés et solutions par J. Fitz-Patrick, ancien professeur de mathématiques et Georges Chevrel, Directeur de l'institution Charlemagne à Tours. Avec une préface de M. Jules Tannery, Sous-Directeur des études scientifiques à l'école normale supérieure. Paris 1893. Librairie scientifique. A. Hermann. IX, 483 pages.

Das uns vorliegende Werk kann als Lehrbuch in Aufgabenform bezeichnet werden, indem alle 465 behandelten Aufgaben mit so ausführlichen Auflösungen versehen sind, dass kaum ein wichtiger Lehrsatz oder eine Regel der Arithmetik vermisst werden dürfte. Die 16 Kapitel, in welche die Aufgaben vertheilt sind, führen folgende Ueberschriften: 1. Einleitende Bemerkungen und Numeration; 2. Addition und Subtraction; 3. Multiplication; 4. Division; 5. Theilbarkeit der Zahlen; 6. Gemeintheiler ganzer Zahlen; 7. Primzahlen; 8. Brüche; 9. Decimalbrüche und Decimalzahlen; 10. Verhältnisse und Proportionen; 11. Zahlensysteme; 12. Quadrate und Quadratwurzeln; 13. Cuben und Cubikwurzeln; 14. Progressionen; 15. Verschiedene Aufgaben; 16. Anfangsgründe der Zahlentheorie. Als Anhang ist ein von Herrn Matrot herrührender Beweis des Satzes, dass jede ganze Zahl als Summe von höchstens vier Quadratzahlen sich darstellen lasse, abgedruckt.

Wenn ein Gelehrter von dem Range des Herrn Jules Tannery es der Mühe werth erachtet, zu einem Buche, dessen Inhalt, wie wir sehen, nicht über die Anfangsgründe sich erhebt, eine Vorrede zu schreiben, wenn er die Aufgaben selbst als insgesammt lehrreich und viele derselben als neu und geistvoll bezeichnet, so kann dieser Umstand bereits ein höchst angenehmes Vorurtheil erwecken, und bei genauerer Kenntnissnahme bildete sich uns neben dem Vorurtheile ein selbstständiges Urtheil, welches nicht minder günstig ausfiel, als das des Herrn Tannery.

Es ist ja nur natürlich, dass bei einer so grossen Menge von Aufgaben auch Irrthümer sich einschleicheu. Wenn z. B. auf S. 248—249 in Aufgabe 306 aus $n^2-4n<N<n^2-2n$ der Schluss $n-2<\sqrt{N}<n-1$ gezogen wird, so ist das entschieden falsch, wie $n=5$, $N=7$ erkennen lässt. Der sofort in die Augen springende Grund des Irrthums besteht darin, dass man aus der ursprünglichen Ungleichung zwar $N<n^2-2n+1$,

aber keineswegs $n^2 - 4n + 4 < N$ zu folgern berechtigt ist. Hätte uns die Zeit zu Gebote gestanden, sämmtliche Aufgaben zu prüfen, so wären wir vermuthlich auf mehrere solcher Flüchtigkeiten gestossen; allein sie sind weit entfernt, den Gesammteindruck zu beeinträchtigen.

Die Verfasser haben es in der That verstanden, eine Sammlung von Aufgaben zu vereinigen, deren Auswahl es gestattet, bei ihrer Auflösung eine Gesammtwiederholung aller arithmetischen Lehren, welche dem Mittelschulunterricht angehören, zu veranstalten. Jeder Lehrer, auch in Deutschland, wird von der Sammlung erwünschten Gebrauch machen können. Er darf nicht fürchten, Allzuleichtes und Alltägliches zu finden, im Gegentheil! Manche Aufgaben machen an den Scharfsinn dessen, der sie lösen soll, recht bedeutende Ansprüche, und alle, die wir wenigstens näher ansahen, sind interessant genug, zur Anstrengung des Scharfsinnes zu reizen.

Cantor.

Recréations mathématiques par M. Edouard Lucas. Tome III. Paris 1893. Gauthier-Villars et fils. 200 pag. Tome IV. Paris 1894. 266 pag.

Der II. Theil der mathematischen Erholungen ist 1883 erschienen und im 29. Bande dieser Zeitschrift angezeigt. Ermuntert durch den Beifall, mit welchem die beiden Theile aufgenommen worden waren, sammelte Lucas den Inhalt eines III. und IV. Theiles, als 1891 ein vorzeitiger Tod ihn wegraffte. Engbefreundeten Fachgenossen, den Herren H. Delannoy, C. A. Laisant, E. Lemoine wurde von der französischen mathematischen Gesellschaft der Auftrag, das von Lucas Vorbereitete der Oeffentlichkeit zu übergeben, und sie haben ihre Aufgabe pflichtgetreu erfüllt. Volle Gleichförmigkeit der behandelten Gegenstände darf man in den beiden neuen Theilen so wenig suchen, als in den beiden früheren. Der Hauptsache nach hat Lucas allerdings Verstandesspiele untersucht, in welchen mit Combinatorik verbundene Zahlentheorie die Auflösung systematisch finden lässt, aber er hat sich das Uebergreifen auf andere mathematische Dinge nicht versagt.

Im III. Theile haben die Herausgeber zu den beiden ersten Erholungen (1. Le calcul digital; 2. Machines arithmétiques) volksthümliche Vorlesungen benutzt, welche Lucas 1885 in Paris, 1884 in Blois hielt. Wir haben selten oder nie einen gleich ernsten, um nicht zu sagen trockenen Gegenstand mit mehr Witz und sprudelndem Humore erörtert gesehen. Die fünf anderen Erholungen des Bändchens beziehen sich alle auf Spiele, welche bald mit dem Taquin, bald mit dem Mühlspiel, bald mit dem Bacarat verwandt sind.

Die acht Erholungen des IV. Theiles sind dem ewigen Kalender, der Kugelarithmetik, der Stäbchenarithmetik, dem Mühlspiel, den Zauberquadraten Fermat's, den Gittern, dem Vierfarbensatze geographischer Karten, der Gehmaschine gewidmet. Die erste Erholung gehört also der Chronologie, die sechste und siebente der Geometrie der Lage, die achte (es

handelt sich um eine Gelenkvorrichtung) der Mechanik an. Aber Lucas war seiner Begabung nach vorzugsweise Zahlentheoretiker, und so hat er auch in den nicht arithmetischen Erholungen Anknüpfungen an zahlentheoretische Aufgaben gefunden. Man würde ihm freilich Unrecht thun, wenn man nicht hervorhöbe, dass er auch umgekehrt in die arithmetischen Erholungen Geometrisches hineinzuflechten wusste. Der Geschichtsforscher vermöchte allerdings in beiden Theilen Stoff zur Bemängelung ohne grosse Schwierigkeit aufzufinden, aber diese kleinen Unrichtigkeiten muss man eben in den Kauf nehmen.

Der alte Dichter wollte durch erregtes Lachen auf die Sitten wirken, *ridendo castigat mores.* Lucas wollte einen Leserkreis, der ernstem Nachdenken nicht viel Geschmack entgegenbringt, dadurch für die Zahlentheorie gewinnen, dass er deren Anwendbarkeit auf Spiele u. s. w. in anmuthiger Weise zeigte. Er hat dadurch die mathematische Literatur um vier reizende Bändchen bereichert.

CANTOR.

SOPHUS LIE, **Vorlesungen über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen.** Bearbeitet und herausgegeben von GEORG SCHEFFERS. Leipzig 1883. B. G. Teubner. XII u. 810 S.

Den „Vorlesungen von S. Lie über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen“, Leipzig 1891 — vergl. diese Zeitschrift Bd. 38 S. 95 und 185 — hat der Herausgeber nach Ablauf von zwei Jahren einen weiteren, noch umfangreicheren Band folgen lassen. Ganz unabhängig von dem ersten soll derselbe eine Einleitung in die Lie'sche Theorie überhaupt sein und dadurch das Studium des bekannten grossen Werkes von Lie-Engel vorbereiten (vergl. die Besprechungen desselben in dieser Zeitschrift Bd. 34 S. 171, Bd. 39 S. 95, Bd. 40 S. 14). Die Lie'sche Lehre nimmt heutzutage eine eigenthümliche Stellung ein; einer Schaar von begeisterten Anhängern steht eine nicht geringe Partei Solcher gegenüber, die sich sceptisch und abwartend verhalten, und die von derjenigen Tragfähigkeit und Fruchtbarkeit, die Herr Lie selber seinem Systeme zuschreibt, nicht ohne Weiteres überzeugt sind.

Diese „Indifferenten“ gehen wohl noch weiter und glauben, dass das rapide Anschwellen der Lehrbuchliteratur über eben diesen Gegenstand der Förderung der Theorie eher schädlich als nützlich sei.

Selbst Referent kann sich der Meinung nicht ganz verschliessen, dass eine knappe Zusammenfassung des von Lie und seinen Anhängern auf dem Gebiete der Transformationsgruppen Geleisteten eher am Platze sein möchte.

Der ganzen Anlage nach ist der vorliegende Band, wie auch der vorangegangene, in erster Linie für einen Studirenden in mittleren Semestern bestimmt. Der Text wird durch zweckmässige Beispiele, wo es angeht,

leichter verständlich gemacht, und es wird eine behagliche Breite in der Darstellung beliebt.

Was die Vorkenntnisse des Lesers angeht, so ist Eines auffällig; während eine tüchtige Vorbildung in der Analysis, einschliesslich der formalen Theorie der Differentialgleichungen beansprucht wird, hält es der Herausgeber für nöthig, die einfachsten Begriffe und Sätze aus der projectiven Geometrie der Ebene ausführlich darzulegen.

Da der Hauptinhalt des Buches dem — vom Referenten bereits auf das Eingehendste besprochenen — dritten Bande des Lie-Engel'schen Werkes gemeinsam ist, so wird es genügen, auf Einiges aufmerksam zu machen, was bei Scheffers charakteristisch hervortritt.

Das Ganze lässt sich in drei Hauptabschnitte eintheilen. Der erste behandelt die verschiedenen Typen von projectiven Gruppen der Ebene, sowie darüber hinaus die der endlichen continuirlichen Gruppen in zwei Variabeln. Im zweiten Abschnitte werden die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie in n Variabeln erörtert, woran sich Untersuchungen über Zusammensetzung von Gruppen anschliessen.

Der letzte Abschnitt bringt eine Auswahl von sehr verschiedenartigen, unter einander kaum im Zusammenhange stehenden Anwendungen.

Was die projectiven Transformationen der Ebene angeht, so lassen sich dieselben, wie schon Möbius im Wesentlichen erkannte, als diejenigen Punkt-Transformationen definiren, welche Gerade stets wieder in Gerade überführen.

Von den zwei hierfür erbrachten Beweisen ist insbesondere der zweite, rein analytische von Interesse und zugleich für den Charakter des Buches bezeichnend.

Die Geraden der Ebene sind nämlich die Integralcurven der Differentialgleichung $y''=0$. Soll also eine Punkt-Transformation

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y)$$

jede Gerade wieder in eine solche überführen, so muss die Gleichung $y''_1 = 0$ vermöge $y''=0$ identisch befriedigt werden.

Drückt man y''_1 durch y', y'' und durch die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von φ und ψ nach x und y aus, so führt die gestellte Forderung auf vier partielle Differentialgleichungen, durch deren directe Integration Herr Scheffers in der That darauf geführt wird, dass φ und ψ linear gebrochene Functionen von x und y mit demselben Nenner sein müssen.

Die linken Seiten jener Gleichungen bleiben bei Ausübung einer allgemeinen projectiven Transformation bis auf Factoren ungeändert, das heisst, sie sind „Differentialinvarianten" der allgemeinen projectiven Gruppe, jedoch — was nicht erwähnt wird — in dem Sinne, dass x und y als unabhängige Veränderliche fungiren, während bei den sonst im Werke vor-

kommenden Differentialinvarianten stets y als die unabhängige, x als die abhängige Veränderliche anzusehen ist.

Eine noch verwickeltere Analyse erfordert die rechnerische Verification des begrifflich so einfach einzusehenden Satzes, dass die aus einer projectiven infinitesimalen Transformation erzeugte eingliedrige Gruppe aus lauter projectiven Transformationen besteht. Für die neun Coefficienten jener Gruppe wird ein System von ebenso vielen linearen homogenen Differentialgleichungen aufgestellt, deren Lösungen sie sind.

Auf ein ähnliches, nur einfacheres Ergebniss wird man geführt, wenn man sich von vornherein auf die „allgemeine lineare" Gruppe G_1 beschränkt; man gelangt nämlich hier zur Aufgabe der Integration eines „d'Alembert'schen" Systems:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

mit constanten Coefficienten.

Rechnet man je zwei eingliedrige „lineare" Gruppen zu demselben Typus, wenn sie vermöge einer „linearen" Transformation in einander überführbar sind, so ergiebt eine Discussion, dass gerade acht solcher Typen existiren.

Es ist nun instructiv zu sehen, wie die d'Alembert'sche Integrationsmethode des obigen Systems (bei Berücksichtigung aller Ausnahmefälle) geradezu äquivalent ist mit der Zurückführung jener acht eingliedrigen Gruppen auf einfache canonische Formen.

Bei Gelegenheit der wichtigen Aufgabe, die endlichen Gleichungen einer beliebigen r-gliedrigen Gruppe bei Kenntniss ihrer r infinitesimalen Transformationen und deren eingliedrigen Gruppen zu construiren, wird ein von Lie und Maurer zugleich gefundenes praktisches Princip in Anwendung gebracht, das einfach darin besteht, jene r eingliedrigen Gruppen hintereinander auszuüben.

An den Beweis des Hauptsatzes, dass r unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1, \ldots U_r$ dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, wenn sich jeder Klammerausdruck $(U_i U_k)$ linear aus den U zusammensetzt, knüpft sich in ungezwungener Weise die wichtige Theorie der Differentialinvarianten an, das sind aus x, y, y', $y''\ldots$ gebildete Ausdrücke, die der Gruppe gegenüber absolut invariant sind.

Alle Differentialinvarianten der Gruppe sind aus zweien ableitbar, die als Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen erscheinen.

So elegant und allgemein diese Methode als rein theoretische ist, so ist sie doch in praxi kaum verwendbar: man wird da vielmehr von den endlichen Gleichungen der Gruppe ausgehen.

Bei Aufstellung der verschiedenen Typen projectiver Gruppen der Ebene erweist sich die Einführung des Dualitätsbegriffes als unumgänglich.

Hier scheint es dem Referenten, als ob ein zu weit getriebenes Streben nach Allgemeinheit eine an sich einfache Sache schwierig machen könne. Erst wird ein Kriterium dafür aufgestellt, dass eine Curvenschaar eine Gruppe gestattet, und dieses dann auf den ganz speciellen Fall angewandt, dass die ∞^2 Schaar der Geraden in der Ebene vermöge einer projectiven Gruppe in sich übergeht.

Als Endergebniss tritt der bekannte elementare Satz auf, dass die Gesammtheit aller Projectivitäten und Dualitäten wiederum eine Gruppe constituirt.

Wir müssen uns beeilen, noch Einiges über die „Anwendungen" des dritten Abschnittes mitzutheilen.

Für den Geometer von besonderem Interesse ist die Frage, wie man am Einfachsten theoretisch entscheiden kann, ob zwei Curven oder Flächen congruent, das ist, durch Bewegung in einander überführbar oder auch, ob sie vermöge der Gruppe der Bewegungen mit einander äquivalent sind.

Es ist von vornherein klar, dass die Aufgabe nur dann eine befriedigende Lösung finden wird, wenn sich das gemeinte Kriterium nur solcher mathematischer Bildungen bedient, die der Bewegungsgruppe gegenüber invariant sind, und das werden hier nur Differentialinvarianten sein können.

In der That ergiebt sich für ebene Curven, dass sie im Allgemeinen congruent sind, wenn die Ableitung $\frac{dr}{ds}$ des Krümmungsradius nach der Bogenlänge bei beiden Curven dieselbe Function von r ist; bei Raumcurven tritt noch die Torsion hinzu. Aehnliches gilt für Flächen, wo übrigens nur die Grundlagen gegeben werden.

Das Bemerkenswerthe sind aber gerade die Ausnahmefälle, wenn nämlich eine der Differentialinvarianten ihre Bedeutung verliert, das heisst, einen constanten Werth annimmt.

Beschränken wir uns auf die Ebene, so kommt, abgesehen von den trivialen Fällen der Kreise und (allgemeinen) Geraden, nur der Fall der „Minimalgeraden" $y \pm ix = const$ in Betracht.

Hier tritt die merkwürdige Erscheinung ein, dass die Geraden jeder dieser beiden Schaaren nur unter sich congruent sind, dass man also nicht schlechthin sagen darf, dass zwei Gerade stets miteinander congruent sind.

Im Raume spielen die „Minimalcurven" eine ähnliche Rolle. Wenn übrigens im Texte behauptet wird, dass nicht nur die Lösung des Problems, sondern selbst die Formulirung desselben ganz neu seien, so dürfte das wenigstens hinsichtlich der ebenen Curven nicht zutreffend sein, denn, abgesehen von den Ausnahmefällen, findet man das oben angegebene Kriterium in etwas anderer Fassung z. B. bei Hoppe.

Referent möchte ferner noch hinzufügen, dass er durch Prof. F. Klein auf dem Chicagoer Congress 1893 eine Tafel der Differentialinvarianten aller projectiven Gruppen der Ebene hat vorlegen lassen, womit das Material

gewonnen ist, um ein analoges Aequivalenzkriterium für alle jene Gruppen aufzustellen.

Eine für die Arithmetiker interessante Anwendung findet die Gruppentheorie auf die sogenannten höheren complexen Zahlensysteme. Es handelt sich um die Frage, welche Arten von Multiplication bei complexen Zahlen von der Form $x = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots + e_n x_n$ (wo die e_i Einheiten, die x_i gewöhnliche Zahlen bedeuten) noch möglich sind, wenn ausser dem distributiven und associativen Gesetze (nicht aber dem commutativen) nur noch verlangt wird, dass die Division ausführbar ist.

Wesentlich als Folge des associativen Gesetzes stellt die Multiplication $z = xy$ eine erste oder eine zweite Gruppe dar, je nachdem man die x_i resp. die y_i als die ursprünglichen Veränderlichen, dabei die y_i resp. die x_i als die Parameter und beide Mal die z_i als die neuen Veränderlichen auffasst.

Vermöge ihrer Bildungsweise kommen diesen Gruppen besonders einfache Eigenschaften zu.

Auf Grund dieses Ansatzes lässt sich die Aufgabe, für einen gegebenen Werth von n alle Typen von Zahlensystemen zu ermitteln, auf rein gruppentheoretische Principien zurückführen und bis incl. $n = 5$ explicite ausrechnen.

Ausser einem ausführlichen Referat über die älteren Untersuchungen solcher Zahlensysteme wird besonders auf die neueren Arbeiten von Study und vom Herausgeber eingegangen; die nicht unwichtige Abhandlung von Molien ist etwas kurz weggekommen.

Als eine weitere Anwendung sei noch das Kapitel über binäre Invariantentheorie hervorgehoben: wenn auch die Ergebnisse nicht eigentlich neu sind, so ist es doch lehrreich zu sehen, wie sich die üblichen Operationen in diesem Gebiete in die Kategorien der Gruppentheorie einreihen.

Der einschlägigen Arbeiten von Study (vergl. besonders seine „Ternären Formen") wird nicht gedacht; auch der historische Bericht des Referenten von 1892 ist einer Erwähnung nicht für würdig erachtet worden, trotzdem daselbst der ganze Stoff — durchaus nicht zur Zufriedenheit der specifischen Vertreter der Invarianten-Disciplin — nach gruppentheoretischen Massnahmen gegliedert ist.

W. Franz Meyer.

E. Goursat. **Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.** Bearbeitet von C. Bourlet. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Mit einem Begleitwort von S. Lie. Leipzig 1893. B. G. Teubner. VIII und 416 S.

Da den im Jahre 1891 erschienenen Original-Vorlesungen von Goursat in dieser Zeitschrift keine Besprechung zu Theil geworden ist, so möge eine solche aus Anlass der vorliegenden deutschen Uebersetzung nachgeholt werden.

An sich zwar scheint dem Referenten eine derartige Uebersetzung um so weniger ein dringendes Bedürfniss zu sein, als sich gerade das französische Idiom zur exacten und dabei doch eleganten Darstellung schwieriger mathematischer Entwickelungen besonders eignet: man möchte aus diesem Grunde eher umgekehrt wünschen, dass manche deutsche Lehrbücher ins Französische übersetzt würden.

Doch wollen wir hier mit dem Uebersetzer nicht weiter rechten, insofern seine Leistung eine gute ist, und er den anerkannten Werth des Originals durch Anfügung einer Anzahl instructiver Aufgaben und deren Lösung erhöht hat.

Das Buch verfolgt hauptsächlich den Zweck, der formellen Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie sie in neuerer Zeit durch A. Mayer und namentlich durch Lie geschaffen ist, weiteren Eingang zu verschaffen.

In der That bildet das Buch eine werthvolle Ergänzung zu dem zweiten Bande des Lie-Engel'schen Werkes über Transformationsgruppen, insofern die partiellen Differentialgleichungen dort nur eine secundäre Rolle spielen und der Leser von der Anwendung der Berührungs-Transformationen auf dieselben keine deutliche Vorstellung erhält (vergl. diese Zeitschrift Bd. 39 S. 95).

Herr Goursat beginnt mit einer functionentheoretischen Einleitung, nämlich mit dem vereinfachten Kowalewsky'schen Beweise für die Existenz von Integralen eines Systems von m partiellen Differentialgleichungen für m Functionen von n Variabeln; unter gewissen Entwickelbarkeitsbedingungen für die Coefficienten hat in der That, wie schon Cauchy behauptet hatte, ein solches System in der Umgebung gewisser Anfangswerthe ein und nur ein System von Lösungen, die man dann weiterhin dem Princip der analytischen Fortsetzung unterwerfen kann.

Den „Integralen" dieses „Existenzsatzes" kommt die charakteristische Eigenschaft zu, dass in der Nachbarschaft eines solchen stets unendlich viele Integrale des gegebenen Gleichungssystems existiren; ausser diesen kann es aber noch sogenannte „singuläre" Integrale geben, deren Möglichkeit auf verschiedene Weisen dargethan wird.

Die Hauptaufgabe, welche die partiellen Differentialgleichungen hier darbieten, besteht in der Zurückführung ihrer Integration auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, eine Aufgabe, welche für die Gleichungen erster Ordnung völlig gelöst ist.

Es werden zunächst die linearen Gleichungen in Angriff genommen. Dieselben werden durch den Klammerprocess beherrscht. Bekanntlich versteht man, wenn zwei lineare homogene partielle Gleichungen $X_i(f)=0$, $X_k(f)=0$ vorliegen, unter dem „Klammerausdruck" $(X_i X_k)$ die ebenfalls lineare und homogene Bildung

$$X_i\{X_k(f)\}-X_k\{X_i(f)\}.$$

Ein System von m solcher Gleichungen $X_i = 0$ heisst ein „vollständiges“, wenn jeder der Klammerausdrücke $(X_i X_k)$ eine lineare Function der X_i ist: ist ein System von $q < m$ Gleichungen kein vollständiges, so lässt es sich doch durch Aufnahme neuer, mittelst Klammeroperation zu bildender Gleichungen zu einem vollständigen Systeme ergänzen. Man darf sich also von vornherein auf letztere beschränken.

Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist eine zweifach invariante — ganz wie bei den Combinanten der projectiven Invariantentheorie — einmal der Gruppe aller Transformationen der unabhängigen Veränderlichen x gegenüber, sodann aber auch gegenüber der Gruppe aller linearen Transformationen der X (mit Coefficienten, die im Allgemeinen noch von den x abhängen).

Wegen der letzteren Eigenschaft darf man sich ein vollständiges System von m Gleichungen nach m der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i = 1, 2, \ldots m)$ aufgelöst und hinterher wieder Alles auf die linke Seite geschafft denken; in dieser canonischen Form heisst das System ein „Jacobi'sches“ und lässt sich auch dadurch charakterisiren, dass alle $(X_i X_k)$ identisch verschwinden.

Für ein Jacobi'sches System — und damit zugleich für jedes vollständige System — von m Gleichungen mit $m + n$ Veränderlichen x lässt sich der Hauptsatz nachweisen, dass es n verschiedene Integrale $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ besitzt.

Um dieselben zu finden, hat A. Mayer ein besonders einfaches und zugleich elegantes Verfahren eingeschlagen.

Vermöge einer geeigneten Transformation der m ersten x wird die Aufsuchung der φ zurückgeführt auf die von n Integralen einer einzigen linearen Gleichung, und diese Aufgabe reducirt sich wiederum nach bekannter Methode auf die Integration von n gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form:

$$1) \qquad dy_i = A_i dx_{m+i} (i = 1, 2 \ldots n),$$

wo die A_i (ausser den x) noch $m - 1$ Grössen $y_2 \ldots y_m$ als Parameter mit sich führen. Noch mehr, schon die Kenntniss eines ersten Integrales von 1) führt zu der eines ersten Integrales des gegebenen Systems.

Nennt man eben diese Ermittelung eines ersten Integrales von n Gleichungen 1) — und damit ist bereits der Fundamental-Process gewonnen, der die ganze Theorie durchzieht — eine „Operation von der Ordnung n“, so hat man danach successive je eine Operation der Ordnungen $n, n-1, \ldots 1$ auszuführen, um die ursprüngliche Aufgabe zu erledigen.

Die eben gestreifte Reciprocität zwischen der Integration einer einzelnen linearen partiellen Gleichung und der eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen kann auf ein vollständiges System aus-

gedehnt werden, nur dass das gewöhnliche System die Bedingung erfüllen muss, „vollständig integrirbar“ zu sein, das ist, dass die Anfangswerthe sämmtlicher Variabeln willkürlich angenommen werden dürfen. Ist dann $f=c$ ein Integral dieses Systems, so ist auch f ein Integral des vollständigen Systems und umgekehrt.

Nunmehr wendet sich der Verfasser zu beliebigen partiellen Gleichungen erster Ordnung. Nach Lagrange werden drei Kategorien von Integralen eingeführt, das „vollständige“, das „allgemeine“, und das „singuläre“ und gezeigt, wie zwischen den beiden ersten ein wesentlicher Unterschied nicht besteht.

Lagrange gab im Falle von drei Variabeln x, y, z eine, später von Charpit vervollkommnete Methode an, um eine beliebige partielle Gleichung erster Ordnung auf eine lineare zurückzuführen.

Die entsprechende Erweiterung auf den Fall von n Variabeln gelang erst viel später Jacobi, dessen Verfahren von Mayer vervollkommnet wurde.

Die erste allgemeine und zugleich directe Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung war aber inzwischen von Pfaff gegeben worden.

Indem er das Problem als besondern Fall eines allgemeineren erkannte, führte er die Lösung des letzteren auf die vollständige Integration mehrerer Systeme von simultanen Differentialgleichungen von der Ordnung $1, 3, \ldots 2n-3, 2n-1$ zurück.

Unabhängig davon hat bald darauf Cauchy eine weit einfachere Methode angegeben, die mit dem ersten der Pfaff'schen Systeme allein auskommt.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Klammerausdrücke gelangte Jacobi, wiederum ohne Cauchy zu kennen, zu einer Integrationsmethode, die im Grunde mit der Cauchy'schen identisch ist.

Endlich rührt von Lie eine Methode her, die gewissermassen die Zusammenfassung der übrigen ist, die aber zugleich vermöge einer naturgemässen Erweiterung des Integralbegriffs dahin ausgedehnt werden kann, dass sie zugleich alle Ausnahmefälle mit umfasst.

Bei Cauchy steht der Begriff der „Charakteristik“ im Mittelpunkte des Ganzen, und hieraus ist wiederum die Lie'sche Theorie erwachsen.

Um hiervon eine Vorstellung zu geben, beschränken wir uns auf drei Variable x, y, z und benützen geometrische Redeweise. Sei

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

dann heisse „Element“ die aus einem Punkte (x, y, z) und einer durch ihn gehenden Ebene mit den Richtungscoefficienten p, q gebildete Figur.

Eine partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q)=0$ ordnet dann jedem Elemente von $F=0$ eine bestimmte Curve, eben die Charakteristik zu, die dieses Element berührt.

Diese Curven hängen von drei willkürlichen Parametern ab, das ist, sie bilden einen Curvencomplex, und jede Integralfläche von $F = 0$ wird durch die nach einem bestimmten Gesetze einander associirten Curven dieses Complexes erzeugt.

Die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die Bestimmung ihrer Charakteristiken sind zwei äquivalente Probleme.

Während nun Jacobi und Mayer die Integration einer (oder mehrerer) partiellen Differentialgleichung auf die eines „Involutionssystems" (die Verallgemeinerung eines Jacobi'schen Systems) und diese wieder auf die eines Jacobi'schen Systems zurückführen, gelingt Lie mittelst der Charakteristiken der Nachweis, dass die Integration eines solchen Involutionssystems zurückkommt auf die einer einzigen linearen partiellen Differentialgleichung mit einer grösseren Anzahl von Variabeln.

Die bereits angedeutete Verallgemeinerung von Lie, durch welche die ganze Theorie einen gewissen Abschluss erfahren hat, vollzieht sich auf Grund des Begriffes „Element".

Als „Integral" einer Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ ist danach jedes doppelt unendliche System von Elementen zu verstehen, welches neben $F = 0$ der Relation $dz = p dx + q dy$ genügt. Es kommen daher nicht nur Integralflächen, wie früher, sondern auch Integralcurven und Integralpunkte in Betracht.

Da andererseits auch (vergl. das bez. Referat) die Lie'sche Theorie der Berührungs-Transformationen aus dem Begriffe des Elementes hervorgegangen ist, so lässt sich erwarten, dass eben die Berührungs-Transformationen dazu dienen werden, die partiellen Differentialgleichungen auf einfache canonische Formen zu bringen.

Dies ist in der That der Fall, und zwar auf Grund des fundamentalen Satzes, dass der verallgemeinerte Klammerausdruck einer Berührungs-Transformation gegenüber invariant bleibt, und zwar auch dann noch, wenn weder die partiellen Differentialgleichungen, noch die angewandten Berührungs-Transformationen die abhängige Variable enthalten.

Referent hat geglaubt, dass diese Skizzirung einiger Hauptmomente dem Leser mehr nützt als eine Kritik im Einzelnen, die sich bei der Vortrefflichkeit des Werkes doch nur auf unwesentlichere Punkte richten könnte.

Bei der knappen Darstellung ist es wohl nicht zu verwundern, wenn der Leser hier und da nach Abschluss einer Entwickelung (z. B. S. 103) nicht ohne Weiteres erkennt, inwiefern damit die ursprünglich gestellte Aufgabe gelöst ist.

Eines glaubt Referent, namentlich im Interesse der Physiker, bedauern zu müssen, dass mit einer einzigen Ausnahme (S. 135—136) jede Anwendung der vorgetragenen Methoden auf die partiellen Differentialgleichungen der Mechanik unterdrückt worden ist. W. Franz Meyer.

Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Elementare Darstellung der durch Möbius, Gauss und Bessel begründeten Theorie. Von C. Neumann. Mit Figuren im Text. Zweite Auflage. Leipzig 1893. Verlag von B. G. Teubner. 42 S.

Die vorliegende Auflage besteht aus einem Neudruck des im Jahre 1866 zum ersten Mal erschienenen Werkes; nur in dem Vorwort sind einige historische Irrthümer ausgemerzt worden. Nach einer kurzen Einleitung, welche das allgemeine, der Lösung zu unterziehende Problem behandelt, folgt das erste Kapitel, das nur dem Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche gewidmet ist. Nachdem zu dem auffallenden Strahl der gebrochene sammt den beiden Brennpunkten gefunden ist, wird die Construction des gebrochenen Strahls erläutert, woran sich die conjugirten Punkte und Ebenen anschliessen. In dem zweiten Kapitel, das den Durchgang des Lichtes durch beliebig viele brechende Flächen verfolgt, wird man mit der Wichtigkeit der Haupt-, Brenn- und Knotenpunkte und deren experimentellen Bestimmung vertraut gemacht. Das Werkchen soll allen angehenden Optikern aufs Wärmste empfohlen werden, zumal ausser Trigonometrie keine höheren Anforderungen in Bezug auf Mathematik gestellt werden.

B. Nebel.

Die Brechung des Lichtes einer Ebene. Wissenschaftliche Beilage zum siebenten Jahresbericht über die Margarethenschule zu Berlin von Hermann Hahn. Berlin 1893. R. Gärtner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 10 S.

Der wesentliche Inhalt der kleinen Schrift giebt einen Vortrag wieder, welchen der Verfasser schon im Januar 1889 in dem Verein zur Förderung des physikalischen Unterrichts in Berlin gehalten hat. Die Brechung des Lichtes in einer Ebene wird auf rein geometrische Weise, die mit der sogenannten neueren Geometrie verwandt ist, durchgeführt im Gegensatz zu den analytischen Methoden.

B. Nebel,

Das Nivelliren. Von Franz Lorber. Mit 97 in den Text gedruckten Figuren. Zugleich neunte neu bearbeitete Auflage der theoretischen und praktischen Anleitung zum Nivelliren von S. Stampfer. Wien 1894. Verlag von Carl Gerold's Sohn. 608 S. Preis: gebunden 15 Mk.

Die vorliegende Auflage weist gegenüber den früheren wesentliche Erweiterungen bezw. Umarbeitungen auf. Eingeschaltet sind die drei Abschnitte, welche sich auf die Genauigkeit und Ausgleichung der Nivellements, auf das Präcisions-Nivellement in der österreichisch-ungarischen Monarchie und auf den Einfluss der Aenderungen der Schwere auf Nivellements beziehen. Eine Vermehrung wurde dem Abschnitt über die optischen Bestandtheile der Nivellir-Instrumente zu Theil, an welcher Professor

Dr. Kobald einen hervorragenden Antheil hat. Die Darstellung ist so eingehend, dass Jeder, der mit der Geometrie bekannt ist, das Buch mit Leichtigkeit lesen kann; dazu kommen noch die vielen praktischen Winke und die Tabellen und Formeln im Anhang, so dass der junge Geometer in diesem Werke einen treuen Berather findet. Die Verlagsbuchhandlung hat sich ein grosses Verdienst erworben, indem sie für einen sehr schönen Druck und für gute Figuren besorgt war.

B. Nebel.

A Treatise on the Kinetic Theory of Gases by Henry William Watson. Second Edition. Oxford 1893. At the Clarendon Press. 87 p.

Der Umfang dieser zweiten Auflage ist derselbe, wie der der ersten, wohl aber ist ein besonderer Werth auf die Behandlung des Stoffes gelegt worden, damit der Anfänger von dem Vorgetragenen vollständig überzeugt ist. Im Wesentlichen folgt der Verfasser den Methoden Boltzmann's mit gewissen Einschränkungen, so namentlich bezüglich des Begriffes des Molecul. Wir theilen den Wunsch des Verfassers, dass durch die einheitliche, leichtfassliche Darstellung der grundlegenden Untersuchungen auf dem Gebiete der kinetischen Gastheorie neue jugendliche Arbeitskräfte für den Weiterbau dieses Zweiges der mathematischen Physik gewonnen werden möchten.

B. Nebel.

An elementary treatise on theoretical mechanics by Alexander Ziwet. Part I: Kinematics — 181 p.; Part II: Introduction to dynamics; statics — 183 p. New-York 1893. Macmillian and Co. and London.

Nach des Verfassers Urtheil bestehe unter den zahllosen Werken der theoretischen Mechanik, die in Deutschland, Frankreich und England vorhanden sind, keines, welches den amerikanischen Studienverhältnissen angepasst sei, wo das Studium der Mechanik erst aufgenommen wird, nachdem der Studirende sich die Elemente der höheren Mathematik angeeignet hat. Das ganze Werk soll drei Bände von nahezu gleicher Stärke umfassen, wovon die beiden ersten erschienen sind. Der erste Band umfasst die Kinematik, während der zweite zunächst die Einführung in die Dynamik im Allgemeinen zum Gegenstand hat und sodann die Statik behandelt. Der dritte Band, welcher im Laufe des Jahres 1894 erscheinen soll, sei der Kinematik gewidmet. Obwohl das Werk in erster Linie als eine Einführung in die theoretische Mechanik als solche anzusehen ist, so war der Verfasser doch bestrebt, den Bedürfnissen der künftigen Ingenieure Rechnung zu tragen, indem er die allgemeinen Theorien durch besondere Probleme und Beispiele nutzbar verwendet hat, mit deren Lösung sich der Studirende befassen soll. Um die vorgesetzten Grenzen nicht zu überschreiten, hat der Verfasser auf die schwierigeren Gebiete der Mechanik von vornherein verzichtet, hat aber doch eine Reihe von Kapiteln aufgenommen, die bei

dem ersten Studium überschlagen werden können. Im Anhang finden sich die Lösungen der im Text eingestreuten Aufgaben. Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Geometrie der Bewegung, während erst in dem überwiegend grösseren zweiten Kapitel die eigentliche Kinematik zur Geltung kommt, also diejenigen geometrischen Bewegungserscheinungen, bei welchen durch die Einführung der Zeit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auftreten. Während in Deutschland die Mechanik gewöhnlich in Statik und Dynamik eingetheilt wird, bezeichnet der Verfasser die Lehre von den Kräften mit Dynamik und theilt diese in Statik und Kinetik ein. Ein Hauptgewicht legt der Verfasser auf die geometrischen Methoden und graphischen Constructionen, weil dieselben für diesen Gegenstand am besten geeignet sind.

B. Nebel.

Bibliographie

vom 1. December 1894 bis 28. Februar 1895.

Periodische Schriften.

Verhandlungen der deutschen Naturforscher und Aerzte. 66. Versammlung in Wien, 24. bis 28. September 1894. I. Theil. Die allgemeinen Sitzungen. Leipzig, Vogel. 4 Mk.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 3. Bd. 1892 bis 1893. Berlin, G. Reimer. 16 Mk.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1894, II. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie. Mathematische Classe. 1894, 2. und 3. Heft. München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.

Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 18. Bd. München, Franz. 10 Mk.

—— im Jahre 1893. 49. Jahrgang. I. Abthlg. Physik der Materie; von R. Börnstein. Ebendaselbst. 20 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Wiener Akademie. Mathem.-naturw. Classe. Abthlg. IIa. 6. und 7. Heft. Wien, Tempsky. 7 Mk. 90 Pf.

Astronomisches Jahrbuch für 1897. Herausgegeben von der Berliner Sternwarte unter Leitung von F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Katalog der astronomischen Gesellschaft. I. Abthlg. Sterne bis zur neunten Grösse zwischen 80° nördl. und 2° südl. Declin. für d. Aequin. 1875. Leipzig, Engelmann. 33 Mk.

Astronomischer Kalender für Wien 1895. Neue Folge. 14. Jahrg. Wien, Gerold's Sohn. 2 Mk.

Deutsche Meeresuntersuchungen. Herausgegeben im Auftr. d. königl. preuss. Ministerien. Neue Folge. 1. Bd. 1. Heft. Kiel, Lipsius & Tischer. 30 Mk.

Annalen d. Physik und Chemie. Herausgegeben v. G. u. E. Wiedemann. Neue Folge. 53. Bd. 5. Heft, oder Jahrg. 1894, 13. Heft. Leipzig, Barth. 5 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1888. Dargestellt von d. physikal. Gesellschaft in Berlin. 44. Jahrgang. 3. Abthlg. Physik der Erde; von R. Assmann. Braunschweig, Vieweg. 30 Mk.

Meteorolog. Jahrbuch der Wetterwarte der Magdeburger Zeitung. Jahrg. 1893. Herausgegeben von W. Grützmacher. Magdeburg, Faber. 6 Mk.

Zeitschrift f. physikal. Chemie. 15. Bd. 1.—3. Heft. Leipzig, Engelmann. 11 Mk.

Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien. 3. Bd. Herausgegeben von L. de Ball. Wien, W. Frick. 20 Mk.

Beobachtungen des astron.-physik. Observatoriums in O Gyalla. Bd. XV und XVI aus den Jahren 1892 und 1893. Herausgegeben von N. v. Konkoly. Halle a. S., Schmidt. 10 Mk.

Annalen des physik. Centralobservatoriums in Petersburg. Jahrgang 1893, I. Herausgegeben von H. Wild. Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.

Bulletin de l'académie des sc. de St. Petersbourg. 5. série, tome I, No. 1 et 2. Leipzig, Voss. 5 Mk.

Mémoires de l'académie de St. Petersbourg. VII. série, tome 42, No. 7—11. Ebendaselbst. 45 Mk.

Reine Mathematik.

Lie, S., Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen. (Aus den Abhandl. d. königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch.) Leipzig, Hirzel. 5 Mk.

Schlesinger, L., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bände. Leipzig, B. G. Teubner. 16 Mk.

Weber, H., Lehrbuch der Algebra. 1. Theil. Braunschweig, Vieweg. 16 Mk.

Muth, P., Die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. Mit Begleitwort von M. Pasch. Leipzig, B. G. Teubner. 3 Mk.

Zermelo, E., Untersuchungen zur Variationsrechnung (Dissertation). Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk. 50 Pf.

Cwojdzinski, T., Anwendung der Fuchs'schen Theorie auf die Gauss'sche hypergeometrische Reihe. Brody, West. 1 Mk.

Groissl, J., Die Absolutorial-Aufgaben aus d. Mathem. u. Physik an den humanist. Gymn. Bayerns. 2 Theile. München, Zipperer. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

Lambert, J., Zur Entwerfung von Land- und Himmelskarten (1772). Herausgegeben von A. Wangerin (aus Ostwald's Klassikern). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 60 Pf.

Lagrange (1779) und Gauss (1822), Abhandlungen über Kartenprojection. Herausgegeben von A. Wangerin (aus Ostwald's Klassikern). Ebendaselbst. 1 Mk. 60 Pf.

Rohrbach, C., Sternkarten zum Einzeichnen von Meteorbahnen, Zodiakallicht etc. Berlin, Dümmler in Comm. 1 Mk.

Messer, Bewegliche Karte des Sternhimmels. Petersburg, Ricker. 5 Mk.

Drach, A. v., Die Globusuhr Wilhelms IV. von Hessen. Marburg, Elwert. 3 Mk. 60 Pf.

Wislicenus, F., Astronomische Chronologie. Leipzig, B. G. Teubner. 5 Mk.

Die königl. preuss. Landestriangulation. Hauptdreiecke. 6. Theil. Hannöver-sächs. Dreiecksnetze. Berlin, Mittler & Sohn. 12 Mk.

Gut, A., Wandtafeln zur Projectionslehre m. Text. Wiesbaden, Bechtold & Co. 15 Mk.

Wittsack, P., Einführ. i. d. Festigkeitslehre. Hildburgh., Kesselring. 4 Mk.

Land, R., Einfluss der Schubkräfte auf die Biegung und Berechnung von Trägern. Anh.: Schwerpunktsbestimmungen von Trapezen und Vierecken. Berlin, Ernst & Sohn. 1 Mk.

Physik und Meteorologie.

Blagden, Ch., Die Gesetze der Ueberkaltung u. Gefrierpunktserniedrigung (1788). Herausgegeben von A. von Oettingen (aus Ostwald's Klassikern). Leipzig, Engelmann. 80 Pf.

Fahrenheit (1724), Réaumur (1730 u. 1733), Celsius (1742), Abhandlungen über Thermometrie. Herausgegeben von A. von Oettingen (aus Ostwald's Klassikern). Ebendaselbst. 2 Mk. 40 Pf.

Guericke, O. v., Neue Magdeburgische Versuche über den leeren Raum (1672), übersetzt v. F. Dannemann (aus Ostwald's Klassikern). Ebendas. 2 Mk.

Voigt, W., Compendium der theoretischen Physik. 1. Bd.: Mechanik und Wärmelehre. Berlin, Veit & Co. 14 Mk.

Abercromby, R., Das Wetter in populärer Darstellung. Deutsch von M. Pernier. Freiburg i. Br., Herder. 5 Mk.

Handbuch der Physik. 23. und 24. Lieferung (Encyklopädie der Naturw. III. Abthlg.). Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Ostwald, W., Elektrochemie. 5. Lieferung. Leipzig, Veit. 2 Mk.

Drude, P., Die Theorie in d. Physik. Antrittsvorlesung. Leipzig, Hirzel. 80 Pf.

Bauer, A., Zur Kenntniss des Wesens der Säcularvariation des Erdmagnetismus (Dissertation). Berlin, Mayer & Müller. 3 Mk.

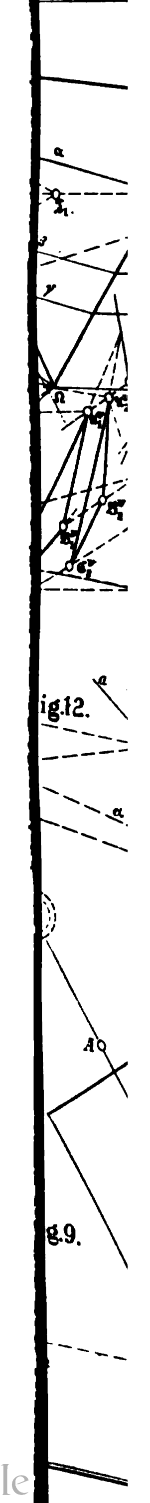
Bezold, W., Gedächnissrede auf H. v. Helmholtz (mit Porträt). Leipzig, Barth. 1 Mk. 50 Pf.

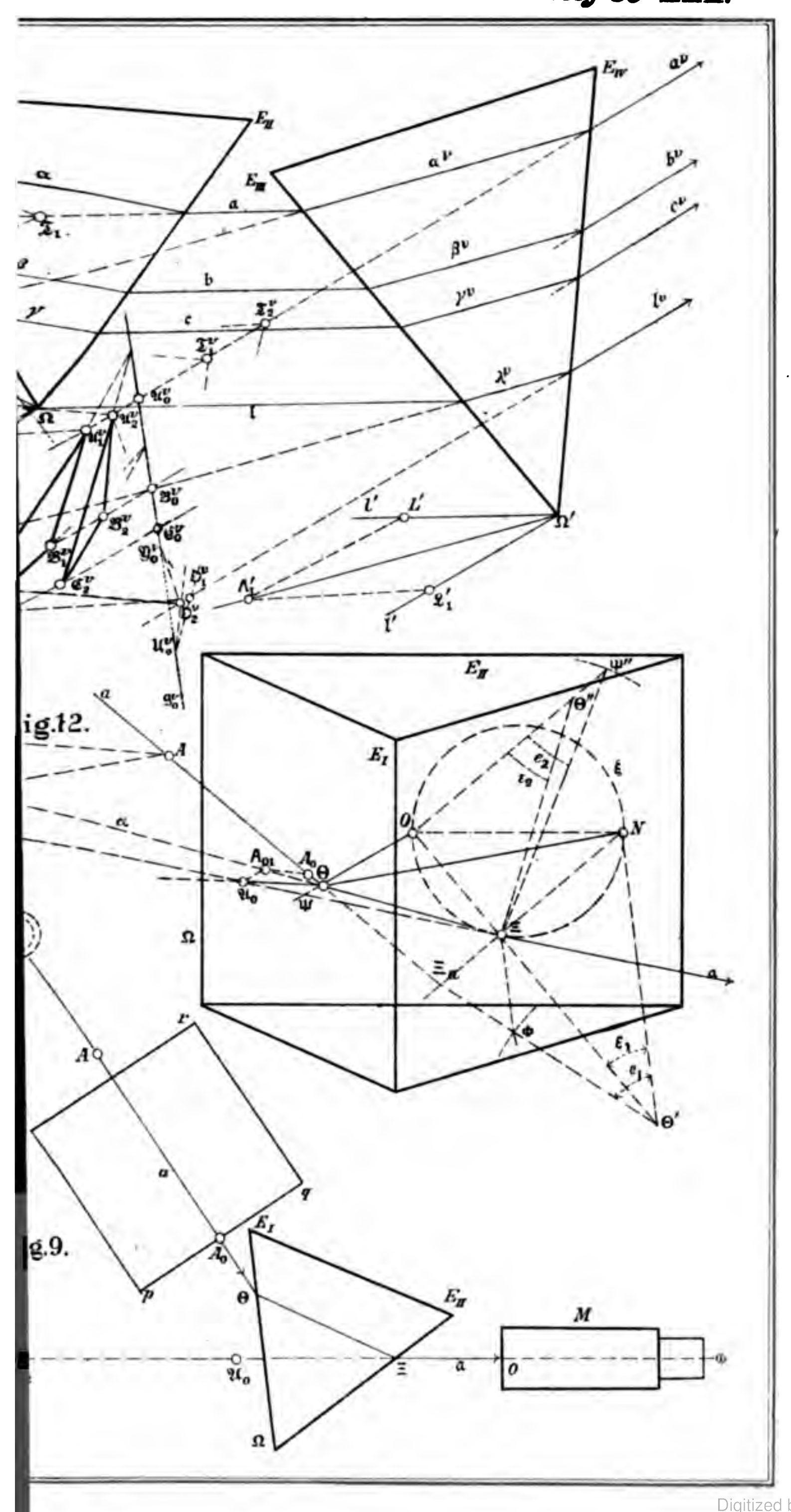
Biese. A., Neuer Typus optisch. Instrumente. Berlin, Fussinger. 2 Mk.

Lorentz, A., Versuche der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, Brill. 2 Mk. 50 Pf.

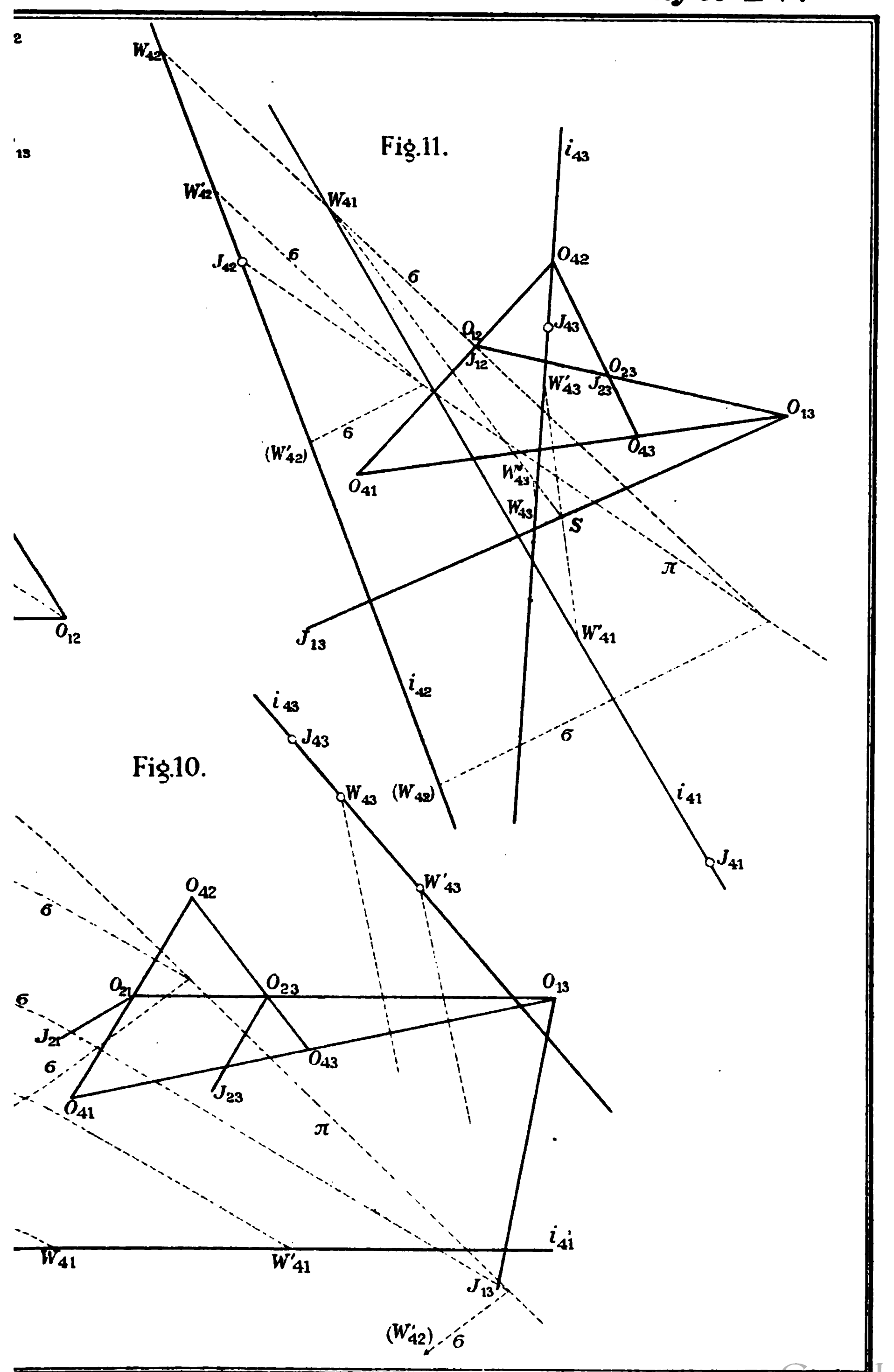
Saubert, B., Der Erdmagnetismus; Ursache und Bedeutung desselben für die Wetterprognose. Hannover, Helwing. 1 Mk. 60 Pf.

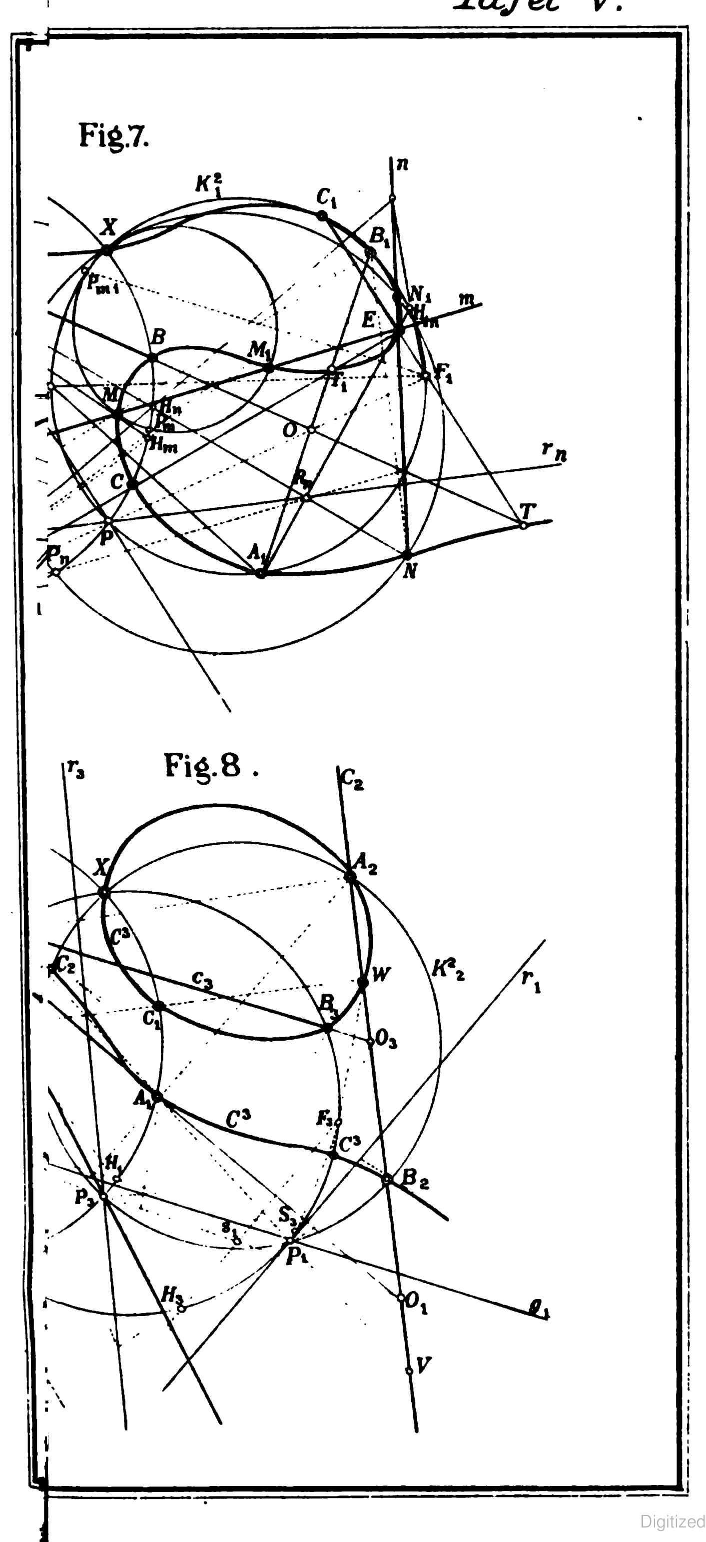
Tyndall, J., Fragmente. Neue Folge. Uebers. von Anna v. Helmholtz und Estelle du Bois-Reymond. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.


ig.12.
g.9.



ig.12.
g.9.


Fig.11.
Fig.10.
W_{42}
W'_{42}
W_{41}
J_{42}
i_{43}
O_{42}
J_{43}
O_{12}
J_{12}
O_{23}
W'_{43}
J_{23}
O_{13}
(W'_{42})
O_{43}
O_{41}
W''_{43}
W_{43}
S
π
W'_{41}
J_{13}
i_{42}
σ
(W_{42})
i_{41}
J_{41}
O_{21}
J_{21}
i'_{41}


Fig.7.
Fig.8.

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

A treatise on the mathematical theory of elasticity. By A. E. H. Love. Volume II. Cambridge: At the university press. 1893. 327 Seiten.

Durch eine geschichtliche Einleitung wird nicht nur diejenige des ersten Bandes wieder aufgenommen und fortgesetzt, sondern wir bemerken auch mit Vergnügen darin, dass der Autor die deutsche Literatur durchaus kennt und würdigt, eine Eigenschaft, die man bisher vielfach bei den Engländern vermisste. — Der Inhalt dieses zweiten Bandes erstreckt sich im Wesentlichen auf die Untersuchungen solcher Körper, bei denen eine Dimension sehr klein ist im Verhältniss zu den anderen, wie z. B. dünne Stäbe, dünne Platten, dünne Glocken u. s. w. Im Uebrigen sei auf die Besprechung des ersten Bandes verwiesen, dem der zweite in Nichts nachsteht.

B. Nebel.

A history of the theorie of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. By the late Isaac Todhunter. Edited and completed for the syndics of the university press by Karl Pearson. Volume II. Saint-Venant to Lord Kelvin. Part. I. 762 Seiten. Part. II. 546 Seiten nebst 12 Seiten Ergänzungen des 1. Bandes. Cambridge: As the university press. 1893.

Sieben Jahre sind seit dem Erscheinen des ersten Bandes verflossen, dem nunmehr der zweite Band in Gestalt zweier stattlicher Theile folgt. Dass eine solche Pause aussergewöhnlich lang ist, fühlte auch der Verfasser; denn in seinem Vorwort sucht er sich zu entschuldigen. Nur der Fachmann allein weiss es völlig zu würdigen, welcher Bienenfleiss bei der Herausgabe eines solchen Werkes nöthig ist und welche Energie ein Mann an den Tag legen muss, wenn er neben seinem anstrengenden Berufe als Lehrer sich einer solchen Aufgabe unterzieht. Dazu kommt, dass gerade die Zeit von 1850—1860 für die Theorie der Elasticität ganz besonders fruchtbringend war; ferner, dass entgegen dem ursprünglichen Plan von Todhunter neben der rein mathematischen Seite der Theorie auch die physikalischen und technischen Berührungspunkte mit der Theorie eingehend berücksichtigt worden sind. Mit dem Verfasser freuen wir uns über die Vollendung des Werkes; denn es ist für das Weiterarbeiten absolut nothwendig, dass die sehr oft zusammenhanglosen und weit-

zerstreuten Arbeiten von Zeit zu Zeit zu einem Ganzen vereinigt werden. Das erste Kapitel des zweiten Bandes ist den Untersuchungen Saint-Venant's gewidmet, auf die die kleineren Untersuchungen seiner Zeitgenossen folgen. Der zweite Theil des zweiten Bandes beginnt mit den Arbeiten von Franz Neumann, Kirchhoff und Clebsch, während die beiden noch folgenden Kapitel Boussinesq und Sir William Thomson (Lord Kelvin) zufallen. Ein sorgfältig aufgestelltes, alphabetisch geordnetes Inhaltsverzeichniss gestattet, in kürzester Zeit das Gewünschte aus der reichen Fülle herauszufinden, was für den Fachmann von unschätzbarem Werth ist.

B. Nebel.

Die Lehre von der Elektricität. Von Gustav Wiedemann. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Zugleich als vierte Auflage der Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. Erster Band. Mit 298 Holzschnitten und zwei Tafeln. Braunschweig. Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 1893. 1023 Seiten. Preis 26 Mk.

Seit dem Erscheinen des ersten Bandes der ersten Auflage im Jahre 1882 hat die Lehre von der Elektricität ganz gewaltige Fortschritte zu verzeichnen, die bis zum Fundament des riesigen Baues reichen. Fallen doch in diese Periode die grossartigen experimentellen Entdeckungen von Herz. Da das Werk den Umfang von fünf Bänden nicht überschreiten soll, so galt es schon bei dem ersten Band, alles Ueberflüssige auszuscheiden oder in Fussnoten unterzubringen; auch die Gruppirung des Inhaltes ist eine etwas andere geworden. Aus dem früheren zweiten Band sind die Elektrisir- und Influenzmaschinen noch in den jetzigen ersten aufgenommen worden. Die Literatur wurde bis zum Ende des Jahres 1892 fortgeführt und soll am Schluss des Werkes noch durch Nachträge ergänzt werden. Nach des Verfassers Angabe soll das Manuskript grössten Theils druckbereit sein, so dass wir hoffen dürfen, in nicht zu ferner Zeit dieses für den Forscher unentbehrliche Handbuch der Elektricitätslehre bis auf die Gegenwart vervollständigt zu sehen. Dass die äussere Ausstattung allen Anforderungen entspricht, dafür bürgt schon der Name Friedrich Vieweg & Sohn.

B. Nebel.

Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes. Von Ludwig Boltzmann. II. Theil. Verhältniss zur Fernwirkungstheorie, specielle Fälle der Elektrostatik, stationären Strömung und Induction. Mit Figuren im Text und zwei Tabellen. Leipzig. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 1893. 166 Seiten Preis 5 Mk.

Mit Freuden sei dieser zweite Theil der Vorlesungen Boltzmann's über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes begrüsst, tragen

sie doch wesentlich zur rascheren Verbreitung und zum leichteren Verständniss der Maxwell'schen Abhandlungen bei. Durch Beibehaltung der Maxwell'schen Buchstaben zeigt sich schon äusserlich des Verfassers Bestreben, die für die Weiterforschung unumgänglich nothwendigen Lehren Maxwell's so rasch wie möglich, dem Leser in Fleisch und Blut überzuführen. Auch hier ist, wie im ersten Theil, der Inhalt in 14 Vorlesungen eingekleidet, in denen den alten Vorstellungen ihr Platz in der Maxwell'schen Theorie angewiesen wird. Mögen diesem zweiten Theil noch weitere folgen! Der Verleger sei auf den Druckfehler seines Vornamens auf dem Titelblatt aufmerksam gemacht. B. Nebel.

Die optische Indicatrix. Eine geometrische Darstellung der Lichtbewegung in Krystallen von L. Fletscher. Uebersetzt von H. Ambronn und W. König. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 69 Seiten. Preis 3 Mk.

Die Uebersetzer haben geglaubt, nur den Theil des Werkes des Verfassers, der gerade im deutschen Leserkreise Interesse zu erwecken vermag, ins Deutsche zu übertragen; er besteht aus dem zweiten und vierten Kapitel des Originals. Es handelt sich hier um das als Indicatrix bezeichnete Hilfsellipsoid, dem dreiachsigen gegenüber dem Rotationsellipsoid, aus welchem ersteren unter ausschliesslicher Anwendung dieser Hilfsfläche alle Sätze über Strahlen und Wellenebenen und ihre gegenseitigen Beziehungen in zweiachsigen Krystallen abgeleitet werden. Es ist dies gerade für den Anfänger von grosser Wichtigkeit; denn bei der Benutzung mehrerer Hilfsflächen ist eine Verwirrung in den meisten Fällen nicht zu vermeiden. Die einfache Darstellung wird ganz besonders zur Verbreitung in Deutschland beitragen. B. Nebel.

Anleitung zur Krystallberechnung. Von Benno Hecht. Mit einer Figurentafel und fünf auf Pauspapier gedruckten Hilfsprojectionen. Leipzig 1893. Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner). 76 Seiten. Preis 3 Mk.

Mit Hilfe der Determinanten, einiger goniometrischer und krystallographischer Hilfssätze nebst der stereographischen bezw. Parallel-Projection ist der Verfasser im Stande, jede Krystallberechnung auszuführen. An einer Reihe von Beispielen wird die Fruchtbarkeit der Methode auseinander gesetzt. Die mathematischen Hilfsmittel sind an die Spitze gestellt und dürften einem Gymnasialabiturienten keinerlei Schwierigkeiten machen. B. Nebel.

Grundbegriffe der Meteorologie für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Zusammengestellt von E. Wilk. Zweite Auflage. Mit

fünf Karten und acht in den Text gedruckten Figuren. Leipzig. Verlag von Jul. Bädeker. 1892. 58 Seiten. Preis 1 Mk.

Das Büchelchen, dessen zweite Auflage eine etwas andere Gruppirung des Stoffes aufweist, hat seine Entstehung localen Unterrichtsvorschriften zu verdanken. Statt einer Sammlung empirischer Regeln finden wir den ganzen Inhalt im Zusammenhang dargestellt als nothwendige Folgerung der Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Zuhilfenahme der physikalischen Unterschiede zwischen Erde und Wasser und der der Erde eigenthümlichen Gestalt, so dass der Schüler von der Meteorologie den Eindruck einer Wissenschaft erhält. Mit dem Verfasser bedauern wir aufs Lebhafteste, dass die Karten bei ihrer Kleinheit nicht in Farben erschienen sind, was bei einer Neuauflage sehr zu berücksichtigen wäre. Auch dem Laien, der sich etwas über die Witterungsverhältnisse auf unserer Erde in Kürze orientiren will, sei dieses Büchlein empfohlen. B. Nebel.

Kleinere Schriften und Briefe von Robert Mayer. Nebst Mittheilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von Jakob J. Weyrauch. Mit zwei Abbildungen. Stuttgart 1893. Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung Nachfolger. 503 Seiten. Preis 10 Mk.

Der Herausgeber, welcher auch die dritte Auflage von Robert Mayer's Mechanik der Wärme besorgt hat, war bestrebt, in diesem Werke nicht nur die kleineren, in Zeitschriften zerstreuten Aufsätze Mayer's zusammenzustellen, sondern auch Mayer's Correspondenz und Alles, was sich auf sein Leben bezieht, mit grosser Sorgfalt zu sammeln, damit der Nachwelt ein möglichst getreues Bild des genialen Entdeckers des mechanischen Wärmeäquivalentes überliefert werde. Dies ist um so wichtiger, weil anfänglich die Fachgelehrten aus Mangel an Verständniss Mayer derart zusetzten, dass seine Kraft diesem Hohn (vergl. Seyffer) nicht gewachsen war, und weil unmittelbar darauf ein heftiger Prioritätsstreit drohte, ihm die Früchte seiner Arbeit und der damit verbundenen Kämpfe zu entreissen. Durch das muthige und thatkräftige Eintreten des grossen englischen Gelehrten John Tyndall war es Mayer vergönnt, die ihm unstreitig gebührende Anerkennung erleben zu dürfen. Mit grossem Bedauern erfüllt es uns, dass es in Folge der schweren Erkrankung Tyndall's nicht gelungen ist, diesen ebenso wichtigen, als interessanten Theil des Briefwechsels vollständig wiederzugeben. Aus dem Eifer, mit welchem der Herausgeber dieses grosse Sammelwerk durchgeführt und durch entsprechende Vorbemerkungen zu einem ganzen vereinigt hat, dürfen wir schliessen und hoffen, dass er nicht nachlassen wird, diesen Theil noch zu ergänzen. Der Vollständigkeit wegen wurde auch der schon im Jahre 1889 von Prof. Preyer herausgegebene Briefwechsel zwischen Mayer

und Griesinger nach den Originalen hier wieder aufgenommen. Durch die Einsicht in die feinfühligen Familienbriefe, durch das Bildniss Mayer's und durch die Abbildung seines Wohnhauses wird dem Leser die Persönlichkeit des grossen Schwabenforschers aufs Lebhafteste vor Augen geführt, für den schon zu Lebzeiten auch seine engeren Landsleute theilweise eingetreten sind (erinnert sei an das mannhafte Auftreten Siegmund Schott's in der württembergischen Kammer), so dass hier nicht ganz zutrifft das etwas harte Wort eines schwäbischen Dichters:

Es wurde stets in Schwaben
Für einen Dichter was gethan,
Sowie man ihn begraben.

B. Nebel.

Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz. Von Dr. Hermann Scheffler. Leipzig 1893. Verlag von Friedrich Förster. 585 Seiten. Preis 9 Mk.

Wer den Nachruf liest, mit welchem der Verfasser dieses Buch dem Andenken seiner früh verklärten Tochter widmet, der wird aus innerster Seele mitempfinden, wie schwer das Schicksal den Verfasser getroffen hat, und wie sehr dadurch das harmonische, häusliche Lebensglück desselben gestört worden ist. Es würde zu weit führen, wenn hier auch nur annähernd auf den reichen Inhalt dieses rein philosophischen Werkes eingegangen werden soll; der Leser muss somit auf das Original verwiesen werden. Die Vorrede beschäftigt sich dagegen in ihrem ersten Theil mit dem auf Faraday's Anschauungen aufgebauten Werke Maxwell's über Elektricität und Magnetismus, das dem Verfasser erst nach Beendigung des vorliegenden Werkes in die Hände gelangt ist und deshalb nicht mehr in demselben verarbeitet werden konnte. Auf Grund angeführter Schriften nimmt der Verfasser die Priorität für sich in Anspruch, den Aether als das vermittelnde Medium hingestellt zu haben. Wir haben die feste Ueberzeugung, dass sich solche Ansprüche auch noch bei früheren Autoren auffinden lassen, wofern wir nur recht emsig suchen, dass demnach die Priorität noch älteren Datums ist. Damit ist es aber nicht gethan, es kommt vielmehr darauf an, aufzufinden, in welcher Weise eine solche Vermittelung stattfindet. Für die Physik war es daher ein fundamentaler Schritt, als die Existenz elektrischer Wellen auf experimentellem Wege erhärtet wurde. Wie Viele haben früher vereinzelt und erst in neuerer Zeit in grösserer Zahl ausgesprochen, dass die Gravitation auf eine ähnliche Wellenbewegung zurückzuführen sei! Wohl mag durch solche Aussprüche die Philosophie gefördert werden, die praktische Physik dagegen ist durch solche, wenn auch vielleicht berechtigte Behauptungen, die aber des experimentellen Beweises noch ermangeln, um keinen Schritt weiter gekommen. Die Physiker werden daher erst Denjenigen, welcher dereinst das Räthsel der

Gravitation auf experimentellem Wege löst, zu ihren grössten Sternen rechnen, zu denen sie nunmehr auch den Entdecker der elektrischen Wellen zählen. Die Fernwirkung von Theilchen zu Theilchen wird auch heute im Allgemeinen nicht geleugnet, wohl aber die unvermittelte Fernwirkung von einem Theilchen zu einem in endlicher Entfernung befindlichen, ohne dass die dazwischen gelegenen Theilchen in Mitleidenschaft gezogen werden.

B. Nebel.

Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune Dirichlet. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Vierte umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1894. VIII und 657 Seiten.

Ein so anerkanntes Lehrbuch, wie das vorliegende, von Neuem rühmen zu wollen, scheint dem Referenten überflüssig zu sein.

Es kann sich nur darum handeln, die Fortschritte hervorzuheben, welche die neue Auflage des Werkes der vorangegangenen gegenüber aufweist. Referent kann sich hierbei wohl um so kürzer fassen, als er in den „Göttinger Anzeigen“ die fraglichen Veränderungen auf das Eingehendste analysirt hat.

Eine wesentliche Umgestaltung hat nur das letzte Supplement „Ueber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen“ erfahren; es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass der Inhalt dieses Supplementes bereits in der dritten Auflage die eigenste Schöpfung des Herausgebers war.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist folgendes. Schon Gauss hatte erkannt, wie die „ganzen complexen Zahlen“ $x+iy$, wo x, y alle ganzrationalen Werthe durchlaufen, eine Theorie zulassen, die der gewöhnlichen rationalen Zahlentheorie in allen wesentlichen Zügen parallel läuft. Der Grund dafür ist wesentlich der, dass auch für die ganzen complexen Zahlen ein Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers existirt, der von dem Euklidischen Algorithmus nur darin abweicht, dass die „Grösse“ einer ganzen Zahl $x+iy$ durch deren „Norm“ x^2+y^2 gemessen wird.

Man könnte nun versucht sein, die Theilbarkeitsgesetze der ganzen, rationalen wie complexen Zahlen, auf die Gesammtheit aller „ganzen algebraischen“ Zahlen ϑ auszudehnen, das heisst solcher, die einer Gleichung von der Form:

$$1)\qquad \vartheta^n + a_1\vartheta^{n-1} + a_2\vartheta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\vartheta + a_n \equiv f(\vartheta) = 0$$

mit ganzrationalen Coefficienten a genügen.

Eine solche „ganze“ Zahl, wie sie kurzweg genannt wird, wird „theilbar“ durch eine zweite heissen, wenn der Quotient wiederum eine ganze Zahl ist. Sind zwei ganze Zahlen gegenseitig durch einander theilbar oder „associirt“, so ist ihr Quotient eine „Einheit“, das ist eine Zahl,

welche einer Gleichung (1) mit dem letzten Coefficienten $+1$ oder -1 genügt und umgekehrt.

Lassen sich nun auch manche Analogien mit der gewöhnlichen Theilbarkeitstheorie aufstellen, so tritt doch sehr bald eine wesentliche Verschiedenheit ein; während nämlich eine ganzrationale Zahl nur auf eine einzige Weise in Factoren zerlegbar ist, findet jetzt eine unbeschränkte Zerlegbarkeit statt.

Der innere Grund dafür ist bald zu erkennen. Eine Primzahl p im rationalen Zahlengebiete besitzt sowohl die Eigenschaft, nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar zu sein, als auch die andere, dass ein Product von zwei durch p nicht theilbaren Zahlen gleichfalls durch p untheilbar ist.

Diese beiden Eigenschaften treten aber — als „Primzahl-Charakter“ und als „Unzerlegbarkeit“ im Gebiete aller ganzen Zahlen auseinander.

Anders wiederum verhält es sich mit dem Begriffe des Relativprim-Seins zweier Zahlen α, β, der im rationalen Gebiete sowohl dadurch erklärt werden kann, dass α und β ausser der Einheit keinen gemeinsamen Theiler haben, als auch dadurch, dass die Gleichung $\alpha x + \beta y = 1$ in ganzen Zahlen x, y lösbar sein soll; hier ist es auch bei allgemeinen ganzen Zahlen von vornherein wahrscheinlich, dass die eine Erklärung die andere zur Folge hat, es fehlt aber dazu vorläufig jeder Ansatz eines Beweises.

Beide Umstände drängen darauf hin, sich vor der Hand auf ein engeres Gebiet von ganzen Zahlen zu beschränken, nämlich ein solches, das einer ganz bestimmten vorgelegten Gleichung (1) entspringt, ähnlich wie die ganzen complexen Zahlen aus der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hervorgehen.

Um aber den Umfang eines solchen Gebietes ganzer Zahlen deutlicher zu übersehen, ist es zweckmässig, zunächst von einem umfassenderen Gebiet auszugehen, und eine irreducible Gleichung (1) mit gebrochenen rationalen Coefficienten zu Grunde zu legen; eine Wurzel ϑ derselben heisst eine „gebrochene algebraische Zahl“, die n Wurzeln $\vartheta, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{n-1}$ der Gleichung heissen conjugirt.

Aus einer solchen Zahl ϑ denke man sich vermöge der vier rationalen Grundoperationen ein Zahlensystem $R(\vartheta)$ gerade so hergeleitet, wie die rationalen Zahlen aus der Eins. Das System $R(\vartheta)$ bildet einen „Körper“, das heisst, seine Individuen gehen durch die vier Species ineinander über, und zwar einen „endlichen Körper n^{ten} Grades“, da je $n+1$ seiner Zahlen durch eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten miteinander verknüpft sind.

Vertauscht man ϑ mit einer conjugirten Wurzel von (1), so geht auch der Körper $R(\vartheta)$ in einen conjugirten über, derart, dass dabei alle

zwischen den Zahlen von $R(\vartheta)$ bestehenden rationalen Beziehungen unverändert bleiben.

Auf welche Weise lassen sich nun alle „ganzen“ Zahlen eines solchen Körpers arithmetisch darstellen?

Ist ω eine solche ganze Zahl, so ist leicht zu sehen, dass auch jede Zahl h_ω von der Form $h_0 + h_1\omega + h_2\omega^2 + \cdots + h_{n-1}\omega^{n-1}$ mit willkürlichen ganzrationalen Coefficienten h wiederum eine ganze Zahl des Körpers ist. Von der grössten Bedeutung ist nun aber die Frage nach der Umkehrung, ob sich auch stets eine ganze Zahl ω des Körpers so auswählen lässt, dass jede andere ganze Zahl des Körpers in die Form h_ω gebracht werden kann.

Für einen Körper nämlich, wo das der Fall ist, ist die ganze Theorie der Theilbarkeit, wie Zolotareff und Dedekind nachgewiesen haben, auf das Verhalten gewisser höherer Congruenzen [deren linke Seite die Form $f(\vartheta)$ in 1) ist] zurückführbar.

Indessen gelang Dedekind 1878 der wichtige Beweis dafür, dass Körper existiren, bei denen die gemeinte Annahme durchaus unzulässig ist; um also eine ausnahmslose Theorie aufzubauen, bedarf es ganz anderer und tiefer liegender Hilfsmittel.

Solche bietet nun in weitestem Umfange die Dedekind'sche Idealtheorie.

Es lässt sich in jedem endlichen Körper an Stelle der Potenzen von ω eine „Basis“ von n ganzen Zahlen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}$ so auswählen, dass die lineare Form $\mathfrak{o} = h_0\omega_0 + h_1\omega_1 + \cdots + h_{n-1}\omega_{n-1}$ (bei gleicher Bedeutung der h) in der That die oben geforderte Eigenschaft besitzt, also für variable Werthe der h sämmtliche ganze Zahlen des Körpers, und zwar jede nur einmal, darstellt.

Allgemein nennt man ein Zahlensystem von der Form $\sum_0^{n-1} h_i\omega_i$, auch wenn die ω irgend welche n Zahlen sind, einen „endlichen Modul“ mit der Basis $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}$: derselbe besitzt offenbar die Eigenschaft, dass seine Individuen durch Addition und Subtraction ineinander übergehen. Als Zeichen dient $[\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}]$.

Unser System $\mathfrak{o}$ hat aber überdies noch die Eigenheit, dass, wenn ω' irgend eine ganze Zahl des Körpers ist, das Product $\omega' . \Sigma h_i\omega_i$ wiederum dem Systeme $\mathfrak{o}$ angehört: ein derartiger endlicher Modul heisst ein „Ideal“ (des Körpers).

Wie man leicht bemerkt, enthält der Körper ausser $\mathfrak{o}$ noch unendlich viele andere Ideale; z. B. das System aller, durch eine feste ganze Zahl ω' des Körpers theilbaren ganzen Zahlen des Körpers ist stets ein solches Ideal.

An diese letzteren Ideale lassen sich, wie verschiedene Beispiele von Körpern zeigen, die Theilbarkeitsgesetze unmittelbar anknüpfen. So im

einfachsten Falle des rationalen Zahlengebietes. Eine Zerlegung $m = np$ lässt sich auch ersetzen durch die Productgleichung für Ideale $[m] = [n] . [p]$, deren Inhalt, genauer betrachtet, ein doppelter ist: einmal gelangt man stets zu einer Zahl in $[m]$, wenn man irgend eine Zahl in $[n]$ mit irgend einer Zahl in $[p]$ multiplicirt, und zwar bleibt hierbei keine Zahl in $[m]$ ausgeschlossen; andererseits sind alle Zahlen des Systems $[m]$ in dem Systeme $[n]$ (oder auch $[p]$) enthalten. Die erstere Eigenschaft wird man dahin ausdrücken, dass $[m]$ das „Product" der beiden „Factoren" ist, die zweite dagegen dahin, dass $[m]$ ein „Vielfaches" von $[n]$ oder auch $[n]$ ein Theiler von $[m]$ ist.

Weitere Beispiele, wie das eines „Kreistheilungskörpers", lassen aber auch erkennen, dass selbst in dem Falle, wo die Zerlegung einer Zahl in Primfactoren erst durch Aufnahme Kummer'scher „idealer Factoren" als eine eindeutige hergestellt werden kann, als rein reales Aequivalent die Zerlegung von einem Ideal in Prim-Ideale eintritt; hierbei kommen der Gesammtheit der durch einen idealen Factor theilbaren wirklichen ganzen Zahlen des Körpers genau wieder die beiden oben bezeichneten Eigenschaften eines Ideales zu, so dass dieselben von jetzt ab umgekehrt ein Ideal definiren. Es entsteht somit — da die blosse Verwendung idealer Factoren auf unübersteigbare Hindernisse führen würde — in erster Linie die Aufgabe, für alle endlichen Körper ohne Ausnahme den Fundamentalsatz zu erhärten, dass jedes Ideal eines gegebenen Körpers auf eine und nur eine Art als Product von Prim-Idealen (das heisst solche, die nur durch sich selber und durch das Gesammtgebiet $\mathfrak{o}$ theilbar sind) dargestellt werden kann.

Und dies hängt in der Hauptsache davon ab, dass in der That bei Idealen allgemein die Begriffe Vielfaches und Product zur Deckung gebracht werden können, so dass also stets, wenn ein Ideal $\mathfrak{m}$ durch ein anderes $\mathfrak{n}$ theilbar ist, das heisst, die Zahlen von $\mathfrak{m}$ sämmtlich in $\mathfrak{n}$ enthalten sind, ein drittes Ideal $\mathfrak{p}$ existirt, so dass $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\mathfrak{p}$ ist, in dem Sinne, dass durch Multiplication irgend einer Zahl in $\mathfrak{n}$ mit irgend einer in $\mathfrak{p}$ der Reihe nach sämmtliche Zahlen in $\mathfrak{m}$ entstehen.

Um zu diesem Angelpunkte der ganzen Theorie vorzudringen, wird man zuvörderst eine selbstständige Theorie der endlichen Moduln entwickeln, wobei auf das Sorgsamste zu sondern ist, was hier die Begriffe des Vielfachen und des Productes gemein haben und was nicht. Erst dann wird man erkennen können, weshalb bei den besonderen Moduln, welche Ideale eines und desselben Körpers sind, beide Begriffe äquivalent werden. Und eben hierein liegt das Hauptverdienst der Neubearbeitung der Theorie seitens seines Schöpfers, dass der fragliche Angelpunkt gleich im Anfange der Idealtheorie klargestellt wird, während das in der

vorigen Auflage nur auf einem mühsamen Umwege und nicht ohne Heranziehung fremdartiger Hilfsmittel erreicht wurde.

Der Fortschritt der neuen Auflage ist in erster Linie einer wesentlichen Vertiefung der Begriffe der Modultheorie zu verdanken; man beachte in dieser Hinsicht den merkwürdigen Dualismus zwischen „grössten gem. Theiler“ und „kleinstem gem. Vielfachen“ von Moduln, die Begriffe des „Quotienten“, des „eigentlichen Moduls“, der „Ordnung“ und „der Hülle einer ganzen algebraischen Zahl“. Vor Allem aber ist es der Satz in § 173 VI über die Umformung algebraischer Moduln, auf dessen Grund erst die Entwickelung der eigentlichen Idealtheorie in ihrer vornehmen Schönheit ermöglicht wird.

In zweiter Linie ist die Umarbeitung der Körpertheorie zu erwähnen, wenngleich dieselbe als solche eine noch viel durchgreifendere geworden ist, als die der Modultheorie.

Es handelt sich hier weniger um neue Einzelergebnisse, als um die principielle Anordnung des Stoffes; mit einem Worte, der im Obigen skizzirte Weg der dritten Auflage wird jetzt gerade in umgekehrter Richtung durchlaufen. Während dort auf Grund einer einzelnen vorgegebenen Gleichung 1) allmählich die allgemeinen Eigenschaften des zugehörigen endlichen Körpers erschlossen werden, nicht ohne Vermeidung von Rechnungen, wird jetzt von ganz beliebigen Körpern ausgegangen; die Begriffe eines Theilers oder Unterkörpers, einer eindeutigen Abbildung, der Reducibilität im allgemeinster Weise aufgestellt und combinirt. Der Grad n, die Norm, die Discriminante und so fort erscheinen von vornherein als Invarianten von Körpern, das heisst Bildungen, die von einer speciellen Darstellung der letzteren ganz unabhängig sind.

Ein endlicher Körper tritt als solcher auf, der nur eine endliche Anzahl von Theilern besitzt, er besitzt den Grad n, wenn je $n+1$ Zahlen desselben ein reducibles System bilden, während sich immer n irreducible Zahlen des Körpers auswählen lassen; ein solcher Körper enthält dann immer unendlich viele algebraische Zahlen, die je einer irreducibeln Gleichung von der Form 1) genügen, wodurch der frühere Ausgangspunkt wieder erreicht ist.

Dabei können die Coefficienten von 1) selbst einem beliebigen Körper (nicht nur dem der rationalen Zahlen) angehören und so fort. Unzweifelhaft ist das eine Stufe der Darstellung und Verarbeitung, die an wissenchaftlicher Höhe kaum noch überboten werden möchte; die Kraft der Begriffe und Sätze reicht denn auch weit über das zunächst gesteckte Ziel, die Theilbarkeitsgesetze für die ganzen Zahlen eines endlichen Körpers, hinaus.

Wo so viel Licht ist, wird freilich auch der Schatten nicht fehlen, und der liegt, wie dem Referenten scheint, vor Allem auf der pädagogi-

schen Seite. So wenig specifische mathematische Kenntnisse vom Leser verlangt werden, um so grösser ist der Anspruch an sein Abstractionsvermögen und an seine Ausdauer. Von der im Uebrigen nahe verwandten Untersuchungsrichtung Kronecker's unterscheidet sich die Dedekind'sche wesentlich darin, dass Ersterer als ideale Divisoren von vornherein gebrochene (algebraische) Zahlen zulässt, während Dedekind sich principiell auf die Verwendung ganzer Zahlen und zwar nur solcher des jeweils vorliegenden endlichen Körpers beschränkt.

Bei dem ganzen wissenschaftlichen Standpunkte des Herausgebers ist es erklärlich, weshalb fremdartige Forschungen der neueren Zeit keine Berücksichtigung gefunden haben.

Mancher Leser wird freilich ein gewisses Gefühl der Enttäuschung nicht zurückhalten, wenn er von dem grossartigen Aufschwunge, welchen z. B. die ganze Theorie der quadratischen Formen auf Grund geometrisch-functionentheoretischer Methoden erhalten hat, Nichts erfährt.

Andererseits will Referent durchaus nicht in Abrede stellen, dass eine Methode, die den verschiedensten Richtungen zugleich gerecht werden will, zumal für einen jüngeren Studirenden mit manchen Gefahren verbunden ist, und dass dem gegenüber ein so consequent festgehaltener Standpunkt, wie er uns in den „Vorlesungen" entgegentritt, einen ungemein erzieherischen Werth hat.

Nach der unmassgeblichen Meinung des Referenten wäre ein gewisser Mittelweg das Richtige; ohne der Systematik Etwas zu vergeben, könnte doch die „gemischte" Methode als historisches, heuristisches und vergleichendes Princip mit gutem Erfolge zur Anwendung kommen.

W. Franz Meyer.

Lehrbuch der höheren Analysis. I. Band. Lehrbuch der Differentialrechnung. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Universitäten und technischen Hochschulen. Von H. Gravelius. Berlin. F. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 1893. VIII und 323 Seiten.

Es ist immer etwas Missliches, über den ersten Band eines grösseren Werkes zu urtheilen, zumal wenn sich wie hier der Verfasser über Plan und Anlage des Ganzen völlig in Stillschweigen hüllt. Es kann leicht als Fehler angesehen werden, was sich möglicher Weise, wenn erst das Werk abgeschlossen vorliegt, in einen Vorzug umwandelt.

Auf die Gefahr hin, solche Irrthümer zu begehen, muss Referent die hier gebotene „Differentialrechnung" als eine selbstständige Schrift ansehen.

Unzweifelhaft hat dieselbe mancherlei Vorzüge.

Die Ausstattung seitens der Verlagsbuchhandlung ist im Verhältniss zu dem wohlfeilen Preise geradezu eine tadellose.

Was die Anordnung des Stoffes anbelangt, so war es das Bestreben des Verfassers, den Studirenden gleich auf der ersten Stufe mit einer Reihe von Verfeinerungen bekannt zu machen, welche die Theorie in den letzten Jahrzehnten erfahren hat; es braucht in dieser Hinsicht ja nur an Namen wie Weierstrass, Dedekind, G. Cantor, Stolz, Dini, Pringsheim erinnert zu werden.

Wenn man noch hinzunimmt, dass der Verfasser eine Uebersicht über die Elementarbegriffe der räumlichen Liniensysteme mit aufgenommen hat, so darf man wohl sagen, dass das Lehrbuch des Herrn Gravelius mit Vortheil als Ergänzung zu anderen Lehrbüchern geringeren Umfanges benutzt werden kann, um so mehr, als die Darstellung des zum Theil abstracten Stoffes im Grossen und Ganzen ein entschiedenes Geschick verräth.

Hierüber hinaus möchte indessen Referent nicht gehen, er möchte eher einen ungeübten Leser vor einer ausschliesslichen Benutzung des Buches warnen.

Denn das Bestreben des Verfassers, dem Leser die Schärfe und Präcision der neueren Richtung vor Augen zu führen, wird nicht selten durch einen lückenhaften und unpräcisen Vortrag vereitelt.

Noch schlimmer ist ein Mangel, der freilich auch nur als ein äusserlicher aufgefasst werden kann: Das Buch wimmelt geradezu von sinnstörenden Druckfehlern, und was das gerade bei einer „Differentialrechnung“ für einen jungen Studirenden besagen will, weiss jeder Mathematiker aus eigener Erfahrung.

So fehlen Seite 12 Zeile 4 die oberen Indices o, auf Seite 13 ist wiederholt das Zeichen $<$ durch $\leqq$ zu ersetzen, auf Seite 42 Zeile 1 von unten fehlt die Einschaltung „positive“, Seite 156 letzte Zeile hat es „$<$“ statt „$>$“ zu heissen und so fort.

An manchen Stellen ist es zweifelhaft, ob man da noch von einem Druckfehler sprechen kann. Auf Seite 41 ist bei der Erklärung der singulären Stellen von dem Verhalten an der Stelle $x=\infty$ keine Rede, Seite 164 wird eine bedingt convergente Reihe als eine „semiconvergente“ bezeichnet und so weiter.

Die Art und Weise, wie citirt wird, unterliegt auch manchen Bedenken. Die G. Cantor'sche Theorie des Irrationalen wird Heine zugeschrieben (mit dem Citat Crelle's Journ. Band 74), während Heine daselbst ausdrücklich betont, dass sie von Cantor herrühre; bei Gelegenheit des „Schnittes“ wird nur auf das Lehrbuch von Stolz verwiesen, so dass der Leser glauben muss, letzterer habe diesen wichtigen Begriff eingeführt, während man denselben bekanntlich Dedekind verdankt. Und so weiter.

Trotzdem ist Referent der Ueberzeugung, dass eine zweite Auflage des Buches, vorausgesetzt, dass ihr eine sorgfältige Correctur vorangegangen ist, den angestrebten Zweck erfüllen wird.

Referent will gern bekennen, dass er einer milderen Auffassung Raum gegeben haben würde, hätte er nicht gerade anderswo eine Besprechung vorgefunden, die durch ihre masslosen Lobeserhebungen abstossen musste.

W. Franz Meyer.

Demartres. Cours d'Analyse. Première Partie. Fonctions de Variables réelles. Deuxième partie. Propriétés des fonctions analytiques. Redigés par E. Lemaitre. Paris. A. Hermann. 1892. 192 resp. 168 Seiten.

Die französischen Professoren der höheren Analysis sind in der angenehmen Lage, bei ihren Zuhörern eine hinreichende Kenntniss der Elemente der Differential- und Integralrechnung voraussetzen zu dürfen. Das spiegelt sich denn auch in den französischen Lehrbüchern wieder. Während die deutschen Werke über Analysis der keineswegs leichten Aufgabe zu genügen haben, sich vorab mit der Arithmetik und Algebra abzufinden, können die französischen sofort in medias res übergehen und den Begriff der allgemeinen Functionen an die Spitze stellen.

Die vorliegenden autographirten Hefte (ein drittes ist seit längerer Zeit in Aussicht gestellt, aber noch nicht erschienen) geben Vorlesungen wieder, die der Verfasser an der faculté des sciences zu Lille über den in Rede stehenden Gegenstand gehalten hat. Man darf wohl den Rückschluss machen, dass die Zuhörer nicht diejenigen Elitetruppen gewesen sind, wie sie Paris aufzuweisen hat. Denn der Verfasser hütet sich geflissentlich, in ausgedehnte abstracte Erörterungen der modernen Subtilitäten einzugehen, er hat vielmehr die Absicht, aus dem grossen Gebiete der Functionen reeller und complexer Variabeln das Wesentlichste, zugleich mit interessanten Anwendungen, herauszuheben, und die organische Verbindung aufzudecken, in der die Fundamentalbegriffe zu einander stehen.

Diese Aufgabe hat der Verfasser zweifellos glücklich gelöst; es ist erstaunlich, was Alles auf gedrängtem Raume zur Behandlung kommt.

Das erste Heft gliedert sich in vier Abschnitte. Für eine resp. mehrere unabhängige reelle Variable werden die Differentialquotienten und Differentiale der Functionen entwickelt; besondere Anregung gewährt dem Leser ein Excurs über Functionaldeterminanten.

Der zweite Abschnitt behandelt die Taylor'sche und Mac-Laurin-sche Reihe und im Anschluss hieran Variationen, sowie Maxima und Minima. Der dritte und vierte Abschnitt beschäftigt sich mit den unbestimmten und bestimmten Integralen. Hierbei werden die Grundzüge der elliptischen und hyperelliptischen Integrale, sowie der trigonometrischen Reihen mit erörtert.

Das zweite Heft zerfällt wiederum in vier Abschnitte. Zuerst wird der Leser mit den analytischen Functionen im Allgemeinen bekannt gemacht; als interessante Anwendung erscheint die Theorie der Kugelfunctionen und das Dirichlet'sche Problem.

Der zweite Abschnitt wendet sich den eindeutigen analytischen Functionen zu, wobei auch die neueren Untersuchungen von Weierstrass und Mittag-Leffler über Primfunctionen berücksichtigt werden.

Als wichtigste Anwendung giebt der dritte Abschnitt die Grundzüge der Theorie der doppeltperiodischen Functionen, wobei den verschiedenen Richtungen möglichst gleichmässig Rechnung getragen wird.

Der letzte Abschnitt ist den mehrdeutigen Functionen gewidmet.

Wenn das Werk auch nicht auf hervorragende Eigenart Anspruch macht, so ist es doch sicher als eines der besseren in dem fraglichen Gebiete anzusehen und zu empfehlen.

W. Franz Meyer.

H. Oltramare. **Essai sur le calcul de la généralisation.** Genève. Stafelmohr. 1893. 132 Seiten.

Es handelt sich um jene eigenthümliche, von Liouville gelegentlich bemerkte, vom Verfasser noch weiter ausgedehnte Verallgemeinerung der Analysis, welche Differentiationen und Integrationen mit gebrochenem Index construirt.

Liouville geht von der gewöhnlichen Differentiationsformel $\frac{d^\mu e^{\alpha u}}{du^\mu} = \alpha^\mu e^{\alpha u}$ (α constant) aus. Multiplicirt man noch mit einer weiteren Constanten A_α und bildet eine Summe von der Art: $\Sigma A_\alpha e^{\alpha u}$, so ist die μ^{te} Ableitung nicht nur eine ganz analog gebaute Summe, sondern man kann dieser neuen Bildung unmittelbar auch dann einen Sinn beilegen, wenn μ eine beliebige (nicht nur ganze positive) Zahl ist.

Nicht jede gegebene Function von u lässt sich natürlich in Form einer solchen (eventuell auch unbegrenzten) Summe schreiben. Um den Bereich der hierher gehörigen Functionen zu erweitern, betrachtet der Verfasser allgemeine Summen von der Form $\Sigma A_\alpha e^{\alpha u} \psi(\alpha)$, wo die Function ψ von der Variabeln u unabhängig ist. Der so entstandene Ausdruck heisst „aus $e^{\alpha u}$ durch Verallgemeinerung entstanden".

Anstatt uns hier auf die abstracten Eigenthümlichkeiten eines solchen Operations-Calcüls tiefer einzulassen, erwähnen wir lieber einige Anwendungen.

Jede Identität, die eine unbestimmte Grösse u enthält, kann durch „Verallgemeinerung" in eine Identität übergeführt werden, welche eine willkürliche Function enthält, die also einen erheblich erweiterten Inhalt besitzt. Dies Princip wird im Besonderen angewandt auf die Theorie der bestimmten Integrale, und man kann nicht leugnen, dass der Verfasser

auf diesem Wege zu einer Reihe theils bekannter, theils neuer, merkwürdiger Relationen gelangt, deren Herleitung nach den sonstigen Methoden sehr viel mehr Mühe verursacht.

Die Integration linearer Differentialgleichungen (mit constanten oder auch variablen Coefficienten) kann auf die Werthbestimmung solcher Summenausdrücke, wie sie oben erwähnt wurden, zurückgeführt werden; man kann bald erkennen, dass es gerade die Theorie der linearen Differentialgleichungen gewesen ist, die den Verfasser zu seiner Symbolik geführt hat.

Erweist sich so die Methode des Verfassers als eine heuristisch recht fruchtbare, so ist freilich einzuwenden, dass die Anwendungen wesentlich formaler Natur sind. Ueber den Giltigkeitsbereich der erzielten Formeln, über die Einschränkungen, denen die vorkommenden Functionen genügen müssen, damit z. B. die resultirenden Reihen-Entwickelungen convergiren, differenzirbar sind u. dergl., erfahren wir keinen Aufschluss.

Es wäre sehr zu wünschen, dass die heutzutage so weit ausgebildete Functionentheorie die unstreitig sinnreichen Ansätze des Verfassers in der angedeuteten Richtung ergänzte.

W. Franz Meyer.

W. Killing. **Einführung in die Grundlagen der Geometrie.** Erster Band. Paderborn. Schöningh. 1893. X und 357 Seiten.

Mit Recht sagt der Verfasser in der Vorrede: „Es trifft sich sehr schön, dass der vorliegende Band gerade zum hundertjährigen Geburtstage Lobatschewsky's erscheinen kann."

Denn trotz der wichtigen und weitgreifenden Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, welche nun schon Jahrzehnte zurückreichen, gab es noch kein* Werk, welches diese neue Disciplin der Mathematik im Zusammenhange behandelt hätte. Und doch ist hierbei nicht nur die Fachwissenschaft interessirt, sondern auch die Pädagogik, die Philosophie, die Naturwissenschaft. Wer will andererseits leugnen, dass gerade über die Grundbegriffe und Ziele dieses Wissenszweiges, über das Wesen der nicht-euklidischen Geometrie, des mehrdimensionalen Raumes, die seltsamsten Missverständnisse, sogar bei sonst sehr nüchternen Leuten, weit verbreitet sind?

Freilich dürfte der Grund für die bezeichnete Lücke in der Literatur wohl darin zu finden sein, dass einer gesammelten Darstellung des Gegenstandes weit erheblichere Schwierigkeiten entgegenstehen, als bei irgend einem anderen Gebiete. Einmal ist es nämlich nicht leicht, ein bestimmtes Maass von Vorkenntnissen für den Leser zu präcisiren, insofern aus Geometrie und Analysis Sätze und Begriffe zu entlehnen sind, welche keineswegs zu den Elementen gehören.

* Das neuerdings erschienene Buch von Herrn Veronese verfolgt wesentlich andere Ziele.

Der Verfasser hat sich bemüht, dem Leser das Verständniss des oft schwierigen Textes möglichst zu erleichtern; einmal wird jeder Gegenstand von principieller Bedeutung von den verschiedensten Punkten aus beleuchtet, sodann wird am Schlusse jedes Hauptabschnittes ein fasslicher Ueberblick über die gewonnenen Ergebnisse gegeben. Auch das den Schluss bildende Literaturregister ist sehr dankenswerth.

Die Darstellung des Textes ist im Ganzen anzuerkennen, wenn sie auch, wie es dem Referenten scheinen möchte, vielfach klarer sein dürfte.

Der Stoff wird auf vier grössere Abschnitte vertheilt, welche der Reihe nach die Berechtigung der nicht-euklidischen Raumformen, die projective Geometrie, den mehrdimensionalen Raum und die Clifford-Klein'schen Raumformen behandeln.

Der Ausgang ist, wie sich erwarten lässt, das sogenannte elfte Axiom Euklid's, was indessen bei Euklid selbst als eines (das fünfte) seiner Postulate (αἰτήματα) auftritt. Diese (fünf) Postulate werden wörtlich mitgetheilt, leider in deutscher Uebersetzung. Mag das aus Rücksicht auf Nicht-Kenner des Griechischen geschehen sein, warum muthet der Verfasser einem solchen Leser wenige Zeilen später zu, unter dem 'αἴτημα ε' eben dieses fünfte Postulat zu verstehen? Es hätte doch wohl auch auf die verschiedenen, in wesentlichen Punkten voneinander abweichenden Euklid-Ausgaben, denen ja in der neuen kritischen Ausgabe von Heiberg Rechnung getragen ist, einige philologische Rücksicht genommen werden sollen.

Es wird nöthig sein, den Leser wenigstens mit den Grundideen des Ganzen bekannt zu machen.

Euklid beweist den Satz der Ebene: Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und die Summe der beiden inneren, an derselben Seite gelegenen Winkel zwei Rechte beträgt, so sind sie parallel, das heisst, sie können sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag. Die Umkehrung konnte er jedoch nicht beweisen, und nahm sie daher als das obige Postulat auf.

Alle Versuche, die seither gemacht wurden, diese Umkehrung zu beweisen, das heisst, sie aus den übrigen Voraussetzungen Euklid's herzuleiten, haben sich als unzulänglich erwiesen.

Man wird somit darauf geführt, die Begriffe der Euklid'schen Geometrie durch andere Begriffe zu ersetzen, für welche ebenfalls alle übrigen Euklid'schen Voraussetzungen gelten, das fünfte Postulat aber nicht mehr.

Es gelingt das in mehrfacher Weise, z. B., wenn man statt der Geraden der Ebene die kürzesten Linien einer Fläche constanter negativer Krümmung zu Grunde legt: die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt dann weniger als zwei Rechte. Es ist das die Lobatschewsky'sche

„Raumform". Während aber diese noch die Annahme Euklid's festhält, dass die Gerade unendlich sei, kann man auch hiervon abstrahiren. Es bieten sich dann zwei Möglichkeiten: entweder gehen alle von einem Punkte ausgehenden „Geraden" noch durch einen zweiten Punkt (wie z. B. die Grosskreise auf einer Kugel) oder nicht, dem entsprechend gilt die Riemann'sche resp. Klein'sche Raumform.

Ein ansehnlicher Theil der Sätze Euklid's gilt für alle diese Raumformen gemeinsam, erst dann entwickelt sich jede selbstständig. Theoretisch sind sie alle gleichberechtigt, die Naturerklärung wird allerdings das Euklid'sche System als das einfachste bevorzugen.

Alle die bisher entwickelten Gesetze — auch die noch nicht erwähnte Begründung der projectiven Geometrie — haften an einem begrenzten Raumgebiet, und die Frage steht noch gänzlich offen, wie sich die einzelnen Theile des Raumes zu einem Ganzen vereinigen. Um dies zu übersehen, betrachte man die Bewegung eines starren Körpers K. Für jeden, mit K durch weitere Körper verbundenen Körper K' wird eine neue Bewegung vermittelt. Nimmt man nun in üblicher Weise an, dass diese neue Bewegung von der Art der Verbindung beider Körper K, K' unabhängig sei, so ergiebt sich nichts Neues; nimmt man aber mit Clifford und Klein das Gegentheil an — was zunächst auffallend, aber theoretisch berechtigt ist — so wird man zu einer grossen Mannigfaltigkeit neuer Raumformen geführt, deren Mechanik allerdings noch wenig studirt worden ist.

Besonders lesenswerth, gerade für Schulmänner, scheint dem Referenten der dritte Abschnitt über den mehrdimensionalen Raum. Ohne sich auf metaphysische Speculationen einzulassen, begnügt sich der Verfasser mit dem Nachweis, dass ein solcher Raum begrifflich möglich und gerechtfertigt sei, und ausserdem für den Mathematiker ein methodisch äusserst werthvolles Instrument.

Gleich im Anfange, wo es sich um Feststellung des Begriffes „Dimension" handelt, wird der Leser mit den neueren scharfsinnigen Untersuchungen von G. Cantor, Netto, Peano u. A. bekannt gemacht, wonach mit Leichtigkeit zwei Räume verschiedener Dimension punktweise ein-eindeutig aufeinander abgebildet werden können — wenn man nur auf die Stetigkeit der Zuordnung Verzicht leistet.

Im Uebrigen bemüht sich der Verfasser mit Erfolg, den mannigfachen Vorurtheilen und falschen Ansichten, die gerade dieses Gebiet zu einem Tummelplatze von Streitigkeiten von jeher gemacht haben, entgegen zu treten.

Der zweite Band des Werkes, der demnächst erscheinen wird, wird einmal auf die Begründung der projectiven Geometrie näher eingehen,

sodann aber vor Allem auf die wichtigen Beziehungen der nichteuklidischen Geometrie zur Theorie der continuirlichen Transformations-Gruppen. Aus dem, was bereits hier über den letzteren Gegenstand vorgebracht wird, möge herausgegriffen werden, welche Wichtigkeit die Erforschung der Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe (der Ebene und des Raumes) für die Bewegung innerhalb der nicht-euklidischen Räume besitzt. Durch neuere Publicationen ist ja die Kenntniss dieser Untergruppen wesentlich erweitert worden.

W. Franz Meyer.

K. Rohn und E. Papperitz. **Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig. Veit & Comp. 1893. XVIII und 381 Seiten.

Wir besitzen eine Reihe von Lehrbüchern der darstellenden Geometrie, deren jedes eigenthümliche Vorzüge hat, und von denen doch keines als ausschliessliche Grundlage des Unterrichtes dienen könnte.

Man darf den Verfassern — von denen sich insbesondere der Erstgenannte durch eine Reihe scharfsinniger, echt geometrischer Arbeiten bereits rühmlichst bekannt gemacht hat — nur zu Dank verpflichtet sein, wenn sie dem bezeichneten Mangel abhelfen wollen.

Die darstellende Geometrie nimmt heutzutage eine eigenartige Stellung ein. Auf der einen Seite soll sie in hergebrachter Weise die praktischen Bedürfnisse der Techniker befriedigen, sodann aber ist sie auch bestimmt — und selbst die Universitäten verschliessen sich dieser Einsicht immer weniger — die Studirenden der Mathematik und Naturwissenschaften in der Raumanschauung auszubilden, und speciell den ersteren das Verständniss der Geometrie der Lage zu erleichtern.

Diesen drei Momenten, dem praktischen, dem pädagogischen und dem wissenschaftlichen hat ein Lehrbuch der gedachten Disciplin zugleich gerecht zu werden, ein solches hat demnach nicht gewöhnliche Schwierigkeiten zu überwinden, um so mehr, wenn es auch ein selbstständiges Ganzes sein will.

Was den praktischen Gesichtspunkt angeht, so ist vor Allem zu betonen, dass die zahlreichen Aufgaben mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit durchgeführt sind; bei vielen sind mehrere Lösungen angegeben. Dabei ist ein Hauptwerth darauf gelegt worden, dass die zeichnerische Behandlung eine zweckentsprechende ist, das heisst, dass die Ergebnisse bequem und deutlich vor Augen liegen.

Die directen Anwendungen auf die Technik sind wohl für den zweiten Band vorbehalten worden.

Der pädagogische Charakter des Buches zeigt sich in dem Bestreben, die darstellende Geometrie als directe Fortsetzung der schulmässigen

Stereometrie erscheinen zu lassen. Die Entwickelung der Raumanschauung ist so sehr ein Hauptziel des Werkes, dass die Figuren des Textes mehr eine Beihilfe sein sollen, wenigstens möchte sich Referent so die Thatsache zurechtlegen, dass der Maasstab der Figuren, verglichen z. B. mit französischen Werken, ein stark reducirter ist. Im Uebrigen ist die Ausstattung tadellos.

Die eingeführten Bezeichnungen und Kunstausdrücke erfreuen sich einer gesunden Systematik. Mit Einzelnem ist Referent freilich nicht einverstanden, z. B. mit der Wortbildung „Paralleldrehung“ (S. 56), für die nicht einmal eine formelle Definition gegeben wird.

Der Styl des Textes kann im Ganzen nur als präcis erklärt werden, wenn er auch von einer gewissen Trockenheit nicht völlig freizusprechen ist.

Von dem pädagogischen Moment ist das wissenschaftliche kaum zu trennen. Auch hier tritt das ausgesprochene Bestreben hervor, ausschliesslich im Raume selbst zu operiren, das heisst, beispielsweise gleich im Anfange die Hilfssätze über Aehnlichkeit und Affinität ebener Figuren durch Projection im Raume herzuleiten. Freilich mag dabei die wissenschaftliche Systematik auf Kosten der Pädagogik ausgebildet sein, denn Referent möchte bezweifeln, ob sich ein Schüler, ohne Anleitung eines sehr guten Vortrages, durch den gemeinten ersten Abschnitt durcharbeiten würde.

Besser würde er vermuthlich mit dem zweiten Abschnitte, der Orthogonalprojection, beginnen und sich diese soweit zu eigen machen, bis er ohne die Heranziehung der Aehnlichkeit und Affinität nicht mehr weiter kommt. Sehr gefallen hat dagegen dem Referenten der Schluss des zweiten Abschnittes, der eine Reihe wichtiger stereometrischer Aufgaben durch Projectionsmethoden, also wirklich constructiv löst, während beim elementaren Unterricht die Constructionen nur gedacht werden.

Der dritte Abschnitt bringt auf wenigen Seiten, und in anregender Form, das Wichtigste über die ebenflächigen Gebilde, und dringt bereits bis zu den Schlagschatten und Eigenschatten der Vielflache vor.

Der folgende vierte Abschnitt handelt von der Centralprojection einer Ebene auf eine andere mit Einschluss des Grenzfalles, dass beide Ebenen coincidiren (Perspectivität in einer Ebene).

Die harmonische Lage von vier Punkten wird, wie es hier die Systematik verlangt, begründet durch Centralprojection einer Strecke, ihres Mittelpunktes und des unendlich fernen Punktes, und erst hieraus die Eigenschaften des vollständigen Vierseits hergeleitet.

Schon in diesem Abschnitt und noch mehr in den folgenden nimmt das Buch, abgesehen von einigen Einschaltungen über Schatten u. dergl., mehr und mehr den Charakter eines Lehrbuches der neueren Geometrie

an, unterscheidet sich aber von den üblichen Werken darüber zu seinem Vortheile darin, dass es einmal in zweckmässiger Weise die älteren mit den neueren Methoden combinirt, andererseits sich sehr gründlich mit dem Unendlich-Kleinen abfindet.

Der erstgenannte Gesichtspunkt tritt besonders deutlich in dem nächsten, wichtigen Abschnitte über die Kegelschnitte hervor, die in erster Linie als Centralprojectionen eines Kreises, und erst hinterher als Erzeugnisse projectiver Grundgebilde auftreten. Den Ausgang bildet die Aufgabe, zwei Kreise in einer Ebene perspectiv aufeinander zu beziehen. Der Grenzfall, dass beide Kreise zusammenfallen, führt sofort zur Theorie von Pol und Polare, dem Pascal'schen Sechseck, und so fort.

Geht man durch Drehung in den Raum zurück, so gelangt man in Kürze zu den metrischen Eigenschaften eines beliebigen Kreiskegels (Symmetrie-Ebenen, Wechselschnitte u. dergl.), und von hier aus zu den Eigenschaften der Kegelschnitte.

Besondere Erwähnung verdient die elegante Behandlung der Krümmung der Kegelschnitte.

Bei Gelegenheit der stereographischen Projection hätte wohl auf die schönen Anwendungen auf Kartenprojection, Krystallographie u. A. hingewiesen werden können.

Nunmehr folgt ein Abschnitt über die Curven der Ebene und des Raumes im Allgemeinen (die Schreibweise des Textes: „Ebene und Raumcurven“ scheint nicht gerade empfehlenswerth zu sein). Als Grundlage dient eine knappe (in manchen Punkten wohl zu knappe) Erörterung der mit dem Unendlich-Kleinen zusammenhängenden Begriffe.

Ein letzter Abschnitt beschäftigt sich eingehend mit Kugel, Cylinder und Kegel, ihren Projectionen und Durchdringungen, Eigen- und Schlagschatten.

Das Buch birgt eine so ausserordentliche Fülle von Stoff auf verhältnissmässig begrenztem Raume, dass es dem Referenten, falls er den Vorwurf parteilicher Liebhaberei vermeiden will, nicht möglich ist, auf die vielen Fortschritte hinzuweisen, die sich im Einzelnen vorfinden. Darüber kann ja auch nur mit Fug Jemand urtheilen, der das Buch seinem Unterrichte in darstellender Geometrie zu Grunde gelegt und es jahrelang durchgeprüft hat.

Aus persönlichen Mittheilungen weiss der Referent, dass so manche ältere Vertreter der Geometrie in wesentlichen Punkten anderer Meinung sind, als die Verfasser. Aber gerade diese Eigenartigkeit des Werkes veranlasst den Referenten, dasselbe, seiner unmassgeblichen Meinung nach, für eine Zierde der geometrischen Literatur zu erklären. Auf den zweiten Band darf man mit Recht gespannt sein.

W. Franz Meyer.

Die Wissenschaft und ihre Sprache. Eine zeitgemässe Abhandlung von Prof. K. Hullmann, Grossherzogl. Oldenburgischer Oberlehrer der Mathematik z. D. Leipzig 1894. Ferdinand Hirt & Sohn. 40 S.

Der Verfasser wünscht, man solle, ebenso wie in der Umgangssprache, auch in der Sprache der Wissenschaft jedes überflüssige Fremdwort vermeiden. Wir sind längst der gleichen Ueberzeugung und glauben in unseren Schriften ziemlich ausschliesslich deutsche Ausdrücke zur Verwendung gebracht zu haben. Herr Hullman ist nicht Reindeutschler um jeden Preis. Er sieht ein, dass gewisse Fremdwörter kaum zu entfernen sein dürften, nachdem sie, und sie allein, bestimmte wissenschaftliche Begriffe festzulegen erfunden sind. Wie wollte man beispielsweise „partielle Differentialgleichungen", wie „complexe Grössen", wie „Determinanten" verdeutschen? Aber gerade diese gezwungene Folgewidrigkeit bringt es mit sich, dass über das Maass des Gebotenen und des Erlaubten verschiedene Meinungen sich bilden können. Manche Verdeutschung des Herrn Hullmann sagt uns sehr zu, andere scheinen uns weit über das Ziel hinauszuschiessen. Doch gleichviel, der Grundgedanke der kleinen Streitschrift — denn als solche ist sie zu bezeichnen — ist gewiss richtig und verdient auch die Beachtung derer, die es weniger streng mit unserer Sprache nehmen. Wir glauben und hoffen, dass schliesslich eine Einigung sich dahin werde erzielen lassen, die deutsche Sprache um so unvermengter mit fremden Beigaben zu gebrauchen, je einfacher die Gegenstände sind, welche man behandelt. Die Anfänge der Zahlenlehre, wie der Raumlehre, können und sollen ohne Fremdwörter gelehrt werden. Je höher dagegen der Gegenstand einer Abhandlung oder eines Buches ist, je beschränkter in Folge davon sein Leserkreis im eigenen Lande, je nothwendiger es für die Druckschrift wie für die Wissenschaft wird, ihr in der ganzen wissenschaftlichen Welt Eingang zu verschaffen, um so unentbehrlicher werden Kunstausdrücke aus den alten Sprachen sein, die keiner neuen Sprache und deshalb allen angehören.

Cantor.

Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Von Wilhelm Wundt. Zwei Bände. Zweiter Band. Methodenlehre. Erste Abtheilung. 2. umgearbeitete Auflage. Stuttgart 1894. Bei Ferdinand Encke. XII und 590 S. Zweiter Abschnitt. Von der Logik der Mathematik. S. 87—259.

In der 1. Auflage von 1883, welche wir im XXIX. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 196—198) angezeigt haben, füllte die Logik der Mathematik 145 Seiten. In der neuen Auflage ist der gleiche Abschnitt auf 172 Seiten angewachsen. Allerdings ist die Zunahme nur eine scheinbare und durch etwas weitläufigeren Druck bedingt. Die Veränderungen, welche bei der Umarbeitung des Werkes die Kapitel erfahren

haben, welche wir heute wie 1883 als diejenigen betrachteten, über welche allein wir uns ein Urtheil gestatten, sind ganz minimale, und so gilt auch heute noch, was wir über die erste Auflage sagten. CANTOR.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. FORT und O. SCHLÖMILCH. Erster Theil. Analytische Geometrie der Ebene. Von O. FORT, weil. Professor am königl. sächs. Polytechnikum zu Dresden. Sechste Auflage. Besorgt von R. HEGER in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1893. Bei B. G. Teubner. VIII und 264 S.

Vier Auflagen dieser bekannten analytischen Geometrie der Ebene hat der ursprüngliche Verfasser herausgeben dürfen, zwei Auflagen besorgte dessen Nachfolger, im Ganzen von dem einmal vorgezeichneten und durch 30jährige Brauchbarkeit bewährten Plane kaum abweichend, wenn auch im Einzelnen ergänzend und neu bearbeitend. 30 Jahre bringen eben eine gewaltige Aenderung der geistigen Höhenverhältnisse hervor. Was man damals dem angehenden Polytechniker noch nicht zuzumuthen wagte, darf und muss man ihm heute bieten. Das hat Herr Heger eingesehen, und dem entsprechend hat er gehandelt. In die neueste 6. Auflage hat er Einiges aus der projectiven Geometrie hineinverarbeitet. Ob er daran Recht that, darüber lässt sich streiten. Praktisch wird die Sache sich so verhalten, dass für jene Anstalten, an welchen neben der analytischen Geometrie auch synthetische Geometrie im neueren Sinne des Wortes gelehrt wird, jene neuen Paragraphen theils überflüssig, theils ungenügend erscheinen, während man für den Gebrauch an anderen Anstalten, die jenen Doppelunterricht nicht kennen, das entgegengesetzte Urtheil fällen wird.

CANTOR.

Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Dargestellt und mit zahlreichen Uebungsbeispielen versehen von Dr. H. GANTER, Professor an der Cantonsschule in Aarau, und Dr. F. RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit 54 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1894. Bei B. G. Teubner. VI und 168 S.

Bei Anzeige der ersten Auflage im XXXV. Band dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abtlhg. S. 37—38) wünschten wir dem hübschen Buche zahlreiche Käufer und Leser. An Beiden hat es ihm nicht gefehlt, denn, wenn bei der Unzahl ähnlicher Schriften, welche jährlich vermehrt die Literatur des Gegenstandes ausmachen, nach sechs Jahren bereits ein Neudruck nothwendig wird, so ist dieses ein Zeugniss für den lebhaften Beifall, den das Buch verdientermassen gefunden hat. Die Verfasser glaubten deshalb ihrem Plane getreu bleiben zu sollen und Form wie Inhalt

im Ganzen so, wie sie in der ersten Auflage waren, gestalten zu müssen. Die Verbesserungen beziehen sich nur auf einzelne Ausdrücke und Schlussfolgerungen, die noch klarer und strenger geworden sind. Wir zweifeln nicht daran, dass der Vertrieb auch der zweiten Auflage ein günstiger sein werde.

Cantor.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Theil. Integral-Rechnung. Von Dr. M. Stegemann, weil. Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Fünfte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 137 Figuren im Texte. Herausgegeben von Dr. Ludwig Kiepert, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Hannover. Hannover 1894. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. XVI und 597 S.

Die im XXXI. Bande dieser Zeitschrift (Histor.-liter. Abthlg. S. 227 bis 228) empfohlene vierte Auflage bestand aus 446 Seiten. Die Vermehrung besteht demnach aus 151 Seiten oder reichlich einem Drittel. Die Umarbeitung ist eine in der That vollständige, wie das Titelblatt es ausspricht. Eine grundlegende Abänderung ist beispielsweise folgende. In der 4. Auflage waren zuerst sämmtliche Integralformeln abgeleitet, worauf die geometrischen Anwendungen folgten. In der 5. Auflage dagegen sind zuerst die einfachsten Integrationen vorgenommen. Diese sind sodann geometrisch angewandt. Hierauf folgen erst die Integrationen gebrochener rationaler, irrationaler und transcendenter Functionen.

Weshalb ist diese Umordnung eingetreten? Die Vorrede giebt kurze Auskunft darüber. Sie sagt uns, wenn auch nicht mit den von uns gebrauchten Worten, Herr Kiepert habe die gleiche Erfahrung gemacht, die sich in jeder Vorlesung über Differential- und Integralrechnung wiederholt, dass es in der ganzen Mathematik für Lehrer und Lernende nichts Langweiligeres giebt, als die Ableitung sämmtlicher Integralformeln, und dass es darum eine didaktische Nothwendigkeit ist, diesen Gegenstand durch interessantere Zwischenbetrachtungen zu unterbrechen, mag auch die dogmatische Einheit darunter leiden. Wir sind darin mit Herrn Kiepert durchaus gleicher Meinung, gehen aber noch einen ziemlichen Schritt über ihn hinaus. Dem Beispiele folgend, in welchem bewährte Lehrer unser Vorbild waren, nehmen wir die einfachen Integrationen mit den Differentiationen zugleich vor und ersparen dadurch Zeit und Langeweile. Die Vorlesung zerfällt somit allerdings nicht in einen ersten ausschliesslich der Differentialrechnung und einen zweiten ausschliesslich der Integralrechnung gewidmeten Abschnitt, die Zeichen d und $\int$ kommen, sobald die Einleitung abgehandelt ist, in jeder Vorlesung gemeinschaftlich vor, aber Verwirrung entsteht dadurch keineswegs, vielmehr hilft das Integriren fortwährend die Differentiationsformeln einzuprägen und umgekehrt. Aehnlich,

denken wir, sollte auch ein wesentlich didaktische Zwecke verfolgendes Lehrbuch verfahren. Vielleicht entschliesst sich Herr Kiepert, in einer nächsten Auflage die beiden Bände in der angedeuteten Weise ineinander zu verarbeiten. — Wir haben ausführlicher von einer Veränderung gesprochen, welche die 5. von der 4. Auflage unterscheidet. Wollten wir die einzelnen Kapitel durchgehen, so wären in jedem Abänderungen, wir können getrost sagen, Verbesserungen hervorzuheben. Gerade dadurch kennzeichnet sich aber die 5. Auflage als Vorbote einer künftigen 6., denn das Kiepert'sche Lehrbuch wird in der neuen Gestaltung nur noch mehr an den Universitäten sich einbürgern, ohne seine Verwendbarkeit an technischen Hochschulen einzubüssen.

CANTOR.

The collected mathematical papers of HENRY JOHN STEPHEN SMITH, M. A., F. R. S., late Savilian Professor of geometry in the university of Oxford, edited by J. W. L. GLAISHER, Sc. D., F. R. S., Fellow of Trinity College, Cambridge. With a mathematical introduction by the editor, biographical sketches and a portrait. In two volumes. Oxford at the Clarendon press 1894. XCV, 603 and VII, 719 pages.

„Wenn 13 Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von 16 Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.“ So lautete der wesentlichste Satz einer im Jahre 1866 von der Berliner Akademie ausgeschriebenen Preisfrage. Unter vier einlaufenden Bearbeitungen wurden im Juli 1868 in Folge eines von Kummer erstatteten Berichtes zwei als gleich werthvoll mit je der Hälfte des ausgesetzten Preises belohnt. Die Verfasser waren Herr Hermann Kortum und Henry John Stephen Smith. Man wird kaum einen Irrthum begehen, wenn man behauptet, damals sei der Name des am 2. November 1826 geborenen englischen Mathematikers zum ersten Male in Deutschland bekannt geworden. Nicht als ob Smith fast 42 Jahre alt geworden wäre, ohne einen Beweis seiner schöpferischen Geisteskraft der Oeffentlichkeit zu übergeben, aber nahezu Alles, was aus seiner Feder bis dahin gedruckt wurde, steht in den *Proceedings of the Royal Society*, in den *Proceedings of the London mathematical Society*, in den *Reports of the British Association*, und diese haben sämmtlich auf dem europäischen Festlande, in Deutschland wie nicht minder in den anderen Ländern, einen äusserst beschränkten Leserkreis. Das zeigte sich am Deutlichsten, als die Pariser Akademie als Preisfrage für das Jahr 1882 die Zerlegung einer Zahl in fünf ganzzahlige Quadrate forderte und dabei die Bewerber auf Lehrsätze von Eisenstein hinwies, welche 1847 ohne Beweis im XXXV. Bande von Crelle's Journal ausgesprochen worden waren. Was

nämlich die Pariser Akademie 1882 verlangte, war seit 15 Jahren vorhanden. In den Proceedings of the Royal Society von 1867 stand die Abhandlung von Smith: *On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates,* und in ihr war, allerdings wieder nicht mit ganz erschöpfendem Beweise, die Zerlegungsaufgabe gelöst. Wollte also die Akademie nur die letzte Lücke ausgefüllt haben, so musste in dem Preisausschreiben neben Eisenstein auch Smith genannt werden, und dass dieses nicht geschah, verbürgt, dass man die Abhandlung von Smith nicht kannte. Die Bestätigung liefert ausserdem ein im Februar 1882 zwischen Smith und Herrn Hermite geführter Briefwechsel. Smith machte darin auf seine Zerlegung sowohl in fünf als in sieben Quadrate aufmerksam, Herr Hermite erklärte mit Bedauern, kein Mitglied der mit der Vorbereitung der Preisfrage betrauten Commission habe von jenen Arbeiten eine Ahnung besessen. Smith beeilte sich nun, die noch ausstehenden Beweise genauer auszuführen und wurde noch gerade bis zu dem für die Einreichung der Bewerbungen gestellten Zeitpunkt damit fertig. Am 2. April 1883 fand die Preisverkündigung statt. Von drei eingereichten Bearbeitungen der gestellten Aufgabe wurden zwei als des Preises gleich würdig erkannt und gekrönt. Ihre Verfasser waren Smith und ein damals noch blutjunger Student in Königsberg, Herr Minkowski. Smith hat diesen Tag nicht mehr erlebt. Der 9. Februar 1883 war sein Todestag. Wir haben in den beiden Preisschriften, welche erwähnt werden konnten, Muster aus scheinbar sehr weit voneinander entlegenen Gebieten des mathematischen Denkens kennen gelernt, und dennoch kann man sagen und hat der Herausgeber seiner Werke mit Recht gesagt, dass Smith vor allen Dingen Zahlentheoretiker war. Auch die geometrische Abhandlung ist als eine Uebertragung algebraischer, wenn nicht zahlentheoretischer Gedanken auf die Curvenlehre anzusehen, wie der Berichterstatter über dieselbe vor der Berliner Akademie zum besonderen Lobe zu betonen in der Lage war. Zum Vortheil für ihren wissenschaftlichen Werth, sagte Kummer, lässt die Arbeit fast überall erkennen, dass der Verfasser zu seinen umfassenderen Untersuchungen durch algebraische Betrachtungen gelangt ist. Als Zahlentheoretiker ersten Ranges bewährte er sich in den fünf Berichten: *On the theory of numbers,* welche er 1859—1863 veröffentlichte. Es ist gewissermassen eine Zusammenstellung dessen, was seit Gauss und Legendre geleistet worden war, systematisch geordnet, mit Aufdeckung der da und dort noch vorhandenen Lücken, zum Theil mit deren Ausfüllung. Voller Beziehungen auf Zahlentheorie sind endlich auch die Arbeiten über elliptische Transcendenten, über Modulargleichungen, über Theta- und Omega-Functionen, mit welchen Smith sein Heimathsrecht auf noch einem mathematischen Gebiete bethätigte. Die letztgenannte Abhandlung brachte Smith in enge Verbindung mit Herrn Glaisher, und diesem die Ehre, die Schriften

des verstorbenen Freundes sammeln und herausgeben zu dürfen. Er hat sich dieser Ehre durch eine nach Form und Inhalt vortreffliche Einleitung würdig erwiesen. Es steht zu erwarten, dass die nunmehr in der schönen Ausstattung, welchen englischen Ausgaben zum regelmässigen Lobe gereichen, vereinigten Schriften des lange Zeit zu wenig bekannten hervorragenden englischen Mathematikers vielfach gelesen werden, vielfach als Anknüpfungspunkt für neue Forschungen dienen. CANTOR.

Frontinus and his two books on the water supply of the city of Rome, A. D. 97. A Lecture delivered before the engineering students of Cornell University, February 2 d, 1894. By CLEMENS HERSCHEL, hydraulic engineer of New York, N. Y. Ithaca, N. Y. 1894. 40 pag.

Philologen und Mathematiker haben sich wiederholt mit Frontinus, dem berühmten, vielseitig schriftstellerischen Techniker des ersten nachchristlichen Jahrhunderts beschäftigt. Es konnte nicht fehlen, dass ihre Untersuchungen sich gegenseitig ergänzten, wenn gleich immer noch eine Lücke blieb. Beide waren nämlich nicht befähigt, den eigentlich wasserbautechnischen Inhalt der Bücher über die Wasserleitungen richtig zu würdigen, beziehungsweise einen sachgemässen Auszug aus ihnen zu veranstalten. Dieser Aufgabe hat nun Herr Herschel sich unterzogen, und wenn sein dem Drucke übergebener Vortrag auch in erster Linie für Fachgenossen des Wasserbaues bestimmt war, so ist er doch so allgemein verständlich gehalten, dass auch Laien auf jenem Gebiete ihn lesen können und gewiss gleich uns die Erläuterungen dankbar entgegennehmen werden. CANTOR.

Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft. Eine mathematisch-historische Studie von Prof. FERDINAND JOS. OBENRAUCH. Fortsetzung. 20 S. Brünn 1894.

Den ersten Abschnitt haben wir Band XXXIX. (Histor.-liter. Abthlg. S. 187—188) angezeigt. In der uns heute vorliegenden Fortsetzung schildert der Verfasser Monge's mathematische Leistungen, soweit sie in dessen *Géométrie déscriptive* enthalten sind. In Anmerkungen werden die Parallelstellen deutscher, besonders österreichischer Werke angegeben, welche dem Inhalte der einzelnen Kapitel bei Monge entsprechen. Ein noch zu erwartender dritter Abschnitt wird die *Applications de l'Analyse à la Géométrie* behandeln. CANTOR.

Bibliographie

vom 1. März bis 30. April 1895.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathematischen Klasse der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 4. Heft. München 1894. Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Abhandlungen der mathem.-physik. Klasse der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 21. Bd. Leipzig, Hirzel. 27 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 61. Bd. Wien, Tempsky. 71 Mk.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. 103. Bd. IIa. Ebendaselbst 4 Mk. 40 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 29. Jahrgang. 3. und 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Abhandlungen der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. 18. Bd. 4. Heft. Frankfurt a. M., Diesterweg. 12 Mk.

Annalen der Schweizerischen meteorologischen Centralanstalt. Jahr 1892. Zürich, Fäsi & Beer. 18 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 12. Bd. 1. Hälfte, redigirt von Fröhlich. Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. 4 Mk.

Astronomische Beobachtungen und Resultate aus den Jahren 1890 und 1891, erhalten in Kaiserslautern auf der Privatsternwarte von Fauth. Kaiserslautern, Gotthold. 15 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 5 Heft, redigirt von Köpcke. Leipzig, B. G. Teubner. 80 Pf.

Astronomische Arbeiten des kaiserl. königl. Gradmessungs-Bureaus. 6. Bd. Längenbestimmungen. Wien, Tempsky. 10 Mk.

Meteorologisches Jahrbuch der deutschen Seewarte für das Jahr 1893. Hamburg, Friedrichsen & Co. 13 Mk.

Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theils des preussischen Normalkalenders für 1896. Berlin, Verlag des statistischen Bureaus. 5 Mk.

Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. 24. Bd. Jahrgang 1892. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1889. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 45. Jahrgang. I. Abtheilung. Braunschweig, Vieweg. 22 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. 5. Jahrgang. 1894. Herausgegeben von J. KLEIN. Leipzig, H. Mayer. 7 Mk.

Reine Mathematik.

PUCHBERGER, E., Allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. 2. Heft. Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

SPECKMANN, G., Ueber unbestimmte Gleichungen. Dresden, Koch. 50 Pf.

GUNDELFINGER, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Herausgegeben von F. DINGELDEY. Leipzig, B. G. Teubner. 12 Mk.

EBERHARD, V., Die Grundgebilde der ebenen Geometrie. 1. Bd. Leipzig, B. G. Teubner. 14 Mk.

BÜTZBERGER, F., Kurzer Lehrgang der ebenen Trigonometrie mit vielen Anwendungen. Bern, Wyss. 1 Mk. 20 Pf.

HOLZMÜLLER, G., Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 3. Theil (Schluss). Leipzig, B. G. Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

WECKWERTH, M., Sammlung von Aufgaben aus der niederen Mathematik. Leipzig, Seemann. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

HERZ, N., Kepler's Astrologie. Wien, Gerold. 3 Mk.

AMBRONN, L., Breitenbestimmungen zur See; im Auftrag der Direction der deutschen Seewarte bearbeitet. Hamburg, Friedrichsen & Co. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

HELMHOLTZ, H. v., Wissenschaftliche Abhandlungen. 3. Bd. Leipzig, Barth. 18 Mk.

HERTZ, H., Gesammelte Werke. 1. und 2. Bd. Ebendaselbst. 18 Mk.

RECKLINGHAUSEN, M. v., Ueber das neue Quecksilberthermometer für Temperaturen bis 550° C. (Dissertation). Heidelberg, Hörning. 80 Pf.

KOLBE, B., Einführung in die Elektricitätslehre. 2. Bd. Dynamische Elektricität. München, Oldenbourg. 3 Mk.

BRANDT, G., Schulphysik für Gymnasien. Erster Theil für Obertertia und Untersecunda. Berlin, Simion. 1 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1894.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. On a special conformation of areas. A. R. Forsyth. Quart. Journ. mat. XXVI, 145.

Absolute Geometrie.

2. Sur le principe fondamental de la géométrie Riemannienne. De Tilly. Mathesis Série 2, IV, 180.
3. Zur Volumbestimmung in der Lobatschewsky'schen Geometrie. M. Simon. Mathem. Annal. XLII, 471.

Analytische Geometrie der Ebene.

4. Paradoxe dans la théorie des développées. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 250. — P. Mansion ibid. 250.
5. Ueber geradlinige Asymptoten algebraischer Curven. A. Himstedt. Grun. Archiv 2. R. XII, 357.
6. Geometrische Oerter bei Curvensystemen. H. Ekama. Grun. Archiv 2. R. XII, 23.
7. Enveloppe d'une courbe plane quelconque qui se déforme d'une manière donnée. Absolonne. Mathesis Série 2, IV, 256.
8. Sur une famille remarquable de courbes. G. Pirondini. Mathesis Série 2, IV, 14.
9. Sur l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur les deux côtés d'un angle quelconque. J. M. Mathesis Série 2, IV, 129.
10. Sur deux paraboles semicubiques. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 124.
11. Propriétés de la cissoïde. Retali. Mathesis Série 2, IV, 167.
12. Sur la courbe $(x-a)y^2 = (y-b)x^2$. Morel. Mathesis Série 2, IV, 196.
13. Sur la Kreuzcurve comme lieu des centres de courbure d'hyperboles. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 47. — Droz-Farny ibid. 48. — Retali ibid. 49.
14. Ueber eine neue geometrische Construction der Lemniskate. E. Schultz. Grun. Archiv 2. R. XII, 318.
15. Cuspidal quartics. Herb. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXVI, 5.
16. Propriétés du limaçon de Pascal. Keelhoff, Brocard, Barisien etc. Mathesis Série 2, IV, 206.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

17. Zu den Grundformeln der analytischen Geometrie. O. Stolz. Mathem. Annal. XLIII, 591.
18. Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle. F. Dauge. Mathesis Série 2, IV, 85.
19. On the expansion of the coordinates of a point upon a tortuous curve in terms of the arc. G. B. Mathews. Quart. Journ. math. XXVI, 27.
20. Zur Hesse'schen Normalform der Gleichung einer Ebene. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XLII, 497.
21. Ueber eine Schaar von Curven auf einer Tangentenfläche. R Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 354.
22. Un problème sur les courbes gauches. Balitrand. Mathesis Série 2, IV, 159.

23. Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand. E. Cesaro. Mathesis Série 2, IV, 265.
Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

24. Independente Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. R. Haussner. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 183.

Bestimmte Integrale.

25. Sommation de deux séries. Cristesco et Decamps. Mathesis Série 2, IV, 71.

C.

Combinatorik.

26. Dans une pile de boulets rectangulaire quel est le nombre des points de contact de deux boulets. Soons. Mathesis Série 2, IV, 72.
Vergl. Substitutionen.

Cubatur.

Vergl. Absolute Geometrie 3. Tetraeder 254.

Cylinderfunctionen.

27. Ueber die Addition und Subtraction der Argumente bei Bessel'schen Functionen nebst einer Anwendung. J. H. Graf. Mathem. Annal. XLIII, 136.

D.

Determinanten.

28. Ueber eine Analogie des Laplace'schen Determinantensatzes. E. Liers. Grun. Archiv. 2. R. XII, 352.
29. Sur les Wronskiens. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 165.
30. Théorème sur les déterminants. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 251.
31. Ueber das Product zweier Determinanten. C. Weltzien. Mathem. Annal. XLII, 598.
Vergl. Bernoulli'sche Zahlen.

Differentialgleichungen.

32. Ueber die Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano. Gust. Mie. Mathem. Annal. XLIII, 553.
33. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XLII, 409.
34. Zur Integration der Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen. J. Horn. Mathem. Annal. XLII, 215.
35. Ueber die Darstellung der Fundamental-Invarianten eines Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Grünfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 237.
36. Ueber das Quadrat des Integrals einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 314.
37. Ueber die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Riemann'schen Differentialgleichung. O. Bolza. Mathem. Annal. XLII, 526.
38. Bemerkung zu dem Existenzbeweis der Integrale partieller Differentialgleichungssysteme. L. Königsberger. Mathem. Annal XLII, 485.
39. Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Aug. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 355.
40. On the partial differential equation $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V = 0$. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 1.
Vergl. Invariantentheorie 154.

Dreiecksgeometrie.

41. Analytische Entwicklung von Gleichungen über drei in demselben Punkte sich schneidende Transversalen eines Dreiecks. Jos. Kiechl. Grun Archiv. 2. R. XII, 411.
42. Erreur d'une conclusion tirée de l'équation d'un lieu. V. Retali. Mathesis Série 2, IV, 39. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 26.]

E.

Elasticität.

Elektricität.

Ellipse.

Ellipsoid.

Elliptische Transcendenten.

66. Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie. Heinr. Weber. Mathem. Annal. XLIII, 185.
67. Sulla trasformazione dell' undecimo ordine delle funzioni ellittiche. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XXI, 309.
68. Ueber die Transformation eines Integrals. T. Brodén. Grun. Archiv. 2. R. XII, 223.

Vergl. Quadratur 228. Reihen 238. Thetafunctionen.

F.

Factorenfolge.

69. Bestimmung des Näherungswerthes bez. Grenzwerthes eines Productes. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 249.
70. Des produits $(1-x)$ $(1-x^2)$ $(1-x^3)\ldots$ et $(1+x)$ $(1+x^2)$ $(1+x^3)\ldots$ E. Cesaro. Mathesis Série 2, IV, 194.

Formen.

71. Ueber einen Satz von Hilbert. P. Gordan. Mathem. Annal. XLI, 132. [Vergl. Bd. XXXVI Nr. 61.]
72. Ueber die Sygygante $D^2\psi=[5,5,2]$ zweier simultanen biquadratischen binären Formen. v. Gall. Mathem. Annal. XLIII, 550.
73. Ueber ternäre bilineare Formen. P. Muth. Mathem. Annal. XLII, 257.

Vergl. Invariantentheorie. Substitutionen.

Functionen.

74. On lacunary functions. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 279.
75. Note on the theory of orthomorphosis. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 282.
76. Ueber die Darstellung einiger Fälle der automorphen Primformen durch specielle Thetareihen. Heinr. Burkhardt. Mathem. Annal. XLII, 185.
77. Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen. Rob. Fricke. Mathem. Annal. XLII, 564.
78. On Noether's fundamental theorem. H. J. Baker. Mathem. Annal. XLII, 601.
79. Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen zweiter Art. Ulr. Bigler. Grun. Archiv. 2. R. XII, 113, 225.
80. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. D. Hilbert. Mathem. Annal. XLIII, 216. — A. Hurwitz. Ebenda 220. — P. Gordan. Ebenda 222.
81. Ueber Functionen von Vectorgrössen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind. H. Burkhardt. Mathem. Annal. XLIII, 197.
82. Ueber Ordinalfunctionen. A. Voigt. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 59.
83. Beweis eines Satzes von Bertini über lineare Systeme ganzer Functionen. J. Lüroth. Mathem. Annal XLII, 457.
84. Delle funzioni regulari in un' area connessa qualsivoglia a distanza finita. Giul. Ascoli. Annali mat. Ser. 2, XX, 245. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 74.]
85. Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen. Fr. Junker. Mathem. Annal. XLIII, 225.
86. Neues Verfahren der Fourier'schen Entwickelung der doppelperiodischen Functionen. G. Mohrmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 1.
87. Sulle funzioni a due variabili reali, le quali crescono o decrescono sempre nel verso positivo di ciascuno degli assi in un pezzo di piano a distanza finita. Giul. Ascoli. Annali mat. Serie 2, XX, 41. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 74.]

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Formen. Imaginäres. Invariantentheorie. Iterirung. Maxima und Minima. Mehrdimensionale Geometrie. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Unendlich gross.

G.

Geometrie (descriptive).

88. Condition de parallélisme entre un plan et une droite. C. J. François. Mathesis Série 2, IV, 235.
89. Eine räumliche Betrachtung der Dreieckspunkte. Chladek Franz. Grun. Archiv. 2. R. XII, 109.

Geometrie (höhere).

90. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (1872). Fel. Klein. Mathem. Annal. XLIII, 63.
91. Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften. Th. Reye. Mathem. Annal. XLIII, 145.
92. Eine neue Ableitung des Satzes von Cayley-Brill über Punktsysteme auf einer algebraischen Curve. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 228.
93. Ueber Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalcurve der φ. Fel. Klein. Mathem. Annal. XLII, 1.
94. On certain factors of the c- und p-discriminants and their relation to fixed points on the family of curves. Isabel Maddison. Quart. Journ. math. XXVI, 307.
95. Einige Sätze über projective Spiegelung. Max Böcher. Mathem. Annal. XLIII, 598.
96. Contribuzione alla teoria delle serie irrazionale involutorie ∞^1 giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione. Fed. Amodeo. Annali mat. Serie 2, XX, 227.
97. Curve k-gonali. Fed. Amodeo. Annali mat. Serie 2, XXI, 221.
98. Ueber Kreisbogenpolygone. A. Schönflies. Mathem. Annal. XLII, 377.
99. Sur les strophoidales. G. de Longchamps. Mathesis Série 2, IV, 138. — J. Neuberg ibid. 141.
100. Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane. C. Segre. Annali mat. Serie 2, XX, 237.
101. Sopra due curve invariantive di una quartica piana. Edg. Ciani. Annali mat. Serie 2, XX, 257.
102. Bemerkung zur Theorie der regelmässigen Configurationen n_3. A. Schönflies. Mathem. Annal. XLII, 595.
103. Einige metrische Eigenschaften der cubischen räumlichen Hyperbel. Heinrichs. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 213, 273.
104. Projective Lösung einer geometrischen Aufgabe. Wilh. Rulf. Grun. Archiv. 2. R. XII, 442.

Vergl. Absolute Geometrie. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte. Kinematik. Mehrdimensionale Geometrie.

Geschichte der Mathematik.

105. Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques. V. Bobynin. Biblioth. math. 1894, 55.
106. Die Kreismessung des Archimedes. Friedr. Hultsch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 121, 161.
107. Un fragment des métriques de Heron. P. Tannery. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 13.
108. Ueber den Geburtsort des Serenos. J. L. Heiberg. Biblioth. math. 1894, 97.
109. Ueber die Wasseruhr und das Astrolabium des Arzachel. Arm. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 41, 81.
110. Ueber den Josephus sapiens oder Hispanus Gerberts. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 13. — H. Suter ibid. 84.
111. Das gläserlose Sehrohr im Alterthum und Mittelalter. S. Günther. Biblioth. math. 1894, 15.
112. Zur Geschichte des Josephspiels. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 116.
113. Die Mathematik der Juden. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1894, 37, 79, 99. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 56.]
114. Intorno ad alcune edizioni dell' Algorismo del Sacrobosco. P. Riccardi. Biblioth. math. 1894, 73.
115. Miscellen zur Geschichte der Mathematik im XIV. und XV. Jahrhundert. M. Curtze. Biblioth. math. 1894, 107.
116. Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au XVI. siècle. G. Eneström. Biblioth. math. 1894, 33.
117. Zur Geschischte der Mathematik im XVII. Jahrhundert. S. Dickstein. Biblioth. math. 1894, 24.
118. Note sur l'histoire de l'infiniment petit. G. Vivanti. Biblioth. math. 1894, 1.
119. Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat. Giov. Vacca. Biblioth. math. 1894, 46.
120. Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'Analyse des infiniments petits. G. Eneström. Biblioth. math. 1894, 65.

121. On the use of a single symbol to denote the incommensurable number 3,14159 . . . W. W. Rouse Ball. Biblioth. math. 1894, 106.
122. Ueber e als Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems. W. W. Beman. Biblioth. math. 1894, 32.
123. Georg von Vega. C. Doehlemann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 204.
124. Geschichte der optischen und katoptrischen Anamorphosen. K. Ruoss. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 1.
125. Sur les decouvertes mathématiques de Wronski. S. Dickstein. Biblioth. math. 1894, 49, 85. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 71.]
126. Leopold Kronecker (7. XII. 1823—29. XII. 1891). Heinr. Weber. Mathem. Annal. XLIII, 1.
127. Nécrologue d'Ernest Edouard Kummer (1810—1893). Hermite. Mathesis Série 2, IV, 40.
128. Fürst Baldassarre Boncompagni Ludovisi. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, hist.-liter. Abthlg. 201.
129. Nécrologue d'Eugène Charles Catalan (1814—1894). P. Mansion u. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 33.

Gleichungen.

130. Sur le théorème de D'Alembert. V. Jamet. Mathesis Série 2, IV, 5.
131. Ueber Kronecker's Definition der Gruppe einer Gleichung. O. Bolza. Mathem. Annal. XLII, 253.
132. Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Heinr. Weber. Mathem. Annal. XLIII, 521.
133. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. E. Netto. Mathem. Annal. XLII, 436.
134. Die Normalform des allgemeinen Wurzelausdrucks und ihre Eigenschaften. Lipps. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 1. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 75.]
135. Die Auflösung der Gleichungen mittelst der Normalform. Lipps. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 65.
136. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 162, 193, 257, 321.
137. Résoudre l'équation $x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0$. Droz-Farny etc. Mathesis Série 2. IV, 277.
138. Résoudre le système $\sqrt{x} + \sqrt{y} = z$, $2x + 2y + p = 0$, $z^4 + pz^2 + q = 0$. Barbette, Listray, Verdeyen. Mathesis Série 2, IV, 208.

H.

Hydrodynamik.

139. Steady motion of a viscous liquid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axis. D. Edwardes. Quart. Journ. math. XXVI, 70.
140. Motion set up in viscous liquid by a rotating cylinder. D. Edwardes. Quart. Journ. math. XXVI, 157.
141. On the motions of solids in a liquid. Miss Fawcett. Quart. Journ. math. XXVI, 231.
142. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. W. Stekloff. Mathem. Annal. XLII, 273.

Hyperbel.

143. Quelques propriétés de l'hyperbole. Pirondini. Mathesis Série 2, IV, 217.
144. Engendrement de plusieurs hyperboles. Retali. Mathesis Série 2, IV, 227. — Barisien ibid. 228.
145. Hyperbole équilatère passant pur les quatre points dans lesquels un cercle coupe une conique. Droz-Farny, Colette, Gillet, Déprez, Mandart. Mathesis Série 2, IV, 53. — Cl. Servais ibid 95.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 13.

I.

Imaginäres.

146. Die Gauss'sche Darstellung complexer Zahlen in geometrischer Beleuchtung. Adalb. Breuer. Grun. Archiv. 2. R XII, 337.

147. Berichtigung zu dem Aufsatze über Systeme höherer complexer Zahlen. Theod. Molien. Mathem. Annal. XLII, 308. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 413.]
148. Sui gruppi di sostituzioni lineari. L. Bianchi. Mathem. Annal. XLII, 30; XLIII, 101. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 135.]

Interpolation.

149. Zur Cauchy'schen Interpolationsaufgabe. E. Netto. Mathem. Annal. XLII, 453.

Invariantentheorie.

150. Ueber die vollen Invariantensysteme. D. Hilbert. Mathem. Annal. XLII, 313.
151. On semiinvariants. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 66.
152. On reciprocants and differentialinvariants. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 169, 289.
153. On Pfaff-invariants. Cayley. Quart. Journ. math. XXVI, 195.
154. Ueber das Formensystem eines Kreisbogenpolygons vom Geschlecht Null. G. Pick. Mathem. Annal. XLII, 489.
155. Ueber die Invarianten algebraischer Functionen von Formen. E. Wölffing. Mathem. Annal. XLIII, 26.
156. Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart' ordine. L. Berzolari. Annali mat. Serie 2, XX, 101.
Vergl. Differentialgleichungen 35. Formen, Functionen 81. Substitutionen.

Iterirung.

157. Ueber Iterirung gebrochener Functionen. E. Netto. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 382.

K.

Kegelschnitte.

158. Zur Construction eines Kegelschnittes aus fünf Punkten. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 63.
159. Ueber die Construction von Kegelschnitten aus fünf Punkten oder fünf Tangenten. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 117
160. Ueber die Kegelschnitte um und in ein Fünfeck. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 245.
161. Ueber die Projection von fünf Punkten einer Ebene in fünf Punkten eines Kreises. F. Schur. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 247.
162. Projectiv-geometrischer Beweis des Satzes: der geometrische Ort aller Punkte, für welche die scheinbare Grösse eines Kegelschnittes dem Quadranten gleichkommt, ist ein Kreis. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 315.
163. Ueber die Achsenbestimmung von Kegelschnitten. O. Stoll. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 120. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 97.]
164. Ein System monoconfocaler Kegelschnitte. Keller. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 290.
165. Orthogonal conics. H. M. Taylor. Quart. Journ. math. XXVI, 148. — G. T. Bennett ibid. 155.
166. Sur le cercle de Boscovich. Casey. Mathesis Série 2, IV, 163.
167. Applications d'un théorème de Chasles. Balitrand. Mathesis Série 2, IV, 62, 81.
168. Quelques propriétés des coniques se rattachant à la théorie des transformations. Verbessem. Mathesis Série 2, IV, 184.
169. Conique lieu du sommet d'un triangle. Déprez. Mathesis Série 2, IV, 121.
170. Quatre droites a, b, c, d sont coupées par une cinquième e aux points A, B, C, D; les coniques circonscrites aux triangles bcd, dca, dab, abc et touchant a, b, c, d en A, B, C, D rencontrent e en un même point. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 145.
171. Extension of a theorem in plane geometry. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXVI, 212.
172. Enveloppes de certaines droites. Retali, Déprez, Droz. Mathesis Série 2, IV, 25.
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Krümmung 181. Oberflächen zweiter Ordnung 202. Parabel. Winkeltheilung.

Kinematik.

173. Rapport sur l'ouvrage de Mr Mannheim: Principes et développements de Géométrie cinématique. M. d'Ocagne. Mathesis Série 2, IV, Supplément.

Kreis.

174. Limite de la somme algébrique de certains arcs de cercle. Vladimirescu. Mathesis Série 2, IV, 46.
175. Sur le cercle des neuf points. Jos. Gillet. Mathesis Série 2, IV, 42. — J. Neuberg ibid. 183.
176. Lieu du centre du cercle inscrit à un triangle dépendant lui même d'un autre cercle. Barisien. Mathesis Série 2, IV, 29.
177. Quelle doit être la distance des centres de deux circonférences de rayons donnés pour qu'on puisse décrire une circonférence touchant les circonférences données, leur ligne des centres et une tangente commune? Barisien. Mathesis Série 2, IV, 101.
178. Sur deux circonférences dont l'une passe par le centre de l'autre. Droz-Farny et Déprez. Mathesis Série 2, IV, 144. — Brocard ibid. 145.
179. Sur trois circonférences ayant pour diamètres les trois côtés d'un triangle rectangle. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 207.
180. On coaxal systems of circles. R. Lachlan. Quart Journ. math. XXVI, 129.

Vergl. Rectification.

Krümmung.

181. Rayon de courbure d'une conique. A. Gob. Mathesis Série 2, IV, 133. — J. Neuberg ibid. 223.
182. Ueber geodätische Krümmung. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XLII, 505.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 18. Ellipse 59. Parabel 205, 206.

M.

Maxima und Minima.

183. Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen. V. v. Dantscher. Mathem. Annal. XLII, 89.

Vergl. Dreiecksgeometrie 49.

Mechanik.

184. Aequivalenz der Linientheilsysteme. Ferd. Kraft. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 87, 129.
185. Das Dreieck, bezogen auf seine Hauptträgheitsachsen. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 447.
186. Ueber gewisse Gleichungen und Constanten der mechanischen Quadratur und der Mechanik ebener Figuren. Rud. Skutsch. Grun. Archiv. 2. R XII, 111.
187. Quelques systèmes de tiges articulées. R. Bricard. Mathesis Série 2, IV, 111.
188. Ueber die gleitende und rollende Reibung bei der Fallmaschine. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 188.
189. Ueber die barometrische Höhenmessungsformel. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 63.

Vergl. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Mehrdimensionale Geometrie 192. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

190. Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. L. Berzolari. Annali mat. Serie 2, XXI, 1.
191. Osculirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n-Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 96.
192. Ueber die Bewegung eines Punktes in einer n-fachen Mannigfaltigkeit. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLII, 537.
193. Zur projectiven Geometrie. Wilh. Killing. Mathem. Annal. XLIII, 569.
194. Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. E. Liers. Grun. Archiv. 2. R. XII, 344.
195. Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni. G. Fano. Annali mat. Serie 2, XXI, 141.

O.

Oberflächen.

196. Sur la surface des ondes. Cayley. Annali mat. Serie 2, XX, 1.
197. Sulle evolute delle superfici i cui raggi principali di curvatura son legati dalla relazione $r_1 - r_2 = 2T_0 \; sen \left(\frac{r_1+r_2}{2T_0}\right) T_0 = const$ e sulle loro flessioni. Bened. Calò. Annali mat. Serie 2, XXI, 195.

198. Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni. Gemin. Pirondini. Annali mat. Serie 2, XXI, 33.
199. Sur deux classes de surfaces qui se correspondent. S. Mangeot. Mathesis Série 2, IV, 34.
Vergl. Functionen 82. Krümmung 182. Substitutionen.

Oberflächen zweiter Ordnung.

200. Orthogonal quadrics. H. M. Taylor. Quart. Journ. math. XXVI, 214.
201. On the general equation of a conicoid that has double contact with two given conicoids. A. C. Dixon. Quart. Journ. math. XXVI, 207.
202. Ueber das Problem eine Fläche zweiten Grades in einem der Gestalt und Grösse nach gegebenen Kegelschnitte zu schneiden. M. Krewer. Grun. Archiv. 2. R. XII, 185.
203. Lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur des quadriques concentriques et homothétiques. A. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 94.
204. Ueber zwei Fusspunktenflächen des Achsencomplexes einer Fläche zweiter Ordnung. Ch. Bökle. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 51.
Vergl. Ellipsoid.

P.

Parabel.

205. Osculirende Parabel. A. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 168.
206. Sur les paraboles osculatrios à une circonférence. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 197. — Cl. Servais ibid. 203. — Absolonne ibid. 204. — Déprez ibid. 205.
207. Propriété de la directrice d'une parabole. Mandart, Droz-Farny, Gillet, Verdeyen, Greenstreet. Mathesis Série 2, IV, 234.
208. Lieu d'un point de la corde des contacts d'une conique avec un des cercles qui lui sont bitangents. Gillet. Mathesis Série 2, IV, 171. — Collette, Droz, Déprez ibid. 172.
209. Enveloppe d'un cercle dont le centre se meut sur une parabole donnée et qui passe par le foyer de cette parabole. Lieu du point de rencontre de ce cercle avec diverses droites. Déprez. Mathesis Série 2, IV, 24.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 11.

Planimetrie.

210. Das Grundproblem der Flächen und Rauminhaltslehre. O. Rausenberger. Mathem. Annal. XLIII, 601.
211. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über endlich-gleiche Flächen. H. Dobriner. Mathem. Annal. XLII, 275. — Mor. Rethy. Ebenda 297. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 212.]
212. Der Satz: „Congruentes von Congruentem giebt Gleiches" in seiner Anwendung auf ebene Flächen. H. Dobriner. Mathem. Annal. XLII, 285.
213. Sur le centre des moyennes harmoniques. Verbessem. Mathesis Série 2, IV, 251.
214. Quelques propriétés d'une droite partagée en moyenne et extrême raison. Clém. Thiry. Mathesis Série 2, IV, 22.
215. Triangle dont le perimètre est égal au diamètre du cercle circonscrit. Mlle de Haas, Cl. Thiry, Droz-Farny, Collette, Mandart, Delahaye. Mathesis Série 2, IV, 122.
216. A Euclidean proof of Casey's extension of Ptolemy's theorem. J. H. Taylor. Quart. Journ. math. XXVI, 228.
217. Propriétés du quadrilatère. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 252.
218. Sur quelques quadrilatères spéciaux. J. Neuberg. Mathesis Série 2, IV, 268.
219. Ueber das durch Construction einander ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke über den Seiten eines beliebigen Dreiecks gebildete Sechseck. Leman. Grun. Archiv. 2. R. XII, 224. — F. W. Fischer. Ebenda 335.
Vergl. Dreiecksgeometrie. Trigonometrie. Winkeltheilung.

Potential.

220. A note on spherical harmonics. F. W. Dyson. Quart. Journ. math. XXVI, 30.

Q.

Quadratur.

221. Relation entre l'aire d'une ellipse, celle de la podaire et de l'antipodaire de son centre. Gillet, Déprez. Mathesis Série 2, IV, 257.

222. Sur l'aire de quatre courbes du sixième ordre. Droz-Farny. Mathesis Série 2, IV, 51.
223. Aire comprise entre la courbe $y^2(x^2+a^2)^2=a^6(x^2+b^2)$ et son asymptote réelle. Absolonne et Vladimiresen. Mathesis Série 2, IV, 205.
Vergl. Planimetrie 210, 211, 212.

R.

Rectificator.

224. Il concetto di lunghezza e la retta. Rod. Bettazzi. Annali mat. Serie 2, XX, 19.
225. Beliebig weit angenäherte π-Construction. J. E. Böttcher. Grun. Archiv. 2. R. XII, 444.
226. Valeurs approchées de π. Mathesis Série 2, IV, 162.
227. Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven. P. Stäckel. Mathem. Annal. XLIII, 171.
Vergl. Functionen 80. Geschichte der Mathematik 106, 121. Kreis 174.

Reihen.

228. Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich. Alfr. Pringsheim. Mathem. Annal. XLII, 153.
229. Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile. G. Vivanti. Annali mat. Serie 2, XXI, 25.
230. Sulle serie di potenze. S. Pincherle. Annali mat. Serie 2, XXI, 188. — G. Vivanti. Ebenda 192.
231. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Ch. Hermite. Annali mat. Serie 2, XXI, 289. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 154.]
232. Ableitungen arithmetischer Reihen. Fr. Rogel. Grun. Archiv. 2. R. XII, 37.
233. Sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers. E. Barbette. Mathesis Série 2, IV, 105, 142.
234. Sur la relation $S_3=S_1^2$. E. Gelin. Mathesis Série 2, IV, 220.
235. Soit Sp la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers, démontrer que $S_5=\frac{4}{3}S_1^2(S_1-1)+S_3$. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 209.
236. On the series $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\cdots$ J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXVI, 48.
237. On a series involving inverse squares of prime numbers. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXVI, 33 [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 538.]
238. Sur l'évaluation approchée d'une série elliptique. E. Cesaro. Mathesis Série 2, IV, 177.
Vergl. Bestimmte Integrale. Functionen 76, 86.

S.

Singularitäten.

239. Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für Singularitäten von algebraischen Raumcurven mit Anwendungen auf Realitätsverhältnisse. Franz Meyer. Mathem. Annal. XLIII, 286.

Stereometrie.

240. Ein stereometrisches Analogon zum Pythagoreischen Lehrsatz. Kloss. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 64. — Pützer. Ebenda 64. — K. Fink. Ebenda 192. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 151.]
241. Ueber einige Sätze aus der elementaren Raumgeometrie. H. Seipp. Grun. Archiv. 2. R. XII, 16.

Substitutionen.

242. Ueber den Zusammenhang in Reihen mit einer Anwendung auf die Theorie der Substitutionen. P. Hoyer. Mathem. Annal. XLII, 58.
243. On groups of substitutions that can be formed with nine letters. E. H. Askwith. Quart. Journ. math. XXVI, 79.
244. List of the substitution groups of nine letters. F. N. Cole. Quart. Journ. math. XXVI, 372.

245. Zur Theorie der Tripelsysteme. Eug. Netto. Mathem. Annal. XLII, 143.
246. Concerning triple systems. E. Hastings Moore. Mathem. Annal. XLIII, 271.
247. Ricerche sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici. L. Bianchi. Annali mat. Serie 2, XXI, 237.
248. Reppresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni. Ern. Pascal. Annali mat. Serie 2, XX 163.
249. Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4. O. Hölder. Mathem. Annal. XLIII, 301.
250. Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie die 3°-ordine, e sui gruppi ad esso isoformi. Ern. Pascal. Annali mat. Serie 2, XX, 269, XXI, 85.
251. Alcune ricerche sul gruppo delle sostituzioni e sulla configurazione delle 16 rette della superficie di quarto ordine a conica doppia. Italo Pereno. Annali mat. Serie 2, XXI, 57.
Vergl. Imaginäres 148.

T.

Tetraeder.

252. Projective Form eines metrischen Satzes. P. Muth. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 116. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 155.]
253. Gleichseitiges Tetraeder. R. Hoppe. Grun. Archiv. 2. R. XII, 327.
254. Volume d'un certain tétraèdre. Appell. Mathesis Série 2, IV, 40.
255. Sur le tétraèdre isoscèle. Cayley. Mathesis Série 2, IV, 69.

Thetafunctionen.

256. Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. A. Krazer. Mathem. Annal. XLIII, 413, 457.
257. On a geometrical proof of Jacobi's ϑ-Formula. H. F. Baker. Mathem. Annal. XLIII, 593.
Vergl. Functionen 76, 86.

Trigonometrie.

258. Démonstration de $tg\,x - x < \frac{1}{3}\,tg\,x^3$ en prenant $x < \frac{\pi}{2}$. Absolonne. Mathesis Série 2, IV, 73.
259. La formule de Nicolas de Cusa. H. Brocard. Mathesis Série 2, IV, 183.
260. Théorème de trigonométrie. P. Delens. Mathesis Série 2, IV, 68.
261. A construction for a regular polygon of seventeen sides. Herb. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXVI, 206.
262. Calcul des longueurs de certaines cordes dans la circonférence circonscrite à un triangle donné. Delahaye et Déprez. Mathesis Série 2, IV, 76.

U.

Unendlichgross.

263. Sur une proposition fondamentale du calcul asymptotique. E. Cesaro. Mathesis Série 2, IV, 57.
Vergl. Geschichte der Mathematik 118.

W.

Wärmelehre.

264. Der aus den Sätzen über Wärmegleichgewicht folgende Beweis des letzten Multiplicators in seiner einfachsten Form. Ludw. Boltzmann. Mathem. Annal. XLII, 374.
265. Zur Mechanik der atmosphärischen Bewegungen. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv. 2. R. XII, 274.
266. Die thermischen Capacitäten fester und tropfbar flüssiger Körper, insbesondere des Wassers. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 124, 192.

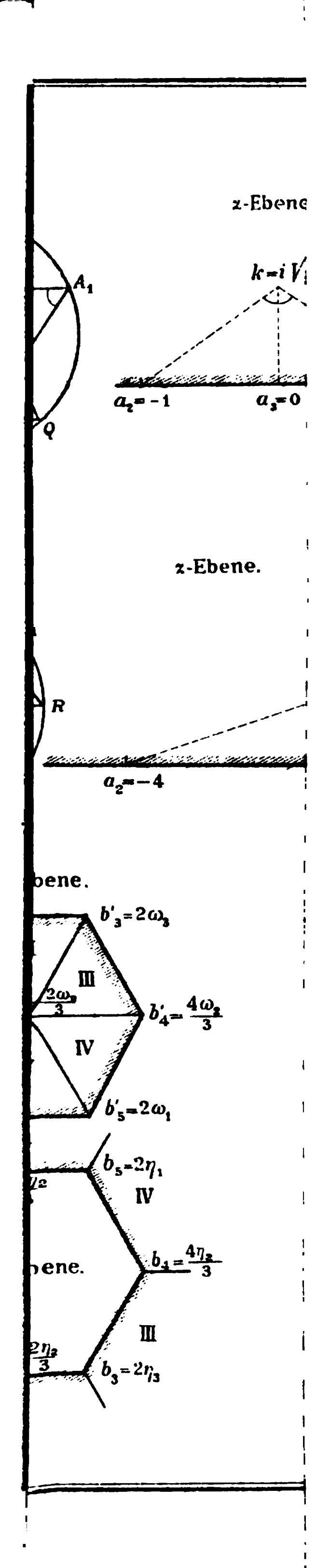
Winkeltheilung.

267. Ueber die Trisection des Winkels mittelst beliebiger fester Kegelschnitte. St. Glaser. Grun. Archiv. 2. R. XII, 367. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 524.]
268. Theilung eines beliebigen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile mit Hülfe von Modellen. Arth. Strauss. Grun. Archiv. 2. R. XII, 177.

Z.

Zahlentheorie.

269. Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre. Kraus. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 11. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 262.]
270. Zur Theorie der Functionen eines cubischen Körpers. Ludw. Baur. Mathem. Annal. XLIII, 505.
271. Ueber vollständige und complementäre Perioden und Restreihen unendlicher Decimalbrüche. Jos. Mayer. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 376.
272. Bestimmung der Anzahl aller unter einer gegebenen Zahl m liegenden Primzahlen, wenn die unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzahlen bekannt sind. Graefe. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 38.
273. Ueber relative Primzahlen. L. Goldschmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXXIX, 203.
274. Notes on the division of the circle. F. S. Carey. Quart. Journ. math. XXVI, 322.
275. Sul teorema che ogni progressione aritmetica, nella quale il primo termine e la ragione sono primi fra loro, contiene infiniti numeri primi. Italo Zignago. Annali mat. Serie 2, XXI, 47.
276. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Reihe, in welcher das Anfangsglied zur Differenz relativ prim ist, unendlich viele Primzahlen enthält. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 439.
277. Zur Zahlentheorie. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 431, 445. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 556.]
278. Ueber die Factoren der Zahlen. G. Speckmann. Grun. Archiv. 2. R. XII, 435.
279. Le plus petit multiple de $1, 2, 3, \ldots 2n$ est égal à celui de $n+1, n+2, \ldots 2n$. Hacken, Listray, Verdeyen. Mathesis Série 2, IV, 236.
280. Sur un théorème d'arithmétique. V. Jamet Mathesis Série 2, IV, 271.
281. On powers of numbers whose sum is the same power of some number. Artemas Martin. Quart. Journ. math. XXVI, 225.
282. Le carré de la somme de n carrés est somme de n carrés. Boutin etc. Mathesis Série 2, IV, 277.
283. Déterminer n de manière que $1+3+3^2+\cdots+3^n$ soit un carré. Fauquembergue. Mathesis Série 2, IV, 169.
284. P étant un nombre premier; si pN est la somme de $p+1$ carrés, dont p soient égaux, N jouit de la même propriété. Fauquembergue, Verhelst, Spino, Verdeyen, Droz. Mathesis Série 2, IV, 173.
285. Le carré de tout nombre impair autre que 1 est la somme de deux carrés ou la somme de trois carrés. V. Jamet. Mathesis Série 2, IV, 27. — E. Catalan ibid. 52.
286. Sur l'identité $(n+1)^3 - n^3 = 1 + 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Laurens. Mathesis Série 2, IV, 40.
287. Produit de deux facteurs dont chacun est la somme de deux nombres triangulaires. H. Mandart. Mathesis Série 2, IV, 123.
288. Déterminer n de maniére que la somme des n premiers nombres triangulaires soit aussi un nombre triangulaire. C. Spino. Mathesis Série 2, IV, 171. — H. Brocard ibid. 171.
289. Soit $T_n = \frac{1}{2} n (n+1)$ le n^e nombre triangulaire, des valeurs négatives de n étant admises. Démontrer que $(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma)$ est une somme de trois nombres triangulaires, si $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma = 0$. Francois. Mathesis Serie 2, IV, 211.


z-Ebene
$k=i\sqrt{}$
A_1
Q
$a_2=-1$
$a_3=0$
z-Ebene.
R
$a_2=-4$
bene.
$b'_3=2\omega_3$
III
$\frac{2\omega_2}{3}$
$b'_4=\frac{4\omega_2}{3}$
IV
$b'_5=2\omega_1$
$b_5=2\eta_1$
IV
bene.
$b_4=\frac{4\eta_2}{3}$
III
$\frac{2\eta_2}{3}$
$b_3=2\eta_3$



Historisch-literarische Abtheilung.

Aus Manuscripten und einer früheren Publication.

Von

Dr. ARMIN WITTSTEIN.

1. Denjenigen, die für Johannes de Lineriis oder J. de Liveriis nicht längst alles Interesse verloren haben, — worüber man sich freilich kaum verwundern dürfte — ist möglicherweise die Nachricht willkommen, dass ein, wie mir scheint (d. h. ohne aus Autopsie urtheilen zu können), sehr werthvoller, einst im Benedictiner-Stift „Zu St. Emmeram“ in Regensburg verwahrter Codex [14684 (Em. G 68) membr. in 4° S. XIV. 100 fol.] der Münchener Hof- und Staatsbibliothek auf f. 22 bis f. 30 *Johannis de Lineriis liber de minutiis a. 1356* enthält.* Bei A. Favaro, M. Steinschneider, B. Baldi (sämmtlich im XII. Bande von Boncompagni's „Bull. di Bibl. e di St. d. Sc. Mat. e Fis.“) und M. Cantor (im II. Bande seiner „Vorlesungen“), den Gelehrten, die sich in neuester Zeit mit jenem Auctor (oder sind es deren zwei?) beschäftigt haben, fand ich keinen Hinweis auf die eben angeführte Quelle und halte aus diesem Grunde meine Notiz für hinreichend gerechtfertigt.

2. Weiter verdienen zwei Codices der Leipziger Universitätsbibliothek einige Beachtung. Der erste [Cod. mscr. lat. 1469 chart. 378 Blätter in kl. 4°, von denen die 7 ersten aus Pergament bestehen. Ein Sammelband von etwa 50, wohl grösstentheils im 15. Jahrhunderte geschriebenen Tractaten**] würde vielleicht lohnen vom Mathematiker, an

* f. 1 Joannis de Sacrobosco Anglici Algorismus. f. 8 Eiusdem tract. de sphaera. f. 79 „Tractatus de imaginibus thebet benchorat“. Inc. Aspectus autem planetarum sic potest inveniri etc. f. 81 Demonstratio quaedam (geometrica). f. 82 Messehallach Practica astrolabii. f. 99 „Notabilia de novem limitibus“.

** Abkürzungen treten darin in grosser Anzahl auf. Nicht überall findet sich das Trennungszeichen bei am Ende einer Zeile abgebrochenen Wörtern; der Diphtong æ ist meistens durch e ausgedrückt; am Ende der Wörter steht häufig ein langes s; der Punkt über dem i ist nirgends durch ein Strichelchen ersetzt. Von den Majuskeln und Minuskeln wüsste ich nichts Auffallendes zu sagen, als dass erstere manchmal recht verschnörkelt sind. Der Cod. gehört nicht zu denen, die durch Sauberkeit von Schrift und Zeichnungen oder künstlerische Behandlung der Initialen das Auge angenehm fesseln, wie beispielsweise Cod. 1399, aus dem Anfange des 15. Jahrhunderts, dem ausserdem noch einige, sehr hübsch ausgeführte Miniaturmalereien, darunter ein segnender Heiland in edler Haltung, reizvollen Schmuck verleihen.

den er sich vorwiegend wendet, durchgesehen zu werden, wenn auch die Ausbeute nicht viel mehr als wünschenswerthe Belege zur Erhärtung, resp. solideren Fundirung, der einen oder anderen These gewähren sollte. Hier sei daraus hervorgehoben: f. 69 bis f. 111 Praxis geometriae Euclidis. f. 111 und f. 207 De baculo Jacob. f. 165 Incipit arismetrica magistri Johannis de Müris. f. 184 Tractatus algorismi proportionum. f. 267 Compositio astrolabii. f. 300 Instrumentum ad explorandam altitudinem solis et stellarum. f. 313 Liber Messahallach.

Der zweite [D. C. 329. Aus der „Refaïya." 74 vortrefflich conservirte Blätter eines stark glänzenden Papiers in dunkelbraunem orient. Ledereinbande und im Format von 15 × 21 cm] umfasst drei Abhandlungen von Muḥammed ben Maḥmûd al-Mâridinî und ʿAbdurraḥmân ben ʿAbdallâh at-Ṭâǵûrî über den Quadranten (rubʿ al-muḳanṭarât und ar-rubʿ aś-śamâlî) und beginnt auf f. 3 r⁰. mit des Ersteren Bearbeitung:

حاوى المختصرات فى العمل بربع المقنطرات تاليف الشيخ...... الماردينى

Zur Literatur des darin behandelten Beobachtungs-Instrumentes überhaupt möchte ich noch eine, ich glaube wenig bekannte, Druckschrift von W. H. Morley, „Description of an Arabic Quadrant" (London, 1860; 8⁰. M. 4 Figuren-Tafeln) betitelt und im „Journal of the Royal Asiatic Society" erschienen, in Kürze erwähnen. Der hierin beschriebene Quadrant ist von Messing, mit Gold, Silber und Kupfer eingelegt, und war damals in tadellosem Zustande; sein Halbmesser beträgt ungefähr 17,5 cm. Er wurde im Jahre 1334 für den obersten مؤذّن muëḏḏin (welcher vom Minaret herab zum Gebet ruft und nicht mit dem gleichfalls amtlich angestellten مؤقّت mowaḳḳet, dem Zeitverkündiger, zu verwechseln ist) der Haupt-Moschee in Damaskus angefertigt, deren Polhöhe dabei zu $+33^{0}27'$ angenommen. Die „Connaissance des Temps pour l'an 1892" giebt für den „nördlichen Thurm der grossen Moschee" $+33^{0}30'31''$ und $33^{0}57'59''$ für dessen östliche Länge von Paris an. Nach dem Verzeichnisse des Uluġ Beg (a. 1437) würde man Damaskus unter $+33^{0}15'$ und 70^{0} östl. L. von den Canaren zu suchen haben, d. h. an einem Orte, dessen Lage in Br. um etwa $^{1}/_{4}$ Grad und in L. um $15^{0}.8$ davon abweicht.

3. Der vierte Codex, den ich mir erlaube der Aufmerksamkeit der Leser mit ein paar Begleitworten zur Begutachtung zu unterbreiten, stammt aus der überaus kostbaren Büchersammlung (von 500 sehr seltenen Druckwerken und 330 Handschriften) Joh. Albert Widmannstad's*

---

* Er war 1506 in Nellingen bei Ulm geboren, befand sich 1529 im Gefolge Karls V. in Bologna, lebte dann lange in Neapel und Rom, wurde 6 oder 7 Jahre vor seinem Tode Kanzler von Nieder-Oesterreich und starb 1558 als Canonicus zu Pressburg. Selbst tüchtiger Kenner des Syrischen und Arabischen, zählt er zu den ersten Förderern des Studiums dieser Sprachen in Deutschland.

(oder richtiger Widmanstadt?), die durch Ankauf in den Besitz des Herzogs Albrecht V. von Bayern kam und gegenwärtig der Hof- und Staatsbibliothek zu München einverleibt ist; dort trägt er jetzt die Signatur: Cod. arab. Nr. 853, wozu noch die speciellere im Catal. codd. mscr. hinzukommt: Cod. or. 160 bombyc. 20,5 cm h. 13,5 cm br. 49 fol. 31 lin.

Es ist eine marokkanische, fast 640 Jahre alte Handschrift, die uns darin vorliegt, und aus der ich hier einige, allerdings dürftige Excerpte, auf die ich mich aber durchaus beschränken muss, mittheilen werde. Zunächst sind es die Worte ganz am Ende, die unverkürzte Wiedergabe fordern:

تم القانون لاوماثيوس اصلاح ابو اسحق النقاش المعروف

بالزرقالة وكان الفراغ منه فى العشر الاوسط من شهر

ذى الحجة عام خمسة وخمسين وستماية بحمد الله وعونه

Sie sagen aus, dass wir hier an den Schluss des von Abû Isḥaḳ annaḳḳâś, genannt Az-Zarḳâle, bearbeiteten (eigentlich rectificirten) Ḳânûn des Eumâthîôs(?) gelangt sind, und das Ganze eine mit dem Originale verglichene Abschrift sei, die im ḏû'-l-ḥeǵe 655 (begann 1257 December 8) vollendet wurde. „Gelobt sei Gott und seine Hilfe!" — Wer mag dieser Eumathios gewesen sein, oder haben wir es dabei wieder mit einer gewöhnlichen arabischen Corruption fremder Eigennamen zu thun?

40 Blätter der Handschrift füllen astronomische Tafeln aus, 8 sind einer Einleitung (nicht Vorrede, مُقَدِّمَة gewidmet, die also beginnt:

باب معرفة الشمس من البروج والدرج والدقايق بالجدول

oder, frei übersetzt, wie der Lauf der Sonne im Thierkreis nach Graden und Minuten in einer Tafel vorgestellt werden kann. Zur allgemeinen Information über den Inhalt reicht es aus, dem Manuscript eine mässige Anzahl beliebig herausgegriffener Kapitel-Ueberschriften zu entnehmen.

f. 9v°. جدول لاخراج التواريخ بعضها من بعض فى السنين المجموعة

f. 10. جدول المبسوط فى اخراج التواريخ الثلثة

f. 12r°. جدول لمعرفة شهور الفرس

f. 12v°. مواضع الشمس المقومة فى السنة الاولا بعد الطرح

f. 20. مواضع حصّة القمر فى الشهور العجمية وايامها

f. 25. تمام جدول مواضع زحل المقومة

f. 38. مواضع عطارد المقومة

Bis jetzt war die Rede von einigen Zeitrechnungen und ihrem Verhältnisse zu einander; insbesondere von den Aeren der Araber, Perser, Syrer; von den persischen Monaten; von Sonnen-Oertern; von „Hiṣṣa-Werthen für den Mond an den einzelnen Tagen der fremden Monate“; von Saturn-Oertern; von Mercur-Oertern. Hiṣṣa hat im Allgemeinen die Bedeutung „Grösse“ und in diesem Falle die eines Proportionaltheiles, der in der Zeitrechnung von Chaṭâ und Uiġûr bei der Correction des mittleren Neumondes auftritt, und zwar theils positiv, theils negativ. Es dürfte Manchen interessiren, dass wir schon hier, lange vor Uluġ Beg, jenes Târîch gedacht finden.

f. 41. جدول مطالع البروج فى الفلك المستقيم وتعديل الايام بلياليها فى كل وقت	„Tafel für die Rectascensionen der Zeichen des Thierkreises und Tag-Gleichung für jedes Zeitmoment.“ Letztere kommt auf unsere Zeitgleichung hinaus.
f. 46 جدول اختلاف منظر القمر فى دايرة الارتفاع	„Tafel für die Höhen-Parallaxe des Mondes.“
f. 48. جدول كسوف القمر فى بعده الابعد	„Tafel für die Verfinsterung des Mondes in seiner grössten Entfernung.“ Die Opposition ist gemeint.

Es ist zwar nebensächlich, aber immerhin mittheilenswerth, dass ich in den von Abû Naṣr al-Fatḥ Ibn Ḫâḳân (einem 100 Jahre vor unserem Abschreiber lebenden Schriftsteller) verfassten Lebensbeschreibungen ausgezeichneter Männer Spaniens, die vor etwa 10 Jahren zu Konstantinopel im Druck erschienen, Nichts über Zarḳâlî erfahren konnte.

4. Schliesslich noch eine, mit dem Voraufgegangenen verglichen, wesentlich heterogene Bemerkung, deren Tendenz aber gleichfalls eine geschichtliche bleibt. Im 69. Theile (1883) des R. Hoppe'schen „Archiv der Mathematik und Physik“ habe ich specielle Aberrations- oder Täuschungsfläche die Gesammtheit aller optischen Täuschungen genannt, welche uns die von einem Fixstern ausgehenden Lichtstrahlen bereiten, wenn dieser im Nord- oder Südpol der Ekliptik steht und das ganze Jahr hindurch beobachtet werden kann. Ein solches Gebilde entsteht durch Bewegung einer Geraden, welche gleichzeitig einen Kreis vom Halbmesser R und eine Ellipse von den Halbachsen a und b trifft, sowie einen geraden elliptischen Kegel berührt, der die gegebene Ellipse zur Normal-Directrix und das Kreiscentrum zu seinem Mittelpunkt hat. Liegt letzterer im Anfangspunkte der Coordinaten, und ist die Leitlinie des Kegels in der Höhe h über der Ebene der XY angenommen, während der Kreis in dieser

um den Anfangspunkt beschrieben wird, so ergiebt sich für die Gleichung der Fläche der Ausdruck zwölften Grades:

$$\ldots + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = \frac{R^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot (x^2 + y^2) + z^2 \cdot \frac{a^2 - b^2}{h^2} \cdot \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) \pm 2xyz \cdot \frac{a^2 - b^2}{abh} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2}}}.$$

Derselbe stellt zwei windschiefe Flächen dar, die sich nur durch den Windungsmodus von einander unterscheiden, und geht für $a = b$, d. h. für eine kreisförmige Erdbahn, in das einschalige Rotations-Hyperboloïd

$$\frac{x^2 + y^2}{\frac{a^2 R^2}{a^2 + R^2}} - \frac{z^2}{\frac{a^2 h^2 R^2}{(a^2 + R^2)^2}} - 1 = 0$$

über. Ist $R = 0$, oder besteht keine Aberration, so folgt aus der ersten Gleichung der gerade elliptische Kegel $\frac{z^2}{h} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, aus der zweiten der Rotationskegel $\frac{z^2}{h^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 0$. Damit sind alle, an bedeutende Geschichts-Abschnitte (1543, 1609, 1728 resp. schon 1676) geknüpfte Wandlungen erschöpft und präcisirt, welche der erklärte geometrische Ort, von der Geraden an, im Laufe der Jahrtausende in seiner Gestaltung durchgemacht hat, bis er endlich im Jahre 1809 dauernde Consolidation in einer Fläche äusserst complicirten Charakters finden sollte. Damals gab Gauss, aus dem grossen und verwickelten Complex Dessen, was man unter der Aberration des Lichtes begreift, den Kern herausschälend, seine allen späteren Zeiten zur Richtschnur dienende bekannte Definition des Begriffes der Fixstern-Aberration, mit der man die Fresnel'sche zusammenfallend betrachten kann, während Cauchy in der Aberration des directen Lichtes eine Drehung der Wellen-Normale erblickt.

Zur Geschichte des „Sinus".

Von

J. Ruska.

Die neuerdings wieder aufgeworfene Frage nach der Herkunft des Wortes sinus (M. Koppe, die Behandlung der Logarithmen und der Sinus, Programm des Andreas-Realgymnasiums. Berlin 1893. p. 32; M. Cantor, Geschichte der Mathematik I[2] p. 693) giebt mir zu einigen Bemerkungen Gelegenheit, die sich hauptsächlich auf den ersten Theil der Munk'schen Hypothese beziehen.

Es ist von vornherein klarzustellen, dass es sich bei der Frage um zwei von einander ganz unabhängige Dinge handelt: erstens, wann tritt das Wort zum ersten Mal in den lateinischen Schriften des Mittelalters auf, und auf welche Quelle lässt es sich zurückführen; zweitens, wie weit hinauf lässt sich das Wort gaib bei den Arabern verfolgen, ist es ein von ihnen selbst geprägter Ausdruck oder ein missverständlich arabisirtes Lehnwort? Es ist klar, dass die von Munk und Wöpcke aufgestellte bekannte Hypothese nicht zur „Legende" wird, wie Koppe S. 33 behauptet, wenn sich herausstellt, dass der erste, welcher ǵaib mit sinus übersetzte, nicht Plato von Tivoli, sondern ein anderer war.

Um mit der zweiten Frage zu beginnen, so ist es vollkommen ausgeschlossen, dass ein Araber auf den Einfall kam, das Wort ǵaib „ebenso direkt zur Bezeichnung der Abschnitte der vom Durchmesser in der Mitte geschnittenen Sehne" zu verwenden, wie es „im gewöhnlichen Leben zur Bezeichnung des Busenausschnitts eines Gewandes benutzt wurde". Denn das Wort ǵâba bedeutet in erster Linie (vergl. Lane's Arabic-English Lexicon I p. 479) ein Loch machen, durchbohren, ein rundes Stück aus der Mitte herausschneiden, aushöhlen, dann erst durchschneiden, vom Vogel, der die Luft durchschneidet, und in ähnlichen Bildern, die die Grundbedeutung durchblicken lassen. Dem entsprechend ist ǵaib der ṭauq, das heisst Halsring (cf. Lane I 492), die runde Oeffnung des Hemdes und dergl., dann eine Aushöhlung, also Bausch, Tasche, endlich in übertragenem Sinn Busen, Herz. Zur Bezeichnung der Hälfte einer Sehne also ein Wort, welches vielleicht zur Bezeichnung eines Kreises verwendet werden könnte, aber in keinen vernünftigen Zusammen-

hang mit der Definition „Hälfte der Sehne des Doppelten des Bogens" (niṣf watar ḍiʿf elqaus, cf. Liber mafâtîḥ al-olûm ed. van Vloten p. 206; Sprenger, Dictionary of the technical terms I 190) zu bringen ist! Die Verlegenheit der späteren Araber dem Wort selbst gegenüber spiegelt sich in den zahlreichen Lesarten der Handschriften, die alle auf die Consonantenverbindung حٮٮ zurückzuführen sind; da findet sich ausser جيب ǵaib in dem erwähnten Liber maf. p. 205 حنب ḥanab, Krümmung an den Beinen eines Pferdes; حبن ḥibn Beule, oder ḥaban Wassersucht; durch Einschaltung eines weiteren Zeichens entstand aus جيب mit Verschiebung der Punkte حبيب ḥabîb, Freund (p. 206); endlich liest man Iḫwân eṣ-ṣafâ ed. Dieterici p. 295 (und „Propädeutik der Araber" p. 171 im Wörterverzeichniss) خبيب ḫabîb, Graben oder Furche im Boden.* Wer die präcise und klare Terminologie der Araber kennt, wird ihnen nicht zutrauen, dass sie zur Benennung des fraglichen Begriffs ein Wort wählten, das in gar keiner Beziehung zu demselben steht. Das lässt sich kaum schlagender beweisen, als durch den von Abû'lwafâ eingeführten Begriff der trigonometrischen Tangente, welche bei ihm den Namen „Schatten" führt (sc. eines horizontalen Stabes in einer vertikalen Wand), eine wegen ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit trefflich gewählte Bezeichnung.

Es bleibt somit nur noch eine Möglichkeit, nämlich die, dass die arabischen Mathematiker den fertigen Begriff sammt seiner Benennung von den Indern übernahmen, durch welche im Gegensatz zur griechischen Trigonometrie die Hälfte der Sehne des verdoppelten Bogens eines Winkels in die Rechnung eingeführt wurde (Cantor, Gesch. d. Math. I² 616). Dies ist die bekannte, von Wöpcke (Journ. asiat. VI. Ser. 1. Bd., 1863, p. 478 n), Cantor (Gesch. d. Math. I¹ 632, I² 693) und Hankel (Zur Gesch. d. Math. im Alterthum und Mittelalter p. 280 n) vertretene Hypothese des Orientalisten Munk. Die Wörter jîva Sehne**, krama-jyâ gerade Sehne, utkrama-jyâ umgekehrte Sehne (Hankel l. c. p. 217; Cantor I² 612) sind die Vorbilder für die arabischen Ausdrücke ǵîb, ǵîb mustawâ, ǵîb maʿkûs, die Wiedergabe von jîva durch arabische Laute ist die einzig mögliche j = ǵ = dsch, das consonantische v hat als Aequivalent nicht و sondern ب (vergl. Slaven = Saqâliḇ, und umgekehrt in zahllosen ins Spanische übergegangenen

* Die Uebersetzung von Dieterici (Prop. p. 28) ist ohne Sinn: „Lehnt man einen Pfeil irgendwo an den Bogen, so nennt man dies den verkehrten Einschnitt; lehnt man ihn aber an die Mitte der Sehne und die Mitte des Bogens, heisst man das den gleichmässigen Einschnitt!"

** Es scheint, dass der ganze Wortcomplex Bogen, Sehne, Pfeil aus der indischen Trigonometrie herrührt, denn die Griechen helfen sich entweder durch Umschreibungen (Sehne = ἡ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα, εὐθεῖα ἐν κύκλῳ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, εὐθεῖα ἐλάττων τοῦ διαμέτρου; Sagitte = κάθετος τμήματος κύκλου, oder begnügen sich mit mehrdeutigen Ausdrücken (Sehne = ὑποτείνουσα) Bogen = περιφέρεια). Vergl. Cantor l. c. p. 616. Ist diese Trias aber arabisch, so wäre sie ein weiterer Beleg für die Anschaulichkeit der Terminologie.

geographischen und Eigennamen). Ueber die Lesung der Vocale entscheiden die Sprachgesetze und der Zusammenhang; bei Fremdwörtern ist die ausdrückliche Angabe derselben erforderlich; unterbleibt sie, so muss sich diejenige Lesung einbürgern, welche dem arabischen Ohr als die natürliche erscheint: aus ǵîb wird ǵaib, aus einem unverständlichen Fremdwort ein ähnlich klingendes der eigenen Sprache; ein in der Sprachgeschichte so gewöhnlicher Vorgang, dass es überflüssig ist, Beispiele anzuführen. Damit erstarrte das Wort zu einem mathematischen Kunstausdruck, bei dem der Araber selbst so wenig an den ursprünglichen Sinn dachte, als wir es thun, wenn wir von Bogen und Sehne oder gar von Sinus und Logarithmus reden. Ein Uebersetzer aber musste ǵaib mit sinus wiedergeben, falls er wörtlich übersetzte; so schreibt der Syrer Severus bar Schakkû* († 1241) ʿûbâ šarîrâ = sinus verus oder rectus, ʿûbâ hafîkhâ = sinus versus, und in des Barhebraeus Ascensio mentalis, einer astronomischen Schrift aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts, findet sich ʿûbâ šawjâ = sinus aequus, ʿûbâ pešîṭâ = sinus simplex, der Definition nach = ǵaib aʿẓam = sinus maximus (vergl. Payne Smith, Thes. Syriac. 2823).

Die Uebersetzung durch „sinus" ist demnach als richtig durch die syrischen Belege gesichert. Die verständigere Uebersetzung aber, welche einen Mann voraussetzt, dem der mathematische Inhalt und dessen klarer Ausdruck wichtiger ist als pedantische Wörtlichkeit, lautet natürlich „chorda" und führt so mit innerer Nothwendigkeit auf die alte Bezeichnung der Inder zurück. Beide Uebersetzungen finden sich vor: die zweite, wie Koppe nachgewiesen hat, bei Plato von Tivoli, die erste (nach Koppe) bei Gerhard von Cremona (um 1175 in Toledo). Für diesen Theil der Frage wird also Koppe Recht behalten, im Uebrigen bleibt die Munksche Erklärung unangetastet.

---

* Verfasser einer philosophischen Encyklopädie, deren mathematischen Theil ich herauszugeben im Begriffe stehe.

Recensionen.

Ueber einige Apparate zur Demonstration der Präcession und ihrer Folgen, sowie über einige mit der Präcession im Zusammenhange stehende historische Thatsachen. Von Dr. Karl Haas, kaiserl. königl. Professor. Mit zwei Illustrationen im Text und zwei Sternkarten. Aus dem Jahresberichte des kaiserl. königl. Staatsgymnasiums im VI. Bezirk. 30 S. Wien 1894.

Referent ist bei Weitem zu wenig Astronom, um die von Herrn Haas ersonnenen Vorrichtungen im Vergleiche mit anderen, welche den gleichen Zweck verfolgen, die Erscheinungen der Präcession anschaulich zu machen, fach- und sachgemäss beurtheilen zu können. Wir begnügen uns in dieser Beziehung auf die kleine Programmabhandlung selbst hinzuweisen, welche, wie uns scheint, mit grosser Unparteilichkeit einen solchen Vergleich anstellt. Die geschichtlichen Thatsachen, auf welche der Verfasser sich in der Ueberschrift bezieht, betreffen die Orientirung verschiedener Tempelbauten. Bekanntlich hat Nissen zuerst die Vermuthung ausgesprochen, die Orientirung römischer Tempel habe gemäss dem Sonnenaufgang am Gründungstage stattgefunden, und darauf beruhe die einigermassen verschiedene Richtung der Seitenwände jener Heiligthümer. Von astronomischer Seite wurden dann, auf Nissen's Vermuthung weiter bauend, genaue Messungen vorgenommen, und deren Ergebnisse sind vornehmlich von Lockyer (The dawn of Astronomy. London 1894) gesammelt worden. Herr Haas stützt sich wieder auf dieses und einige andere ähnliche Vorarbeiten, deren Zuverlässigkeit seiner Auffassung noch keinen Zweifel zulässt. Vielleicht ist er darin etwas vertrauensselig verfahren. Jedenfalls dürfte es zu weit gegriffen sein, die genaue Orientirung als Beweis dafür anzusehen, dass die alten Aegypter die Präcession kannten und durch die Achsenrichtung des Tempels das Datum astronomisch festlegen wollten. Will man Kenntniss der Astronomie und Tempelorientirung in Verbindung bringen, so wird die Sache wohl umgekehrt sich verhalten. Man baute den Tempel so, dass beim Sonnenaufgang am Gründungstag das Götterbild im finsteren Heiligthume von den Strahlen hell erleuchtet wurde; man fand mit Erstaunen, dass Solches nicht immer zutraf, und über die Gründe nachdenkend mag man allmählich die Präcession erkannt haben.

Cantor.

Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres. Ad codicum fidem recensuit, germanica interpretatione et commentariis instruxit Carolus Manitius. Leipzig 1894. B. G. Teubner. XXXIV, 376 p.

Hipparch aus Nicäa in Bithynien hat Beobachtungen hinterlassen, deren älteste dem Jahre 161, deren jüngste dem Jahre 126 v. Chr. angehört. Die astronomisch bedeutsamste seiner Entdeckungen ist die der Präcession der Tag- und Nachtgleichen, welche ihm in Folge einer im Jahre 134 durch ihn entworfenen Liste sämmtlicher Fixsterne nach Ort und Grösse gelang. Aelter als diese Entdeckung muss das einzige bis auf uns gekommene Werk Hipparchs sein, weil manche Stellen desselben sicherlich anders lauten würden, wenn Hipparch damals die Präcession schon gekannt hätte. Andrerseits ist eine ältere Schrift über die gleichzeitigen Aufgänge erwähnt, in welcher allem Vermuthen nach trigonometrische Rechnungen vorkamen, welche folglich die Erfindung dieser Behandlungsweise bereits voraussetzt und daher, wenn man nicht mit Tannery der Trigonometrie einen beträchtlich älteren Ursprung zuweist, sondern Hipparch für den ersten Trigonometer hält, nicht gerade eine Jugendschrift gewesen sein kann. Vielleicht darf man dem entsprechend das Jahrzehnt von 150 bis 140 als dasjenige vermuthen, innerhalb dessen die Kritik verfasst wurde, durch welche Hipparch dem berühmtesten älteren Astronomen Eudoxos von Knidos (um 360) und dem Dichter der Sternkunde Aratos (um 270) entgegentrat. Eudoxos hatte nämlich eine Beschreibung der verschiedenen Sternbilder verfasst, und Aratos hatte dieselbe, ohne an der Richtigkeit eines Wortes zu zweifeln, in Hexameter gebracht. Ein gewisser Attalos, Zeitgenosse des Hipparch, verfasste Erläuterungen zu dem Lehrgedichte, angeblich auf eigene erneute Beobachtungen sich stützend, in welchen er die meisten dortigen Angaben bestätigte. Das scheint für Hipparch die äussere Veranlassung gewesen zu sein, mit theilweise recht scharfen Gegenbemerkungen an die Oeffentlichkeit zu treten, und sie sind uns eben erhalten. Sie sind sogar in zwei etwas von einander abweichenden Fassungen erhalten, einer älteren, aufbewahrt in einer Vatikanhandschrift des XIV. bis XV. Jahrhunderts, einer jüngeren, für welche eine Florentiner Handschrift des XI. Jahrhunderts zu Gebote steht. Herr Manitius, der neue Herausgeber, hat sich wesentlich an den älteren Text gehalten und daneben eine deutsche Uebersetzung zum Abdrucke bringen lassen. Ein stattliches Wörterverzeichniss fehlt nicht und ebensowenig zahlreiche Anmerkungen, für welche der mit beobachtender Sternkunde nicht vertraute Leser recht dankbar zu sein alle Ursache hat.

Cantor.

Studien über Claudius Ptolemäus. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astrologie von Franz Boll, Dr. phil. Be-

sonderer Abdruck aus dem 21. Supplementbande der Jahrbücher für klassische Philologie. Leipzig 1894. B. G. Teubner. S. 51 bis 244.

Während bisher Claudius Ptolemäus meistens in der Geschichte der Astronomie, daneben in der Geschichte der Physik, der Geographie, der Mathematik eine Rolle spielte, in der Geschichte der Philosophie dagegen kaum genannt wurde, während seinem Auftreten in der Geschichte der Astrologie vollends, soweit eine solche überhaupt existirt, die Berechtigungsfrage im Wege stand, hat Herr Boll gerade diese Seiten seiner Thätigkeit zum Gegenstand gründlicher Studien gemacht, welche zu der von ihm geplanten Ausgabe der *Tetrabiblos* unentbehrlich waren, und deren Veröffentlichung jetzt zum Voraus Leser für dieses Werk vorbereiten und werben wird, wenn nicht soll. Herr Boll hat zunächst die Lebensgeschichte des Ptolemäus in gesicherte Grenzen einzuschliessen gesucht, indem er es von 100—178 ansetzte. Ein arabischer Schwätzer giebt ausdrücklich an, Ptolemäus sei 78 Jahre alt geworden, und Herr Boll meint, wenn auch nicht dem übrigen, was dort von ihm erzählt wird, doch dieser nüchternen Zahlenangabe vertrauen zu dürfen, und er mag darin um so eher Recht haben, als er den Ursprung des anekdotischen Beiwerkes erklärt. Im zweiten Jahrhundert war die Physiognomik ein Lieblingsgegenstand griechischer Schriftsteller, und dem, der aus den Gesichtszügen auf die ihm unbekannten Geistesgaben ihres Trägers schliesst, liegt es sehr nahe, zu dem ihm bekannten inneren Menschen, wenn wir so sagen dürfen, den entsprechenden äusseren Menschen nach freier Erfindung zu bilden. War solches der Fall, und rückt dadurch die Entstehung der Personalbeschreibung des Ptolemäus weit hinauf, so gewinnt zwar sie natürlich nicht, aber die mit ihr verbundene Altersangabe an Glaubwürdigkeit. Die Heimath des Ptolemäus nimmt Herr Boll mit Theodoros Meliteniotes in Ptolemais an. Als die Reihenfolge seiner Schriften ergiebt sich 1. der *Almagest*, 2. die *Tetrabiblos*, 3. die *Geographie*. Die anderen Schriften müssen dazwischen eingeschoben werden, so z. B. die kleine Schrift von der erkennenden Kraft und dem wichtigsten Seelenvermögen, *περὶ κριτηρίου καὶ ἡγεμονικοῦ*, vermuthlich zwischen 1. und 2. Das philosophische Glaubensbekenntniss des Ptolemäus kennzeichnet ihn als einen Eklektiker von peripatetischer Grundrichtung, welche aber durch mittelstoische Einwirkung, hauptsächlich der Schriften des Posidonios von Rhodos, eine wesentliche Verschiebung erlitt. Diese Auffassung, verbunden mit der angegebenen Reihenfolge der ptolemäischen Schriften, löst alle Zweifel an der Echtheit der Tetrabiblos und erklärt deren Widersprüche mit der jüngeren Geographie. In diesen Studien, welchen wir in unserer Werthschätzung gern einen Platz neben Heiberg's Archimedstudien und Euklidstudien einräumen, hat Herr Boll überall nur griechische Texte benutzt. Wir hoffen, er werde in seiner Ausgabe der Tetrabiblos gleichfalls Heiberg als Muster nehmen

und durch Beigabe einer Uebersetzung denjenigen Benutzern zu Hilfe kommen, die das Griechische nicht ganz geläufig lesen. CANTOR.

Jamblichi in Nicomachi arithmeticam introductionem liber. Ad fidem codicis Florentini edidit HERMENEGILDUS PISTELLI. Leipzig 1894. B. G. Teubner. IX, 195 S.

Seit Tennulius 1668 den Commentar des Jamblichus zur Arithmetik des Nicomachus im Drucke herausgab, war man für die Kenntniss des geschichtlich wichtigen Buches einzig auf jenen Druck angewiesen. Vor seiner Schnörkelschrift, welche die verschiedensten Buchstaben-Zusammenziehungen liebte, und von welcher das XVII. Jahrhundert entzückt war, mag manchem neueren Leser ein Grauen entstanden sein, und hatte man dieses überwunden, so kam ein neues Grauen über Einen durch den Zustand des Textes, der vielfach unverständlich erschien. Herr Pistelli hat nun endlich nach einer Florentiner Handschrift eine jener handlichen, sauber gedruckten Ausgaben hergestellt, welche die *Bibliotheca Teubneriana* bilden, und welche auf dem besten Wege sind, alle anderen Ausgaben zu verdrängen. Die Florentiner Handschrift ist nun freilich selbst nicht ganz fehlerlos und bedurfte mancher Correcturen, welche, wie immer in einem solchen Falle, mehr oder weniger als Vermuthungen aufzufassen sind. Dieselben gehören theils dem Herausgeber, theils Herrn Vitelli, theils insbesondere Herrn Heiberg an, welche beide letzteren Herren das Ergebniss ihrer Untersuchungen dem Herausgeber in uneigennützigster Weise zur Verfügung stellten. Wir bedauern nur mit Herrn Pistelli, dass er diese werthvollen Beiträge erst erhielt, als der grösste Theil des Buches schon gedruckt war, so dass nahezu drei Seiten voll Verbesserungsvorschlägen der Vorrede einverleibt werden mussten. Eine lateinische Uebersetzung ist dem griechischen Texte nicht beigegeben. Ein ausführliches Wortverzeichniss findet sich am Schlusse. CANTOR.

Abhandlungen über Variationsrechnung. Erster Theil: Abhandlungen von Joh. Bernoulli (1696), Jac. Bernoulli (1697) und Leonhard Euler (1744). Zweiter Theil: Abhandlungen von Lagrange (1762, 1770), Legendre (1786) und Jacobi (1837). Herausgegeben von P. STÄCKEL. 144 und 110 S. Leipzig 1894. W. Engelmann.

Die von Herrn Stäckel ins Deutsche übersetzten, beziehungsweise in der deutschen Ursprache neuerdings zum Abdruck gebrachten Abhandlungen bilden das 46. und 47. Heft von „Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften“. Es war nicht ganz leicht, unter den grösseren und kleineren Abhandlungen, die zur Ausbildung der sogenannten Variationsrechnung führten, diejenigen auszuwählen, welche man weglassen durfte, ohne dem Bilde der Entwicklung jenes Kapitels der Infinitesimalrechnung

einen ihm wesentlichen Strich zu rauben. Andrerseits würde ein Abdruck alles dessen, was in dieser Richtung vorhanden ist, allzu umfangreich geworden sein. Herr Stäckel, ein jüngerer Mathematiker, der durch Veröffentlichungen in „Crelle's Journal“ und in den „Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften“ seine doppelte Begabung zu eigentlich mathematischen wie zu geschichtlichen Arbeiten an den Tag gelegt hat, scheint das Richtige getroffen zu haben. Joh. Bernoulli's Aufgabe der Brachistochrone und das von Jac. Bernoulli als Gegenaufgabe gestellte isoperimetrische Problem durften nicht fehlen. Wichtig war Jac. Bernoulli's Auffindung der Brachistochrone, weil in ihr das Princip zuerst ausgesprochen wurde, eine Curve, welche als Ganzes gewisse Maximalbedingungen erfülle, müsse auch in ihren kleinsten Theilen die gleiche Eigenschaft besitzen. Die späteren Aufsätze beider Bernoulli durften fehlen, weil neue Grundgedanken der Variationsrechnung in ihnen nicht enthalten sind. Euler's *Methodus inveriendi etc.* zeigte dann zuerst, dass das Bernoulli'sche Princip nicht ausnahmslos gelte. Lagrange gab Namen und Algorithmus der Variationsrechnung und damit die analytische Form dessen, was bis dahin eine Auflösung geometrischer Aufgaben gewesen war. Legendre suchte analytische Kriterien dafür, ob ein Maximum oder ein Minimum stattfinde und leistete dadurch innerhalb der Variationsrechnung dasjenige, was Leibniz 1684 für die gewöhnlichen Maxima und Minima geleistet hatte. Jacobi endlich lehrte die zweite Variation genauer untersuchen und ergänzte Legendre's Versuch. Das sind die Arbeiten, welche in den beiden Heften vereinigt sind. CANTOR.

Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunction und des Laplace'schen Integrals. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Facultät der Universität Bern. Vorgelegt von JOHANN EGGENBERGER aus Grabs (St. Gallen) [Separatabdruck aus den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern für das Jahr 1893]. 72 S.

Jacob Bernoulli's *Ars conjectandi* gehört auch in dem unfertigen Zustande, in welchem der Verfasser sie zurückliess, zu den glänzendsten Schöpfungen des menschlichen Geistes und übt gewiss einen tiefgehenden Eindruck auf Jeden, der sie zu studiren unternimmt. Bahnbrechend für die Lehre von der Wahrscheinlichkeit a posteriori, welcher Bernoulli ihren Namen beilegte, ist die Muthmassungskunst auch eine Fundgrube für analytische Wahrheiten, die bei den Wahrscheinlichkeits-Untersuchungen zu Tage gefördert wurden. Das haben Gelehrte, wie De Moivre, wie Stirling, wie Laplace deutlich erkannt. Ein junger Schweizer, Dr. Eggenberger, hat, aufgefordert durch seinen Lehrer, Herrn Prof. J. A. Graf in Bern, die Ars conjectandi wie die späteren auf ihr fortbauenden Arbeiten

genauer Durchsicht unterworfen, und das Ergebniss dieser Forschung ist die uns vorliegende Doctordissertation. Wir stehen nicht an, sie als eine sorgsame und empfehlenswerthe Arbeit zu bezeichnen, mit deren Hilfe ein Leser sich über das allmähliche Entstehen des Gesetzes der grossen Zahlen, über dessen Beweis, über die damit im Zusammenhang stehenden Kapitel aus der Lehre von den bestimmten Integralen, eine leichte und gründliche Kenntniss verschaffen kann.

Cantor.

Euclidis Opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Vol. VII. **Euclidis Optica**, opticorum recensio Theonis, catoptrica, cum scholiis antiquis edidit J. L. Heiberg. Leipzig 1895. B. G. Teubner. LV, 362 S.

Schon in den Euklidstudien von 1882 hat Herr Heiberg aus einem Wiener Codex den Text der Euklidischen Optik zum Abdrucke gebracht, hat er überdies die Frage nach der Echtheit dieser Schrift in Erwägung gezogen, nachdem die Thatsache, dass Euklid Optisches verfasste, durch Zeugnisse des Proklos, des Marinos, des Theodoros Metochita (um 1300) gesichert erschien. Inzwischen hat Herr Heiberg sich mit Herrn Menge zur Anfertigung einer vollständigen Euklidausgabe vereinigt. Die fünf ersten Bände enthalten bekanntlich die Elemente. Der sechste noch nicht erschienene Band wird die Daten bringen. Der siebente Band hat jenem den Rang abgelaufen und vereinigt Euklid's Optik, eine Ausgabe derselben Schrift durch Theon von Alexandria, alte Scholien und eine Katoptrik. Der Optik ist eine jedenfalls im XIV. Jahrhunderte schon vorhandene lateinische Uebersetzung beigegeben. Dieselbe stammt unmittelbar aus dem Griechischen, arabische Bearbeitungen der Optik sind überhaupt noch nicht nachgewiesen. Aber auch die Originalausgabe der Euklidischen Optik, wenn wir so sagen dürfen, war weder im Urtexte, noch in der lateinischen Uebersetzung gedruckt. Gedruckt wurde dagegen wiederholt seit dem XVI. Jahrhunderte eine spätere Bearbeitung. Es war, wie man einer Pariser Handschrift glaubhaft entnommen hat, die Niederschrift einer Vorlesung über Euklid's Optik, welche einst Theon von Alexandria hielt, und unter diesen Namen hat Herr Heiberg sie neu abdrucken lassen. Sowohl der Wiener Codex der wirklichen Optik, als die zahlreicheren Handschriften von Theon's Vorlesungsheft sind mit alten Erläuterungen versehen, und auch sie sind in den uns vorliegenden Band aufgenommen. Eine Uebersetzung ist ihnen nicht beigegeben. Die Theon'sche Bearbeitung ist am besten in einem Vaticancodex des X. Jahrhundert's erhalten, und der gleiche Codex überliefert auch eine Katoptrik nebst Scholien zu derselben. Sie sind ebenfalls der neuen Ausgabe einverleibt. Gehört die Katoptrik Euklid an? Hat Euklid überhaupt eine Katoptrik verfasst? Herr Heiberg ist geneigt, beide Fragen zu verneinen. Eine Katoptrik war allerdings zu Euklid's Zeiten vorhanden, findet sie doch in der Optik S. 30 lin. 3 mit den Worten ὡς

ἐν τοῖς Κατοπτρικοῖς λέγεται Erwähnung, aber Herr Heiberg meint, in dieser Form könne ebensogut die Schrift eines anderen Verfassers, als eine eigene genannt sein. Wir theilen diese Ansicht vollkommen und verweisen zum Vergleiche auf die von Archimed erwähnten στοιχεῖα κωνικά, welche von Euklid herrühren dürften. Die im erwähnten Vaticancodex, aber auch in anderen Handschriften erhaltene Katoptrik nimmt Herr Heiberg für Theon in Anspruch, der allerdings nur den Inhalt alter Schriften in eine neue Form goss. Ob Archimed, der eine Katoptrik geschrieben haben muss, ob Heron, ob noch andere Schriftsteller von Theon benutzt wurden, bleibt zweifelhaft. Dieses der Inhalt des VII. Bandes der Euklidausgabe. Ueber die Textherstellung rechten oder auch nur berichten zu wollen, wäre eine Anmassung, vor der wir uns zu hüten wissen. CANTOR.

Die Arithmetik des Magisters Georgius de Hungaria aus dem Jahre 1499. Herausgegeben von COLOMAN V. SZILY und AUGUST HELLER. Separatabdruck aus den mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichten aus Ungarn. Bd. XII. Budapest und Berlin 1894.

Herr Árpád Hellebrant, Unterbibliothekar der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, war der Wiederauffinder des in der Ueberschrift genannten Druckwerkes. Er entdeckte dasselbe in einem Sammelbande der Hamburger Stadtbibliothek, und Herr Coloman von Szily war am 16. October 1893 in der Lage, das Original in einer Akademiesitzung in Budapest vorzulegen. Er sprach damals schon Vermuthungen über den Druckort der Arithmetik aus, und die Akademie beauftragte ihn, in Gemeinschaft mit Herrn August Heller, einen Neudruck der Arithmetik zu besorgen und der Persönlichkeit des Verfassers nachzuspüren. Ueber den Vollzug dieses Auftrages konnte am 10. Juni 1894 berichtet werden. Das Ergebniss ist im Wesentlichen folgendes. Die Arithmetik von 1499 ist mit höchster Wahrscheinlichkeit in Holland verfasst und gedruckt und zwar letzteres in der Druckerei des St. Michaelklosters bei Schoonhoven. Der Verfasser, Magister Georg von Ungarn, muss Unterricht bei einem der spanischen Sprache mächtigen Lehrer gehabt haben, und es liegt nahe, an Sanchez Ciruelo zu denken, der am Ende des XV. Jahrhunderts in Paris lehrte, und der die Wörter *cuento* und *millon* für 10^6 und 10^{12} benutzte, wie die Arithmetik von 1499 es thut. Magister Georg empfahl seine Schrift mit besonderer Wärme den Theologen, und man hat daraus geschlossen, er werde dem gleichen Stande angehört haben, vielleicht mit einem Dominicaner Georgius Hungarus identificirt werden müssen, von welchem eine handschriftliche Arbeit über die Religion der Türken in Rom aufbewahrt wird. Die Arithmetik selbst zerfällt in drei Bücher, deren erstes die damals üblichen neun Rechnungsarten mit der Feder lehrt; das zweite Buch lässt die Rechnungen mit Hilfe von Rechenmarken ausführen; das dritte Buch

löst Aufgaben der Regeldetri. Wesentlich neues findet sich in dem Werkchen nicht, aber es ist ebensowenig einer bekannten älteren Schrift vollständig nachgebildet.

CANTOR.

Georg Philipp Harsdörfer als mathematischer und naturphilosophischer Schriftsteller. Von Prof. K. RUDEL (Sonderabdruck aus der Festschrift des Pegnesischen Blumenordens S. 301—403). Nürnberg 1894. Druck von J. L. Stich.

Im X. Bande der Allgemeinen Deutschen Biographie hat Herr W. Creizenach (S. 644—646) das schriftstellerisch ungemein reich erfüllte Leben des Nürnberger Rathsherrn Georg Philipp Harsdörfer geschildert, der sich in weiteren Kreisen besonders durch acht Bände Gesprächspiele (1642 bis 1649) bekannt gemacht hat, und der 1644 den Blumenorden an der Pegnitz stiftete. Dieser Orden besteht bis auf den heutigen Tag und hat 1894 durch eine umfangreiche Festschrift die 250. Wiederkehr seiner Gründung und ihren Gründer gefeiert. Herr Rudel hat dabei die Aufgabe übernommen, Georg Philipp Harsdörfer als mathematischen und naturphilosophischen Schriftsteller zu feiern, und ehrlich gesagt, beneiden wir ihn darum nicht. Harsdörfer war ein ungemein belesener Mann. Man könnte ihn mit Wagner im Goethe'schen Faust vergleichen und ihm die Worte in den Mund legen: Zwar weiss ich viel, doch möcht' ich Alles wissen. Die Wissbegier war auch von einem entsprechenden Mittheilungsbedürfniss begleitet. Nur schade, dass ihm zur gehörigen Verdauung des unterschiedlos in sich Aufgenommenen die Zeit nicht ausreichte, beziehungsweise dass er die Zeit dazu sich nicht gönnte. Harsdörfer giebt uns, darin hat Herr Rudel in seinen Schlussworten ganz Recht, ein getreues Bild der durchschnittlich zu seiner Zeit üblich gewordenen Anschauungen, aber damit ist es auch fertig. Mathematisch zu denken scheint er nicht fähig gewesen zu sein, und mit Daniel Schwenter vollends, zu dessen Erquickstunden er einen II. und III. Band 1651 und 1653 veröffentlichte, ist er nicht entfernt gleichwerthig. Was bei Harsdörfer von mathematischen Angaben richtig ist, das hat er zweifellos abgeschrieben, und meistens können wir die benutzten Schriftsteller nachweisen, wozu er übrigens durch deren Nennung fast immer den Weg zeigt. Einmal versagt unsere Quellenkenntniss. Sei ein regelmässiges Sechseck gegeben, dessen Seiten der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 heissen sollen, wo also 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 einander parallel sind. Durchschnittspunkte bezeichnen wir durch zwei Zahlen, so dass 12 den Durchschnittspunkt von 1 mit 2 bedeutet. Wird nun über 1 ein gleichseitiges Dreieck nach aussen errichtet, und verbindet man dessen Spitze mit 34 und 45, so zerlegen diese Hilfslinien die 1 in drei gleiche Theile. Der Beweis, den Harsdörfer nicht bringt, wie es in der Gewohnheit von Büchern im Charakter der Erquickstunden lag, den aber auch Herr Rudel beizufügen unterlassen hat, ist am Einfachsten so zu führen:

Man verlängere 2, 4, 6 nach beiden Seiten, so entsteht ein grosses gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten aus je drei Sechsecksseiten bestehen, und dessen Spitze 26 zugleich die Spitze des über 1 nach aussen errichteten gleichseitigen Dreiecks ist. Die von Harsdörfer angegebenen Hilfslinien dritttheilen die Grundlinie des grossen Dreiecks, also auch die ihr parallele Sechseckseite 1. Von wem mag die hübsche Construction sein?

CANTOR.

Ueber die parabolische Spirale, eine Monographie von Dr. G. D. E. WEYER, Geheimrath und Professor in Kiel. Kiel und Leipzig 1894. Verlag von Lipsius & Tischer. 36 S.

Die kleine Untersuchung hat eine doppelte Bedeutung. Einmal wendet sie die Formeln der Differential- und Integralrechnung auf eine Curve an, welche in den bekannteren Lehrbüchern kaum jemals als Beispiel gewählt ist, wo solche erforderlich sind. Zum zweiten aber will Herr Weyer eine merkwürdige Eigenschaft dieser Curve in das Gedächtniss zurückrufen, welche so sehr in Vergessenheit gerathen ist, dass sie „nicht einmal in der Geschichte der Mathematik erwähnt wird“, wie die Vorrede sich ausdrückt. Herr Weyer ist zu dieser Anklage, von welcher auch Referent sich getroffen fühlt, vollkommen berechtigt, und wir weisen auf seine Abhandlung mit dem Bewusstsein hin, dass es uns sehr nützlich gewesen wäre, sie kennen zu lernen, bevor die erste Abtheilung des III. Bandes unserer Vorles. d. Gesch. d. Mathem. im Drucke erschien. Dort fehlt gleichfalls jede Notiz über eine Entdeckung Jacob Bernoulli's, welche im Januarheft 1691 der Acta Eruditorum enthalten, von ihrem Urheber in die Worte gekleidet worden ist: *unde patet quod in curvis etiam illis, quae rectificationem nondum acceperunt, nonnunquam partes aequales dissimilares assignari possunt.* Die Eigenschaft also, dass Bogenstücke einer und derselben Curve, welche der genauen Rectificirbarkeit sich entziehen, und welche einander keineswegs ähnlich sehen, doch als genau gleich lang bewiesen werden können, gehört auch Bernoulli's parabolischer Spirale an und wurde viel früher von ihm veröffentlicht, als Fagnano die entsprechende Eigenschaft der Lemniscate bekannt machte.

CANTOR.

Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelskarten von J. H. LAMBERT (1772). **Ueber Kartenprojection.** Abhandlungen von LAGRANGE (1779) und GAUSS (1822). Herausgegeben von A. WANGERIN [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 54 und 55]. Leipzig 1894 bei Wilhelm Engelmann. 96 und 102 Seiten.

Seit die Behandlung complexer Veränderlicher und solche enthaltender Ausdrücke einen besonderen Zweig der Mathematik bildet und als Functionen-

theorie benannt wird, hat auch die Lehre von den Abbildungen sich wesentlich verändert. Die praktische Aufgabe ist mehr und mehr in den Hintergrund getreten, die theoretisch-mathematische Auffassung hat sie zurückgedrängt. Wie diese Veränderung allmählich eintreten konnte, wenn nicht musste, zeigt am deutlichsten die Vergleichung der drei berühmten Arbeiten von Lambert, Lagrange, Gauss, welche Herr Wangerin in zwei aufeinander folgenden Bändchen der bekannten Sammlung von Klassikern der exacten Wissenschaften neuerdings herausgegeben und mit Anmerkungen versehen hat. Die Lagrange'sche Abhandlung — eigentlich Abhandlungen, denn formell zerfällt sie in zwei Aufsätze — musste überdies aus dem Französischen übersetzt werden. Während bei Lambert nur vorübergehend im § 73 die imaginäre Einheit auftritt, und der Verfasser sich beinahe entschuldigt, hier von einer Mittheilung Lagrange's Gebrauch zu machen, stützt sich bei Lagrange selbst die Integration der Differentialgleichung, welche Lambert durch Reihenentwickelung vollzog, wesentlich auf die Anwendung des Imaginären. Mit ihrer Hilfe gewinnt er für die Kartographie brauchbare Formeln. Gauss endlich behandelt die Aufgabe ausschliesslich als eine mathematische; es ist fast Zufall, dass die Kartographie seine Ergebnisse verwerthen kann; der in unseren ersten Worten angedeutete Uebergang hat sich vollzogen.

CANTOR.

Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunction und Euler'schen Integrale. Von Dr. HANS SCHENKEL. Uster-Zürich 1894. 67 S.

Der Verfasser hat sich in dieser Promationsschrift die aus dem Titel mit genügender Deutlichkeit zu entnehmende Aufgabe gestellt, über die Forschungen zu berichten, welche die sogenannten Gammafunctionen zu den fast bekanntesten Transcendenten gemacht haben. Dass auf 67 Seiten eine Vollständigkeit in dieser Beziehung unmöglich erreicht werden konnte, ist klar. Andererseits fehlt aber in H. Schenkel's Zusammenstellung keine der wichtigeren Arbeiten. Die Vorarbeiten Stirling's kurz erwähnend, verweilt er bei Euler, bei Gauss, bei Legendre, welche jene Transcendente so eigentlich geschaffen haben. In einem zweiten Abschnitte sind die Schriftsteller behandelt, welche dem von Legendre gebahnten Wege folgten. Cauchy und Binet, Dirichlet und Serret, Bourguet, Saalschütz, Pochhammer treten hier auf, und ihnen beigesellt Hankel und Pringsheim, wenn auch deren Abhandlungen als an Gauss sich anschliessend unseres Dafürhaltens besser in den dritten Abschnitt gepasst hätten, welcher mit Arbeiten über Facultäten sich beschäftigt. Kramp, dann Weierstrass, sind die hier mit Recht vorkommenden Namen. Wenn Prym's wichtige Untersuchungen als Schluss der Dissertation erörtert werden wollten, so haben wir Nichts dagegen einzuwenden, nur passen sie freilich nicht in den dritten Abschnitt. Wir geben freilich gern zu, dass

es recht schwer sein mochte, den Stoff inhaltlich und chronologisch so zu gliedern, dass beiden Eintheilungsgründen ihr Recht blieb, und die Uebersichtlichkeit nicht verloren ging.

CANTOR.

Lazare-Nicolas-Marguerite Carnot, sein Leben und sein Wirken nach den Quellen dargestellt von Dr. K. FINK, Professor an der Realanstalt zu Tübingen. Tübingen 1894. Bei der H. Laupp'sche Buchhandlung. 128 S.

Der Verfasser, welcher 1890 mit einem verfrühten und deshalb verunglückten Versuche den mathematisch-historischen Boden betrat, hat in den fünf seitdem verflossenen Jahren ungeheuer hinzugelernt. Wir haben uns dessen schon bei den 1892 und 1893 in dem „Correspondenzblatt für Gelehrten- und Realschulen Würtembergs“ erschienenen Abhandlungen über Monge und Dupin erfreuen dürfen, die neueste Arbeit über Carnot vermehrt den damals erhaltenen guten Eindruck. Es ist Schade, dass die drei Abhandlungen, die eigentlich zusammengehören, nicht auch vereinigt abgedruckt sind. Bilden doch, wenn man Verwandtschaft und Lehrverhältniss gleichsetzen darf, Monge, Carnot, Dupin eine Gelehrtenfamilie aus drei aufeinander folgenden Persönlichkeiten, gewissermassen Vater, Sohn, Enkel. Und wie die drei Männer zusammengehören in ihren geometrischen Leistungen, so gehören sie zusammen durch ihr Vaterland, durch die allerdings in den wechselvollen Schicksalen ihres Vaterlandes bedingte Thatsache, dass sie alle drei Männer von grossem politischen Einflusse waren, aus der Studirstube des Geometers hinaustretend in die Wirren des öffentlichen Lebens, nicht ohne den Weg auch wieder zurückzufinden. Herr Fink hat seine Abhandlung naturgemäss in zwei Abtheilungen zerfallen lassen. In der ersten schildert er den Bürger Carnot, und man merkt es ihm an, dass eine liebevolle Hand die Feder führte, ja, man gewinnt mit ihm den Menschen lieb, der fleckenreiner dasteht, als die meisten seiner Zeit- und Landesgenossen. In der zweiten, um die Hälfte längeren Abtheilung tritt uns der Gelehrte Carnot gegenüber. Herr Fink hat namentlich die *Géometrie de position*, aber auch die anderen Werke Carnot's getreu analysirt, so dass man aus seinem Berichte ein genügendes Bild jener bedeutenden Arbeiten erhält. Eine Würdigung derselben unter dem Titel Carnot's wissenschaftliche Bedeutung beschliesst die sehr lesenswerthe Schrift, die wir deshalb unseren Lesern warm empfohlen haben wollen.

CANTOR.

Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der Gesellschaft ehemaliger Studirender der Eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich. Den Ehrenmitgliedern und Mitgliedern der G. e. P. gewidmet

vom Vorstande. Zürich 1894. Hofer & Burger, graphische Anstalt. X, 174 S.

Das Eidgenössische Polytechnikum in Zürich wurde am 16. October 1855 eröffnet. Es hatte schon 13 Jahre bestanden, als im Herbst 1868 der Gedanke laut wurde, eine Gesellschaft ehemaliger Polytechniker (G. e. P.) zu gründen, und am 10. Juni 1869 wurde der Gedanke zur That. Die 25 Jahre ihres Bestehens, auf welche die Gesellschaft im Sommer 1894 zurückblicken durfte, sind demnach nicht identisch mit der Lebensdauer des Polytechnikums selbst, aber die Beziehungen zwischen der Anstalt und den Schülern, welche sie ausbildete, sind so eng, und der Zeitpunkt, von welchem an die Ausbildung der älteren Schüler begann, geht so weit zurück, dass die Festschrift, durch welche der Vereinsvorstand die Mitglieder erfreute, ebensowohl eine Geschichte des Polytechnikums als der G. e. P. in trefflich ausgeführten Photographien und biographischen Notizen darstellt. Viele von den abgebildeten Lehrern und Schülern der Anstalt sind noch am Leben, die Wenigsten wirken noch an derselben. Sie war für Viele nur ein Durchgangspunkt, für so Viele, dass kaum eine Hochschule in Deutschland namhaft gemacht werden kann, die sich nicht einen oder auch mehrere ihrer Lehrer unmittelbar oder mittelbar aus Zürich geholt hätte. Um so zahlreicher sind dementsprechend die Persönlichkeiten, für welche die Festschrift ein liebes Andenken sein wird. Die Ausstattung lässt keiner Bemängelung Raum und macht der ausführenden Anstalt die grösste Ehre.

Cantor.

Oeuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry. Tome II. Paris 1894. Gauthier-Villars et fils.

Ueber den Plan und den ersten Band dieser Ausgabe ist in dieser Zeitschrift bereits berichtet. Der vorliegende zweite Band giebt in chronologischer Anordnung die Correspondenz Fermat's und zwar 98 Briefe oder Auszüge aus Briefen Fermat's und 31 an Fermat direct oder durch Zwischenpersonen gerichtete Briefe von Descartes, Roberval, Pascal, Digby u. A. Von diesen Schriftstücken sind 46 aus der Varia Opera, 3 aus dem Commercium Epistolicum von Wallis, 22 aus der von Clerselier veröffentlichten Correspondance de Descartes, 7 aus den Oeuvres de Pascal, 10 aus der Correspondance de Huygens abgedruckt, 34 werden zum ersten Mal aus den Handschriften veröffentlicht. Von den bereits früher gedruckten sind 3 handschriftlich ergänzt, nämlich die Briefe VI, XXXVIII bis (in der neuen Numerirung) der Varia Opera und XXVI der Correspondance de Descartes.

Die Herausgeber haben auch bei diesem Bande die grösste Sorgfalt darauf verwendet, einen möglichst correcten Text zu geben. Ich habe bis jetzt nur einen Druckfehler gefunden: S. 180 in der letzten Zeile von

unten muss es $3-\sqrt{8}$ statt $3-\sqrt{18}$ heissen. Da das vorhandene handschriftliche Material nicht ausreicht, Fermat's französische Orthographie wieder herzustellen, so ist principiell die Orthographie des 18. Jahrhunderts angewandt; nur die wenigen Autographen selbst sind genau reproducirt.

Auf Grund der jetzt vorliegenden Correspondenz wird es zwar nicht möglich sein, Fermat's Beweismethoden, deren Verlust noch heute beklagt wird, im Einzelnen wieder herzustellen; aber den geistigen Entwickelungsgang dieses Mathematikers, vielleicht des grössten, den Frankreich hervorgebracht hat, werden die Briefe, dank der sorgfältigen, von den Herausgebern mehrfach corrigirten Datirung, leicht verfolgen lassen. Hoffentlich findet die Mühe, welche die Herausgeber auf die Arbeit verwendet haben, bald die einzige ihrer würdige Belohnung: eine eingehende Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen Fermat's in ihrer allmählichen Entwickelung.

Was nun die einzelnen Briefe betrifft, so fesseln natürlich die jetzt zum ersten Male veröffentlichten unsere Aufmerksamkeit am meisten. Es ist hier ganz unmöglich, sie alle zu besprechen; es sei nur gestattet, aus den wichtigeren Einiges mitzutheilen:

Die Briefe XXXVII und XXXVIII bis beziehen sich auf die Auflösung von Gleichungen und lehren (in moderner Ausdrucksweise) Folgendes: Wenn $x=a$ eine Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades $f(x)=0$ ist, so hat man nicht die häufig unbequeme Division von $f(x)$ durch $x-a$ zu vollführen, um die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zu erhalten, welche die übrigen Wurzeln von $f(x)=0$ zu Wurzeln hat, sondern man hat $x=y+a$ zu substituiren und in dem Resultat den Factor y zu unterdrücken. Dadurch erhält man eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y, deren Wurzeln, jede um a vermehrt, die übrigen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Besonderes Gewicht legt Fermat auf die Sache nicht; sie erleichtere blos die Rechnung.

In dem Briefe XLIII vom Jahre 1640 wird zum ersten Male der später von Euler als unrichtig erwiesene Satz, dass der Ausdruck $2^{(2^n)}+1$ für jedes ganze positive n eine Primzahl darstelle, ausgesprochen. Fermat sagt, er sei von der Richtigkeit des Satzes „quasi persuadé“. Auch in dem Briefe XLV, der ebenso wie XLVIII durch Bemerkungen über die pythagoreischen Dreiecke von Interesse ist, spricht Fermat von diesem Satze. Er erklärt, dass seine Untersuchungen ihn nicht befriedigen, und möchte von Frenicle einen Beweis des Satzes erhalten.

Der Brief LVII giebt den Satz: „Jede ungerade Zahl, die keine Quadratzahl ist, lässt sich ebenso oft als Differenz zweier Quadrate wie als Product zweier Factoren darstellen“. Mit Hilfe dieses Satzes wird untersucht, ob eine ungerade Zahl eine Primzahl sei oder nicht. Als Beispiel wählt Fermat die Zahl 2027651281 und findet, dass dieselbe zusammengesetzt, nämlich gleich 46061 . 44021 ist.

Der Brief LVIII behandelt die interessante Aufgabe: Alle pythagoreischen Dreiecke zu ermitteln, deren Katheten eine gegebene Differenz haben. Die Lösung, die Fermat giebt, beruht auf der Identität

$$(m^2 - n^2) - 2mn = 2m_1 n_1 - (m^2_1 - n^2_1),$$

wenn

$$m_1 = 2m + n, \quad n_1 = m$$

ist.

Auch die Briefe LIX, LX und LXIII enthalten Aufgaben über pythagoreische Dreiecke, u. a. die Aufgaben: Ein rechtwinkliges Dreieck zu ermitteln, dessen Hypotenuse ebenso wie die Summe der Katheten durch je eine Quadratzahl ausgedrückt wird. — Drei pythagoreische Dreiecke anzugeben, deren Flächen x, y, z der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen.

Endlich sei noch auf den Brief CII hingewiesen. Jacobus de Billy hatte die Aufgabe gestellt: drei rationale Zahlen x, y, z zu finden, für welche jeder der neun Ausdrücke

$$x - xyz, \quad y - xyz, \quad z - xyz, \quad y - x - xyz, \quad y - z - xyz,$$
$$z - x - xyz, \quad xy - xyz, \quad y^2 - xyz, \quad yz - xyz$$

ein Quadrat sei und als (wie er glaubte, einzig mögliche) Lösung $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{5}{8}$ gegeben. Fermat antwortet, die Aufgabe lasse unendlich viele Lösungen zu, und giebt als eine zweite die Zahlen

$$\frac{10416}{51865}, \ 1, \ \frac{41449}{51865}.$$

Die im ersten Bande ausgesprochene Aufforderung der Herausgeber, ihnen weiteres bisher unveröffentlichtes Material zugänglich zu machen, hat insofern Erfolg gehabt, als die Correspondenz um zwei Briefe bereichert wurde, die Briefe XXXIII (Frenicle an Mersenne, zur Mittheilung an Fermat bestimmt) und LXXXI bis (Boulliau an Fermat). Es steht zu hoffen, dass noch andere Briefe aufgefunden werden, so dass dem dritten Band eine Ergänzung der Correspondenz beigefügt werden kann.

G. Wertheim.

Sefer Ha-Mispar, das Buch der Zahl, ein hebräisch arithmetisches Werk des R. Abraham ibn Esra. Zum ersten Male herausgegeben, übersetzt und erläutert von Dr. Moritz Silberberg. Frankfurt a. M. 1895. J. Kauffmann. IX, 118 und 80 S.

Der berühmte jüdische Gelehrte Abraham ibn Esra (1092—1167) hat ausser zahlreichen religionswissenschaftlichen Werken auch eine für die damalige Zeit nach Inhalt und Form vortreffliche Arithmetik geschrieben, über welche von Terquem, Leon Rodet, Steinschneider und zuletzt vom Referenten in dessen Schrift: „Die Arithmetik des Elia Misrachi“ Mittheilungen gemacht worden sind. Dieses Werk des Abraham ibn Esra, das in mehr als zwanzig Handschriften erhalten ist, also eine grosse

Verbreitung besessen zu haben scheint, liegt jetzt zum ersten Male gedruckt vor. Der Herausgeber, Dr. Moritz Silberberg, hat fünf Handschriften, die er in der Vorrede anführt, im Originale benutzt und auf Grund derselben den Text sorgfältig festgestellt; die einzelnen Varianten sind in den Noten angegeben. Er hat eine gute deutsche Uebersetzung und zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, die das Verständniss erleichtern sollen oder interessante Hinweise enthalten.

Was nun den Inhalt des (nach Steinschneider's Darlegungen) kurz vor 1160 abgefassten Werkes betrifft, so setzt Abraham ibn Esra in der Einleitung das dekadische Zahlensystem auseinander; dabei giebt er zwar die Formen der Ziffern 1 bis 9, erklärt aber, dass er sich dafür der neun ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets bedienen werde. Die Null ist bei ihm kreisrund, von der Form eines Rades. „Das Rad bedeutet so viel wie Spreu, wie Stoppeln vor dem Winde und dient nur zur Wahrung der Stellen; in der fremden Sprache heisst es sifra". Nach diesen Vorbemerkungen wird der Gegenstand in sieben „Pforten" behandelt, von denen die vier ersten das Rechnen mit ganzen Zahlen betreffen. In der ersten Pforte wird das Multipliciren, in der zweiten das Dividiren gelehrt. Die dritte Pforte ist der Addition gewidmet; damit ist aber nicht die Rechnungsart gemeint, die für uns die erste ist (diese wird stillschweigend vorausgesetzt), sondern die Summation der arithmetischen und der geometrischen Reihen. Die vierte Pforte handelt von der (gewöhnlichen) Subtraction. Dass dabei überall auf die Neunerprobe hingewiesen wird, braucht wohl nicht erst bemerkt zu werden. Die fünfte Pforte lehrt das Rechnen mit gemeinen und astronomischen Brüchen und übt die Regeln an zahlreichen Text-Aufgaben von zum Theil interessanten Wortlaut ein. Die sechste Pforte spricht sehr ausführlich von den arithmetischen und geometrischen Proportionen, von welchen letzteren „der grösste Theil der Astronomie und die Bestimmung der Stellung der Planeten, sowie die Lösung der meisten arithmetischen Aufgaben abhängen". Auch die harmonische Proportion wird erläutert. Wie die vorhergehende, so ist auch diese Pforte reich an gut gewählten Aufgaben. In der letzten Pforte wird das Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen und Brüchen auf eine sehr gründliche Weise behandelt; die gewonnene Kenntniss wird sodann auf Lösung von Aufgaben mittels des Pythagoreischen Lehrsatzes angewendet. Eigenthümlich dabei ist, dass die Annäherung an den Werth einer Wurzel sowohl von der einen wie von der entgegengesetzten Seite erfolgt, indem durch die Formeln

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b, \quad \sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b$$

Zahlen ermittelt werden, welche beziehungsweise kleiner und grösser als die gesuchte Wurzel sind.

Das ist ein kurzer Ueberblick über den Inhalt des interessanten Buches, für dessen Herausgabe alle diejenigen, die sich für die Geschichte der

Mathematik interessiren, dem Dr. Silberberg und den beiden Stiftungen, welche durch Uebernahme eines Theiles der Druckkosten die Veröffentlichung ermöglicht haben, zu grösstem Danke verpflichtet sind.

G. Wertheim.

L. Kronecker. **Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale.** Herausgegeben von Dr. Eugen Netto. Leipzig 1894. 345 S.

Kurze Zeit nach dem Hinscheiden Leopold Kronecker's entstand der Plan, nicht blos die Abhandlungen des Verewigten gesammelt herauszugeben, sondern auch den Cyclus der an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesungen einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen. Denn gerade in diesen Vorlesungen hatte Kronecker die Anregung zu stets neuem und unermüdetem Schaffen gefunden; hier gab er gerne die jüngsten Resultate seiner Forscherthätigkeit, und zahlreiche Abhandlungen seiner späteren Periode sind nur eine abgeklärtere Form der in den Vorlesungen oft viel früher vorgetragenen Entwickelungen. So konnten denn auch die Vorlesungen am besten die Wege und Wünsche bezeichnen, in denen sich die Gedanken Kronecker's mit besonderer Vorliebe bewegt hatten.

Der erste Theil dieses von der königl. preuss. Akademie durch Einsetzung einer Commission geförderten Unternehmens liegt uns vor. Herr Netto hat sich der dankenswerthen Aufgabe unterzogen, die Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale zu bearbeiten; er ist dieser Aufgabe mit voller Hingabe nicht blos an die Sache, sondern auch an die Persönlichkeit Kronecker's gerecht geworden und hat den Vorlesungen den frischen Ton und das kräftige Urtheil, das ihnen eigen war, erhalten; von dem Reize, den das gesprochene Wort hat, ist durch die Pietät des Herausgebers auch in der Niederschrift wenig verloren gegangen.

In der geschichtlichen Entwickelung des Integralbegriffes laufen zwei verschiedene Auffassungen neben einander, je nachdem das Integral als Lösung einer Differentialgleichung, oder als Grenzwerth einer Summe definirt wird. Der Erfinder der Integralrechnung, Leibniz, legte in durchaus consequenter Begriffsbildung die Summendefinition des Integrales zu Grunde und stellte die Operation der Summenbildung der des Differenznehmens als Umkehrung gegenüber.* Euler hingegen, unter dessen Händen die Theorie der Integrale zu einer eigenen Wissenschaft anwuchs, kennt kaum einen anderen Integralbegriff, als den der Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$. So findet sich im Eingange des Calculus integralis das charakteristische Scholion 1: Caeterum hoc signum $\int$ vocabulo summae

---

* Vergl. hierzu M. Cantor: „Geschichte der Mathematik“ Bd. 3 S. 159.

·olet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tamquam
mnium differentialium spectatur, est natum; neque maiore iure
·est, quam vulgo lineae ex punctis constare concipi solent. Der
·ese Abweisung des Leibniz'schen Integralbegriffes ist jeden-
gegeben, dass die von Euler erzielten Fortschritte wesent-
·nntniss gewisser unbestimmter Integrale und ihrer Ver-
·re Integrale basirten; so trat denn der ursprüngliche und
·hm in den Hintergrund. Mit Dirichlet und Cauchy
·ler zur ausschliesslichen Geltung, weil er allein die
in den Fällen verbürgt, in welchen eine Entwickelung
·enzreihen unmöglich ist. An ihn knüpft auch der
Untersuchungen an, welche sich auf die Grenzen
oder den Giltigkeitsbereich gewisser, sehr allgemeiner
·nen beziehen. Die Kronecker'schen Vorlesungen gehen in
·eisen Formulirung dieser Bedingungen noch einen Schritt weiter.

Demgemäss sind die ersten Betrachtungen der genauen Erörterung der Summendefinition des Integrales gewidmet. Als eine zugleich nothwendige und hinreichende Bedingung wird diejenige formulirt, welche von Riemann in seiner Abhandlung über die trigonometrische Reihe gegeben worden ist; für die Zwecke der Anwendung hingegen wird die nur hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingung aufgestellt, dass die zu integrirende Function „im Allgemeinen gleichmässig stetig“ ist. Diese Begriffsbildungen werden sogleich, ebenso wie die sich anschliessenden Elementarsätze, von einfachen auf Doppelintegrale übertragen. Die analogen Betrachtungen, welche bei einfachen Integralen den Uebergang zum unbestimmten Integral vermittelten, führen bei Doppelintegralen unmittelbar zu dem Fundamentalsatze von Cauchy.

Hierbei erweist es sich als nöthig, diejenigen Gebiete durch eine „natürliche Begrenzung“ auszusondern, in welchen die Voraussetzungen der Stetigkeit und der Endlichkeit durchbrochen werden. Die natürlichen Begrenzungen sondern sich aber in zwei verschiedene Klassen, je nachdem die von ihnen herrührenden Integralbeiträge bei unbegrenzter Abnahme des abgesonderten Gebietes gegen eine unendlich kleine oder gegen eine endliche Grenze convergiren; die ersten werden als „scheinbare“ natürliche Begrenzung von den zweiten unterschieden und können nachträglich wieder entfernt werden. Dieser wichtige Begriff der natürlichen Begrenzung, der hier mehr gelegentlich auftritt, erwächst erst später, in der Theorie der n-fachen Integrale, zumal in den Potentialbetrachtungen, zu voller Schärfe und Bedeutung.

Diesen grundlegenden Entwickelungen, welchen die ersten drei Vorlesungen gewidmet sind, reihen sich nunmehr die beiden Mittelwerthsätze an, welche die Abschätzung der Integrale gestatten.

Der zweite, von Paul du Bois-Reymond veröffentlichte Mittelwerthsatz (der aber auch von Weierstrass gefunden und benutzt worden

ist) führt im engen Anschluss an die schönen, von du Bois-Reymond angestellten Untersuchungen sogleich zu dem Dirichlet'schen Integrale, nämlich dem Satze, dass der Grenzwerth des Integrales

$$J_1(w) = \int_0^{x'} f(x) \frac{\sin w x \pi}{x} dx \qquad (x' > 0)$$

für unbegrenzt zunehmendes w gleich $\frac{\pi}{2} f(0)$ ist. An dieser Stelle mag die Bemerkung gestattet sein, dass die angegebene Beweisführung nicht ganz einwandsfrei zu sein scheint. Denn aus der durch den Mittelwerthsatz erhaltenen Gleichung

$$J_1(w) = f(0) \int_0^{w\xi} \frac{\sin x \pi}{x} dx + f(x') \int_{w\xi}^{w x'} \frac{\sin x \pi}{x} dx \qquad (0 \leqq \xi \leqq x')$$

folgt der obige Satz nur dann, wenn $\lim_{w=\infty} w\xi = \infty$ ist. Nun wird zwar bewiesen, dass ξ nicht gleich Null ist; da aber ξ eine Function von w ist, so könnte diese Grösse immerhin noch in der Weise gegen Null convergiren, dass die erwähnte nothwendige Bedingung nicht erfüllt ist. Diese Schwierigkeit lässt sich aber dadurch heben, dass man das Integral $J_1(w)$ in zwei Theile von 0 bis α und von α bis x' zerlegt und den Zwischenwerth α gleich $\frac{x'}{w^\varkappa}$ $(0 < \varkappa < 1)$ setzt, so dass für unendlich grosses w $\lim \alpha = 0$, aber $\lim w\alpha = \infty$ ist. Wendet man jetzt den Mittelwerthsatz auf die Theile des Integrales an, so erhält man:

$$J_1(w) = f(0) \int_0^{w\xi_1} \frac{\sin x \pi}{x} dx + \left\{ f\left(\frac{x'}{w^\varkappa}\right) - f(0) \right\} \int_{w\xi}^{w\xi_1} \frac{\sin w x \pi}{x} dx$$
$$+ f(x') \int_{w\xi_1}^{w x'} \frac{\sin x \pi \, dx}{x}$$
$$\left(0 < \xi \leqq \frac{x'}{w^\varkappa} < \xi_1 < x'\right),$$

und in dieser Gleichung convergirt der erste Summand sicher gegen $\frac{\pi}{2} f(0)$, weil $\lim_{w=\infty} w\xi_1 > \lim_{w=\infty} w^{1-\varkappa} x'$ unendlich ist, der zweite und dritte Summand werden aber beliebig klein, der dritte, weil das Integral, der zweite, weil der Factor des Integrales unter jeden Grad der Kleinheit herabgedrückt werden kann.

Das Dirichlet'sche Integral enthüllt eine sehr allgemeine Eigenschaft von Functionen, welche zunächst die Voraussetzung erfüllen müssen, in der nächsten Umgebung der unteren Grenze des Integrales gleichmässig stetig und nur abnehmend oder nur zunehmend zu sein. Eine Erweiterung

des Integrales kann entweder in einer Verallgemeinerung der Bedingungen, welche der Function $f(x)$ auferlegt werden, oder aber in einer Verallgemeinerung der periodischen Function gesucht werden, mit welcher $f(x)$ unter dem Integrale multiplicirt erscheint. Die erste Erweiterung führt zu den neueren Untersuchungen über den Giltigkeitsbereich des Dirichlet-schen Integrales, die zweite zu den wenig gekannten Betrachtungen, welche W. R. Hamilton bereits im Jahre 1843 über fluctuirende Functionen angestellt hat. In demselben Umfange, in welchem der Satz über das Dirichlet'sche Integral gilt, gelten auch die zahlreichen Folgerungen, welche aus ihm gezogen werden können. Das Fourier'sche Doppelintegral, das Poisson'sche Integral, die Fourier'sche Reihe, die Dirichlet-sche Summenformel, sie alle sind unmittelbare Folgerungen des Dirichlet'schen Integrales in der hier zu Grunde gelegten Gestalt. Auch die Methoden, welche man als die der mechanischen Quadratur zu bezeichnen pflegt, treten durch die Euler-Mac-Laurin'sche Summenformel in einen innigen Zusammenhang mit den Fourier'schen Reihen, und eine merkwürdige, von Kronecker selbst gegebene Summenformel stellt die Brücke zwischen der Dirichlet'schen und der Euler-Mac-Laurin'schen Summenformel her.

Nunmehr aber werden von der zehnten Vorlesung an die Betrachtungen, welche sich um das Dirichlet'sche Integral gruppiren, noch einmal von anderer Seite her, nämlich vom Cauchy'schen Integrale aus, in Angriff genommen. Unter den zahlreichen Anwendungen des Satzes von Cauchy, welche hier eine Erörterung finden, erscheinen zum Schlusse die auf den Integral-Logarithmus bezüglichen Betrachtungen; ein specieller Fall des Integral-Logarithmus ist Dirichlet's discontinuirlicher Factor. Dieser Factor giebt hier zu einer sehr interessanten Methode der Summation allgemeiner unendlicher Reihen Veranlassung, bei welcher die Coefficienten als die Differenzen einer discontinuirlichen Function erscheinen, welche an einer unendlichen Menge bestimmter, durch die Form der Reihe gelieferten Stellen Sprünge erleidet. Bei solcher Art der Betrachtung ergeben sich die Fourier'schen Reihen und Integrale nur als ein specieller Fall der allgemeineren hier untersuchten Gattung von Reihen. So gewinnen alle diese, im Einzelnen oft sehr verschiedenartigen Entwickelungen durch das Dirichlet'sche Integral ein natürliches Centrum und einen übersichtlichen Zusammenhang.

Beschränkte sich die Untersuchung bisher auf das Gebiet der einfachen und der Doppelintegrale, so schreitet sie jetzt (von der vierzehnten Vorlesung ab) zum allgemeinen n-fachen Integrale fort und wendet hier den Hauptsatz von der Transformation auf die Berechnung einiger Integrale an, welche über „Prismatoide" oder über solche Gebiete des n-dimensionalen Raumes erstreckt sind, die auf Prismatoide abgebildet werden können. In diesem Rahmen finden auch die wichtigsten Sätze über die Gammafunction

eine summarische Erörterung.* Der Hauptsache nach sind aber die letzten Vorlesungen einer genauen und zum Theil eigenartigen Untersuchung der Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten gewidmet. Es werden zunächst die Green'schen Sätze, sodann die charakteristischen Eigenschaften des Potentials, immer unter möglichster Einschränkung der für die Giltigkeit nothwendigen Bedingungen und mit durchgängiger Benutzung des im Eingange erwähnten Begriffes der natürlichen Begrenzung, auf n-fache Mannigfaltigkeiten übertragen. Auch das Integral von Poisson wird in der Art verallgemeinert, dass die partielle Differentialgleichung $\Delta \mathfrak{F} = \Phi(s_1, s_2, \ldots s_n)$ integrirt wird, wenn der Werth der stetigen Function $\mathfrak{F}$ auf dem Grenzgebiete einer sphärischen Mannigfaltigkeit vorgegeben ist. Den Abschluss bildet die Bestimmung des Potentiales einer ellipsoidischen Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung der beiden von Dirichlet für den dreidimensionalen Raum gegebenen Methoden.

Die erste besteht in einer Verification der fertigen Formel mit Hilfe der als charakteristisch erkannten nothwendigen Bedingungen, die zweite in einer directen analytischen Entwickelung mit Hilfe des discontinuirlichen Factors; bei jener kann die Gleichung der ellipsoidischen Mannigfaltigkeit, bei dieser das Anziehungsgesetz in allgemeiner Gestalt zu Grunde gelegt werden. Da aber der Anwendung der zweiten Methode das Bedenken entgegensteht, ob nicht natürliche Begrenzungen, welche sich z. B. bei einfachen Integralen als scheinbare und darum entfernbare erweisen, beim Uebergange zu vielfachen Integralen zu wesentlichen natürlichen Begrenzungen werden, so wird schliesslich der interessante Versuch unternommen, alle eintretenden unendlich kleinen Grössen ihrer Grössenordnung nach abzuschätzen, sie in der Form von Modulsystemen durch die ganze Rechnung mitzuführen, und erst am Ende der Untersuchung festzustellen, ob sie in der That zum Verschwinden gebracht werden können.

Vorstehende Inhaltsangabe möge in Kürze den Charakter der Kronecker'schen Vorlesungen kennzeichnen. Sie geben ihrer Natur nach keine vollständige Uebersicht über das behandelte Gebiet; aber sie bieten eine

---

* Beiläufig sei hier angegeben, dass die erste Formel auf S. 243 lauten muss:

$$\frac{1}{p^n} - \frac{e^{-p}}{p\,\Gamma(n)}\left(1 + \frac{n-1}{p} + \frac{(n-1)(n-2)}{p^2} + \cdots\right),$$

und dass der in der Schlussbemerkung der 14. Vorlesung ausgesprochenen Forderung, die Gauss-Legendre'sche Relation:

$$\prod_{x=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{x}{n}\right) = \Gamma(na)\,\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{an-\frac{1}{2}}}$$

direct auf dem Wege der Darstellung des Productes auf der linken Seite durch ein n-faches Integral zu erweisen, wohl vollkommen durch ein von Liouville im „Journal de Mathématiques“ (2e sér. I, 1856, p. 82—88) angegebenes Verfahren entsprochen sein dürfte.

Fülle neuer Gesichtspunkte und Zusammenhänge und neben fertigen Resultaten auch eine grosse Anzahl reizvoller Perspectiven.

Mögen dieselben auch an ihrem Theile dazu beitragen, dass der Ideenkreis Kronecker's Verbreitung und Fortbildung finde!

Georg Landsberg.

Zahlentheorie. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. Von Paul Bachmann. Zweiter Theil. Die analytische Zahlentheorie. Leipzig 1894. B. G. Teubner. XVIII und 494 S.

Der Verfasser führt mit dem vorliegenden zweiten Theil (vergl. die Besprechung des ersten Theiles in dieser Zeitschrift, Histor.-liter. Abthlg. 38. Jahrg., S. 108—112) sein grosses Unternehmen um einen wichtigen Schritt weiter. Gerade die analytische Zahlentheorie, das heisst, die Anwendungen analytischer Methoden auf die Lehre von den Zahlen und ganzzahligen Formen, ist wohl der Theil des Ganzen, der noch am meisten gekannt und gewürdigt wird.

Denn diese Disciplin, welche bis auf Euler zurückgeht, von Dirichlet aber eigentlich erst begründet, und dann von Kummer, Kronecker, Dedekind, Lipschitz u. A. weitergeführt worden ist, ist eines der merkwürdigsten Beispiele für den inneren Zusammenhang scheinbar ganz getrennter Gebiete; schlägt sie doch eine Brücke zwischen den beiden Haupterscheinungsformen des mathematischen Denkens, dem Stetigen und dem Unstetigen.

Es war nicht leicht, das so verschiedenartige Material zu einem Ganzen zu verarbeiten, es ist das dem Verfasser dadurch gelungen, dass er die Theorie der Dirichlet'schen Reihen in den Mittelpunkt stellte, um die sich alles Weitere gruppirt. Freilich sah er sich dadurch genöthigt, Untersuchungsreihen anderen Charakters, wie Hermite's Einführung des Stetigen in die Zahlentheorie, die Anwendungen der elliptischen Functionen u. A. in einen späteren Band zu verweisen.

Ein einleitender Abschnitt recapitulirt einige Hauptsätze über unendliche Reihen und Producte. Als unmittelbare Anwendung erscheint einmal die unbedingte Convergenz der Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s > 1$, sowie der ähnlichen Reihe

$$Z(s) = \sum_{n} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo $\left(\frac{D}{n}\right)$ das Jacobi'sche Symbol bedeutet; andererseits die von Euler eingeführte Gleichheit der Reihe $\zeta(s)$ mit dem unendlichen Producte:

eine summarische Erörterung.* Der Hauptsache nac[h]
Vorlesungen einer genauen und zum Theil eige[nen]
Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten gewid[met]
Green'schen Sätze, sodann die charakteristi[schen]
immer unter möglichster Einschränkun[g]
Bedingungen und mit durchgängig[er]
Begriffes der natürlichen Begre[nzung]
tragen. Auch das Integral
dass die partielle Differe[ntial]
wenn der Werth der
schen Mannigfalti[gkeit]
des Potentiale[s]
der beider
Methode

... der Leser mit der zweiten, hier in Frage ... Untersuchungsrichtung bekannt, nämlich mit den ... über die Zerfällung der Zahlen in Summanden, ... Entwickelung des Productes $(1+x_1z)(1+x_2z)(1+x_3z)\dots$ Der Verfasser hätte hier auf die merkwürdigen Anwendungen ... auf die Anzahl von Lösungen gewisser diophantischer Gleichungen hinweisen können, wie sie die abzählende Invariantentheorie lehrt. Hieran schliessen sich einige Verallgemeinerungen von Gauss, Jacobi u. A., die hier sämmtlich direct und auf die einfachste Weise abgeleitet werden.

Der dritte, als Mittelpunkt des Ganzen anzusehende Abschnitt handelt von den Dirichlet'schen Reihen, den Verallgemeinerungen der Reihe $Z(s)$, nämlich Reihen von der Form:

$$S(s)=\Sigma\frac{a_n}{c_n^s},$$

wo c_n eine positive, mit n unendlich wachsende Grösse bedeutet, die a_n dagegen im Uebrigen beliebige complexe Grössen sind, von denen nur verlangt wird, dass die Summe $a_1+a_2+\cdots+a_n$ auch bei unendlich wachsendem n endlich bleibt. Nach einem berühmten Princip von Abel ist eine solche Dirichlet'sche Reihe $S(s)$ für alle positiven Werthe von s nicht nur gleichmässig convergent, sondern auch eine stetige Function von S, woraus sich u. A. die wichtige Folgerung $\lim\limits_{\varrho=0} Z(1+\varrho)=Z(1)$ ergiebt.

Die wichtigste Anwendung der Reihen S hat Dirichlet schon selbst gemacht. Bedeuten $k_0, k_1, k_2, \dots k_n \dots$ positive, mit n beliebig wachsende und der Grösse nach geordnete Constanten, so ist die Reihe

$$K=\sum_n\frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$$

für jedes positive ϱ convergent, und $\lim\limits_{\varrho=0}(\varrho K)$ ist ein gewisser Grenzwerth ω, der z. B. in dem bedeutungsvollen Specialfall, wo k_n die Form $b+na$ besitzt, den Werth $\frac{1}{a}$ hat.

Hierauf hat Dirichlet seinen Beweis für den berühmten Satz gegründet, wonach eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied und deren Differenz zwei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, unendlich viele Primzahlen enthält. Bekanntlich hatte Legendre aus diesem Satze, den er ohne Beweis, nur auf Induction gestützt, annahm, das quadratische Reciprocitätsgesetz hergeleitet.

In Anlehnung an einen Euler'schen Gedankengang wird eine gewisse
hlet'sche Reihe, die für alle positiven Werthe der Variabeln s con-
für $s = 0$ dagegen divergirt, in ein Product umgewandelt, welches
· alle in der Progression enthaltenen Primzahlen erstreckt. Wäre
nzahl dieser Primzahlen eine endliche, so würde sich, indem man
ll convergiren lässt, der Widerspruch ergeben, dass eine end-
gleich einer anderen wäre, welche über alle Grenzen hinaus-

Diese Dirichlet'schen Principien erweisen sich nun als grundlegend für die ganze analytische Zahlentheorie; beispielsweise hat Kronecker nachgewiesen, wie die ganze Theorie der binären quadratischen Formen, etwa von den ersten Elementen abgesehen, aus jenen Principien hergeleitet werden kann.

Hier werden aus der genannten Theorie zwei klassische Hauptprobleme herausgegriffen, die Bestimmung der Klassenanzahl und der Geschlechteranzahl.

Besonders beim ersteren Probleme tritt der Grundgedanke deutlich hervor, eine Mannigfaltigkeit von (positiven) ganzen Zahlen doppelt abzuzählen, nämlich die von den Zahlen m, welche durch die primitiven Formen von einer gegebenen Determinante Δ eigentlich darstellbar sind. Analytisch drückt sich das aus durch die Gleichheit zweier Summen, deren eine sich über alle dargestellten Zahlen m, deren andere sich über alle relativ primen Werthe der Unbestimmten x, y erstreckt.

Diese Grundformel wird einer Reihe von läuternden analytischen Processen unterworfen, wobei besonders die Gauss'schen Summen eine Rolle spielen, und führt so schliesslich zu einem überraschend einfachen Resultat, wonach z. B. bei negativer Determinante Δ das Doppelte der gewünschten Klassenanzahl gleich wird der — zwischen den Grenzen 0 und 2Δ enthaltenen — quadratischen Reste $mod\,\Delta$, vermindert um die entsprechende Anzahl der Nichtreste.

Bisher ist noch keine Aussicht vorhanden, diese und ähnliche Resultate auf rein arithmetischem Wege zu gewinnen.

Als einer der interessantesten Abschnitte ist noch der zu erwähnen, in dem das Problem der Häufigkeit der Primzahlen, wohl das schwierigste der ganzen Zahlentheorie, behandelt wird.

Es wirkt geradezu packend, wenn geschildert wird, wie die Lösung einen ungeahnten Aufschwung nimmt, wo Riemann (die oben erwähnte) Function $\zeta(s)$ analytisch durchforscht.

Sehr dankenswerth ist endlich ein Schlusskapitel über zahlentheoretische Functionen und deren mittlere Werthe, die noch eine grosse Zukunft zu haben scheinen. Es wird wohl wenige Fachgenossen geben, die bisher in der Lage waren, eine einzelne der bez. Abhandlungen von Mertens, Césarò, Gegenbauer u. A. zu lesen.

Vermisst hat Referent eine Reihe zahlentheoretischer Functionen, die die neuere Theorie der Modulfunctionen zu Tage gefördert hat.

Im Ganzen kann der Referent nur sagen, dass er selten ein so anregendes mathematisches Buch in der Hand gehabt hat. Möchte der Verfasser in der Fortführung seines schönen Unternehmens nicht erlahmen!

W. Franz Meyer.

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker, par J. de Seguier, S. J., Professeur à l'université d'Angers. Berlin 1894. F. L. Dames. VIII und 339 S.

Der Zusammenhang, welcher zwischen der Theorie der elliptischen Functionen und der Zahlentheorie besteht, ist wegen seiner Tiefe von jeher als ein besonders würdiger Untersuchungsgegenstand angesehen worden. Um nur an neuere Autoren zu erinnern, so haben auf diesem Gebiete mit grossem Erfolge gearbeitet u. A. Dedekind, Gierster, Hurwitz, Klein, Pick, Weber, sowie neuestens auch Greenhill und Kiepert. Jedoch hat keiner an der Klärung des fraglichen Grenzgebietes zwischen den elliptischen Functionen und der Arithmetik so hervorragenden Antheil als Kronecker. Letzterer hat diesem Gegenstande eine grosse Reihe von Notizen (in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie) gewidmet, die sich durch mehrere Jahrzehnte hindurchziehen und die leider durch den Tod Kronecker's unvollendet geblieben sind. Bei der Auffassung Kronecker's kommen einige untergeordnete Gesichtspunkte zur Geltung, wie z. B. eine Abweichung von Gauss und Dirichlet in der Schreibweise der quadratischen Formen, wie ferner der vom sonstigen modernen Brauch abweichende Rückgang auf die Jacobi'sche Theorie der elliptischen Functionen an der Stelle der Weierstrass'schen. Von principieller Bedeutung jedoch ist es, dass Kronecker jener mit der Geometrie mittelbar oder unmittelbar in Zusammenhang stehenden Auffassung durchaus abgeneigt war, welche durch Klein in den Grenzgebieten der elliptischen Functionen und der Zahlentheorie mit Erfolg zur Geltung gebracht ist. Nach Meinung des Referenten ist nicht zweifelhaft, dass erst durch innere Verschmelzung der beiden hiermit angedeuteten Richtungen eine durchaus reife Durchbildung unseres Gegenstandes gewonnen werden kann. Einstweilen sind die fraglichen Forschungen noch so neu und unvollständig, dass jede auch einseitige Behandlung derselben willkommen sein muss; und in diesem Sinne ist es sehr freudig zu begrüssen, dass Herr J. de Seguier in dem in der Ueberschrift genannten Werke eine zusammenhängende Darstellung der Kronecker'schen Schöpfungen sammt allen Zwischenentwickelungen geliefert hat. In der neueren deutschen Literatur ist durch das bekannte Werk von Weber: „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" das fragliche Gebiet gleichfalls allgemeineren Kreisen zugänglich gemacht. Den wesentlichen Unterschied beider Werke muss man darin

sehen, dass Seguier in unmittelbarem Anschluss an Kronecker womöglich nichts von dessen Entwickelungen auslässt, dafür aber den durch die oft unterbrochene Kronecker'sche Publicationsweise gegebenen Mangel an reifer und abgeklärter Disposition in Kauf nimmt, während Weber, sich auf das Wesentlichere beschränkend, seine eigenen und Dedekind's Auffassungen der Sache entschieden weit conciser zur Geltung bringt. Uebrigens sind beide Werke auch in der Anlage von einander verschieden; so nimmt Seguier z. B. jene Entwickelungen Kronecker's auf, welche sich unmittelbar an die ursprünglichen Dirichlet'schen Untersuchungen über die Klassenanzahlen anschliessen und theils Vereinfachungen, theils Erweiterungen der Dirichlet'schen Ergebnisse enthalten. Herr Weber ist auf diese Gegenstände in mehreren Noten zurückgekommen, die er Anfang 1893 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorlegte.

Seguier hat in den Mittelpunkt seiner Darstellung zwei Formeln Kronecker's gestellt, auf die er auch bereits im Titel seines Buches hinweist. Mit der ersten dieser beiden Formeln hat sich Kronecker noch innerhalb der von Dirichlet selbst bereits gegebenen Gedankenentwickelung gehalten. Es gilt, wenn

$$(ax^2 + bxy + cy^2)$$

eine ganzzahlige quadratische Form ist, Summen von der Gestalt:

$$\sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

in eine einfachere Form umzusetzen. Es bezieht sich dabei die Summe auf alle Paare relativer Primzahlen m, n, jedoch für den Fall positiver Determinante $b^2 - 4ac$ unter Einhaltung einer gewissen Ungleichung für m und n; und es ist weiter F irgend eine Function, für welche die angezeigte Reihe absolut convergent ist. Bei stehendem Werthe $D = b^2 - 4ac$ soll sich die zweite Summirung:

$$\sum_{a,b,c} \sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

auf ein System repräsentirender Formen der zu dieser Determinante gehörenden Klassen beziehen. Auf Summen dieser oder ganz nahe verwandter Art bezieht sich die „erste Kronecker'sche Fundamentalformel“.

Mit der zweiten der beiden gedachten Formeln that Kronecker einen entschiedenen Schritt über Dirichlet hinaus; doch gilt diese Entwickelung einzig für negative Determinanten. Die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2 + bmn + cn^2} \right)^{1+\varrho}$$

bezeichnet man für gewöhnlich im engeren Sinne als Dirichlet'sche Reihe; der Werth dieser Summe ist von (a, b, c) nur noch insofern abhängig, dass er einzig durch die Klasse bestimmt erscheint, das heisst,

dass er unabhängig von der besonderen repräsentirenden Form ist. Die Reihe ist für beliebiges, von Null verschiedenes, positives ϱ absolut convergent und giebt Anlass zu dem folgenden Ansatze:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\varrho}=\frac{1}{\varrho}+A_0+A_1\varrho+A_2\varrho^2+\cdots$$

Von Dirichlet ist bewiesen worden, dass das Anfangsglied der nach Potenzen von ϱ angeordneten Reihe $\frac{1}{\varrho}$ ist, und hierauf beruht die Anwendung der fraglichen Reihe auf die Bestimmung der Klassenanzahlen. Die höheren Coefficienten A_0, A_1, ... sind durchaus noch von der Form (a, b, c) abhängig, und man muss es als die Hauptleistung Kronecker's in diesem Gebiete ansehen, dass er diese Abhängigkeit für A_0 in Erfahrung gebracht hat. Dieselbe ist ausgesprochen in der „zweiten Kronecker'schen Fundamentalformel“:

$$\lim_{\varrho=0}\left[-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\varrho}\right]$$

$$=-2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{\sqrt{-D}}+\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-2\log\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-e^{2\nu\omega\pi i})(1-e^{-2\nu\overline{\omega}\pi i});$$

hierbei sind ω und $\overline{\omega}$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$a\omega^2+b\omega+c=0,$$

die für den vorliegenden Fall negativer Determinante conjugirt imaginär ausfallen. Kronecker ist auf diese Formel oft wiederholt zurückgekommen und hat ihre Giltigkeit schliesslich auch noch für den Fall beliebiger complexer a, b, c bewiesen, die nur der einen Bedingung genügen, dass ω und $-\overline{\omega}$ positiven imaginären Bestandtheil haben.

Es muss nun hier sehr betont werden, dass auf die Kronecker'sche Formel von Seiten der Klein'schen Theorie der Modulfunctionen ein neues Licht geworfen wird. Die Sachlage ist folgende: Geht man von der Form (a, b, c) zu einer äquivalenten Form über, so erfahren ω und $\overline{\omega}$ zugleich eine lineare ganzzahlige Substitution der Determinante 1. Schreibt man homogen $\omega=\omega_1:\omega_2$ und $-\overline{\omega}=\eta_1:\eta_2$, so stellt sich der bezeichnete Uebergang in der Gestalt dar:

$$\omega'_1=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\quad \eta'_1=\alpha\eta_1-\beta\eta_2,$$
$$\omega'_2=\gamma\omega_1+\delta\omega_2,\quad \eta'_2=-\gamma\eta_1+\delta\eta_2;$$

es ist demzufolge $\omega'_1\eta'_2+\omega'_2\eta'_1=\omega_1\eta_2+\omega_2\eta_1$, und man nennt in diesem Sinne ω_1, ω_2 und η_2, η_1 contragrediente Variabele. Es entspricht nun den einfachsten Grundsätzen der Theorie der Modulfunctionen und zugleich der Invarianz der Coefficienten A_0, A_1, ..., nach Formen $\Phi(\omega_1, \omega_2 \mid \eta_1, \eta_2)$ der beiden Variabelenreihen zu suchen, welche gegenüber der angegebenen

Gruppe der contragredienten Substitutionen invariant sind. Producte von Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2) . \psi(\eta_1, \eta_2)$ zeigen diese Eigenschaft bereits und hier steht als einfachstes Product:

$$\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) . \sqrt[12]{\Delta}(\eta_1, \eta_2)$$

voran, wobei unter $\sqrt[12]{\Delta}$ eine bekannte Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension verstanden ist. Von ω und $\eta = \eta_1 : \eta_2$ allein abhängig erweist sich die Function:

$$F(\omega, \eta) = (\omega_1\eta_2 + \omega_2\eta_1) . \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) . \sqrt[12]{\Delta}(\eta_1, \eta_2),$$

deren Invarianz aus ihrem Bildungsgesetz unmittelbar klar ist. Auch der Logarithmus dieser Function ist noch eindeutig, wie man durch einfache Grundsätze der Theorie der Modulfunctionen zeigt; und nun ist es gerade der Sinn der Kronecker'schen Formel (in ihrer allgemeinsten Auffassung mit complexen a, b, c), dass

$$A_0 = -2\Gamma'(1) - 2\log[(\omega_1\eta_2 + \omega_2\eta_1) . \sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)\sqrt[12]{\Delta}(\eta_1, \eta_2)]$$

ist, dass also A_0 bis auf eine additive und eine multiplicative Constante gerade mit $\log F(\omega, \eta)$ identisch ist. Man muss in diesem Sinne vom Standpunkte der Modulfunctionen die Kronecker'sche Leistung als den ersten Schritt in eine Theorie der Modulformen zweier contragedienten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, cogredienten Variabelenreihen ansehen.

Das Seguier'sche Buch gruppirt sich um die beiden Kronecker-schen Formeln in der Art, dass es einmal Vorbereitungen zum Beweise derselben entwickelt, wobei specifische Vorkenntnisse aus der Zahlentheorie in möglichst geringem Umfange vorausgesetzt werden; vornehmlich aber gilt die Darstellung Seguier's den Anwendungen der Kronecker'schen Formeln auf das Problem der Klassenanzahlen, sowie auf die Theorie der singulären Moduln, welche bei der complexen Multiplication der elliptischen Functionen auftreten. Der erste Theil des Buches zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Summen von Gauss, die Principien der Theorie der quadratischen Formen und die Composition der Formen behandelt, der zweite aber die erste Fundamentalformel von Kronecker, die Eintheilung der Klassen quadratischer Formen in Geschlechter und die verallgemeinerten Gauss'schen Summen. Mit der letzteren Bezeichnung werden gewisse Doppelsummen belegt, welche eine den gewöhnlichen Gauss'schen Summen verwandte Bauart zeigen, wobei übrigens die Exponentialgrösse der gewöhnlichen Gauss'schen Summen durch die Thetafunction ersetzt erscheint. Der zweite Theil des Buches ist der zweiten Kronecker'schen Formel gewidmet und entwickelt zugleich einige Sätze über Transformation und complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Der dritte Theil enthält endlich Anwendungen der beiden Kronecker-schen Formeln; und zwar steht hier im Mittelpunkte die Berechnung der singulären Moduln, für welche die complexe Multiplication der elliptischen Functionen stattfindet. Man hat für jeden besonderen Fall der complexen

Multiplication die Auswahl zwischen einer grossen Zahl singulärer Moduln, welche schliesslich alle im Wesentlichen dasselbe leisten; und man hat es wieder als einen Vorzug der Klein'schen Theorie anzusehen, dass sie in jedem Falle ein Urtheil an die Hand giebt, welches die einfachsten singulären Moduln sind. Der Gebrauch der Kronecker'schen Formel führt zu denselben singulären Moduln, auf welche Herr Weber von den Schläfli'schen Modulargleichungen aus geführt wird. Die letzteren liefern die sogenannten „Gleichungen der complexen Multiplication", deren Wurzeln die singulären Moduln sind. Die Methode, mit welcher Herr Seguier operirt, führt durch eine eigenthümliche Verknüpfung der beiden Kronecker-schen Formeln direct auf die singulären Moduln. Es ergiebt sich dabei zugleich eine sehr interessante Auflösung der Pell'schen Gleichung durch elliptische Functionen, welche sich der bekannten Auflösung dieser Gleichung durch Kreisfunctionen an die Seite stellt. Die Berechnung der singulären Moduln wird thatsächlich durchgeführt für einige von jenen 65 durch 4 theilbaren Determinanten, welche nach einem von Euler und Gauss als wahrscheinlich hingestellten Satze die einzigen Determinanten mit nur ambigen Klassen sind. Die Lösung der Pell'schen Gleichung durch elliptische Functionen wird für den Fall $t^2 - 53u^2 = 4$ durchgeführt. Die numerische Berechnung der singulären Moduln darf man bei der grossen Bedeutung, welche die Gleichungen der complexen Multiplication für die moderne Gleichungstheorie haben, als eine wichtige Aufgabe ansehen. Es sei bemerkt, dass Herr Weber die Berechnung für die sämmtlichen 65 oben gemeinten Determinanten durchgeführt und die Resultate am Schlusse seines mehrfach genannten Werkes zusammengestellt hat.

Robert Fricke.

P. Molenbroek. **Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie.** Leiden 1893. Brill. 253 S.

Im Anschluss an die „Theorie der Quaternionen" (vergl. Ref. im 36. Bd. S. 73, 74) lässt Verfasser hier eine systematisch geordnete Darstellung von Anwendungen folgen, in sechs Abschnitten:

1. Deutung einiger Formeln. Vermischte Aufgaben aus der Trigonometrie und Geometrie.
2. Der Punkt, die Ebene, die Gerade und die Kugel.
3. Die Flächen zweiter Ordnung.
4. Allgemeine Theorie der Flächen.
5. Allgemeine Theorie der Curven. Krümmung.
6. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.

Anhang: Das Princip der Dualität.

Wie man sieht, sind es keine neuen Probleme, die hier mit Hilfe des Quaternionencalcüls gelöst bezw. in Angriff genommen werden, der grösste Theil findet sich schon in Hamilton's Elementen behandelt.

Hervorzuheben ist, dass auch die Theorie der Polaren beliebiger Ordnung eines Punktes in Bezug auf eine Fläche der Behandlung mittelst Quaternionen zugängig gemacht wird. Doch bekennt Verfasser selbst, dass sein Verfahren hinter dem Joachimsthal'schen an Einfachheit zurückbleibt. Neu unter den Anwendungen ist der Versuch, die partiellen linearen Differentialgleichungen mittelst Quaternionen zu integriren. Es werden zwei Methoden entwickelt, um Integrale der partiellen linearen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu finden.

Den Schluss des Bandes bildet ein Bogen Berichtigungen und Zusätze zu der „Theorie der Quaternionen". E. Jahnke.

P. Molenbroek. **Over de toepassing der quaternionen op de mechanica en de natuurkunde.** Amsterdamer Bericht. 1893. S. 1—38.

Hamilton hatte die Absicht, in seinen „Elementen" die Brauchbarkeit des Operators ∇ für physikalische Anwendungen nachzuweisen; doch kam diese Absicht nicht zur Ausführung. Nun entwickelte Tait in seinem „elementary treatise on quaternions" eine diesbezügliche Methode, von der er indessen selbst zugiebt, dass sie keine directe ist. Diese Lücke sucht Verfasser auszufüllen, indem er von Gesichtspunkten ausgeht, die in seiner „Theorie der Quaternionen" und in seiner „Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie" eine ausführliche Darlegung gefunden haben. Die Gegenstände der einzelnen Kapitel sind: Laplace-Poisson'sche Differentialgleichung, Green'sches Theorem, Elasticitätstheorie, die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen, Wirbelbewegung und stationäre Potentialbewegung.

E. Jahnke.

A. Sickenberger. **Leitfaden der elementaren Mathematik.** Zweiter Theil. Planimetrie. 2. Aufl. München 1893. Ackermann. 123 S.

Es ist eine knappe Darstellung des gewöhnlichen planimetrischen Pensums, welches hier und da noch eingeschränkt worden ist. So fehlt u. A. gänzlich der Begriff der harmonischen Theilung und mit ihm die Gruppe von Aufgaben, deren elegante Lösung auf dem Apollonischen Halbkreis beruht. Mit Recht ist der Ptolemäische Lehrsatz unter die Uebungsaufgaben verwiesen.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass den einzelnen Abschnitten Uebungsbeispiele beigegeben sind. Hierbei verdient hervorgehoben zu werden, dass unter die algebraisch-geometrischen Aufgaben auch Maximum- und Minimum-Aufgaben leichtester Art aufgenommen worden sind, deren Lösung sich durch Discussion der Discriminante einer quadratischen Gleichung ergiebt. E. Jahnke.

Bibliographie

vom 1. Mai bis 15. Juli 1895.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1894, III und 1895, I. Leipzig, Hirzel. à 1 Mk.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem. Classe. 1895, I. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe. Jahrgang 1894. Prag, Rivnac. 20 Mk.

Verhandlungen der vom 5.—12. September 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung. Redigirt von A. Hirsch. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Landesvermessung d. Grossherzogthums Mecklenburg. 5. Theil. Die conforme Kegelprojection, angewandt auf das trigonom. Netz erster Ordnung. Schwerin, Stiller. 4 Mk.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. 66. Versammlung in Wien, 24.—28. Sept. 1894. 2. Theil. Leipzig, Vogel. 15 Mk.

Das Präcisionsnivellement der Rheinpfalz, ausgef. u. bearb. von C. Oertel. Veröffentlichung der königl. bayer. Commission für internationale Erdmessung. München, Franz. 1 Mk. 50 Pf.

Publicationen des astrophysikal. Observatoriums in Potsdam. Nr. 26. Spectra der helleren Sterne. Leipzig, Engelmann. 10 Mk.

—— Nr. 33. Meteorologische Beobachtungen in den Jahren 1888 u. 1889. Ebendaselbst. 8 Mk.

Veröffentlichungen der königl. preuss. geodätischen Instituts. Telegraphische Längenbestimmungen i. d. J. 1890—1893. Berlin, Stankiewicz. 15 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. Gewitterbeobachtungen im Jahre 1891. Berlin, Asher. 3 Mk.

—— Beobachtungen an Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1891. Zugleich deutsches meteorol. Jahrbuch für 1891. 3. Heft. Ebendas. 9 Mk.

—— im Jahre 1894. 2. Heft. Ebendaselbst. 2 Mk. 50 Pf.

—— Meteorologische Beobachtungen zu Potsdam i. J. 1893. Ebendas. 9 Mk.

Deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1894. Von der Station I. Ordnung in Bremen. 5. Jahrg. Herausgeg. von P. Bergholz. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. Herausgeg. von der Direction. XVII. Jahrg. 1894. Hamburg, Friedrichsen. 15 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1896. Herausgegeben vom Reichs-Marineamt. Berlin, Mittler & Sohn. 1 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 24. Bd. 1892. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Unterrichtsblätter für Mathematik u. Naturwissenschaften. Herausgeg. von B. Schwalbe u. F. Pietzker. 1. Jahrgang. 1895. Nr. 1. Braunschweig, Salle. 3 Mk.

Jahresverzeichniss der an den deutschen Schulanstalten erschienenen Abhandlungen. VI, 1894. Berlin, Asher. 2 Mk. 20 Pf.

Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Petersburg. 17. Bd. Redigirt von H. Wild. Ebendaselbst. 43 Mk. 50 Pf.

—— 6. Supplementband. Ebendaselbst. 25 Mk.

Bulletin de l'académie des sc. de St. Pétersbourg. 5 série, tome I, No. 3 et 4. Leipzig, Voss. 2 Mk. 50 Pf,

—— tome II, No. 1 et 2. Ebendaselbst. 2 Mk. 50 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Wohlwill, E., Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Hamburg, Gräfe & Sillem. 2 Mk.

Dühring, E., Rob. Mayer, der Galilei des 19. Jahrhunderts. 2. Theil. Leipzig, Naumann. 2 Mk. 50 Pf.

Reine Mathematik.

Weierstrass, K., Mathematische Werke. Unter Mitwirkung der königl. preuss. Akademie herausgegeben. 2. Bd. Berlin, Mayer & Müller. 21 Mk.

Biermann, O., Elemente der höheren Mathematik zur Vorbereitung auf Differentialrechnung, Algebra und Functionentheorie. Leipzig, B. G. Teubner. 10 Mk.

Grohmann, E., Zur Auflösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades. Wien, Hölder. 1 Mk.

Schülke, A., Vierstellige Logarithmentafeln nebst mathematischen, physikalischen und astronomischen Tabellen. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.

Fischer, E., Reihenentwickelungen mit Hilfe arithmetischer Progressionen höherer Ordnung (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Glaser, St., Ueber einige nach Binomialcoefficienten fortschreitende Reihen (Programm). Ebendaselbst 1 Mk.

Schaphbitlin, P., Ueber die Producte der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen (Programm). Ebendaselbst. 1 Mk.

Linsenbarth, H., Ueber Unicursalcurven dritter Ordnung (Programm). Ebendaselbst. 1 Mk.

Marggraff, B., Primitive Gruppen, welche eine transitive Gruppe geringeren Grades enthalten (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Steiner, J., Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Herausgeg. von A. v. Oettingen (Ostwald's Klassiker Nr. 60). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Gysel, J., Zur Construction einer ebenen Vielecksfläche (Programm). Schaffhausen, Schoch. 1 Mk.

Gille, A., Lehrbuch der Geometrie für höhere Schulen. 2. Theil. Trigonometrie und Stereometrie. Halle, Buchhandlung d. Waisenh. 40 Pf.

Längst, H., Kegelschnitte, vorbereit. Curs. Stuttgart, Kohlhammer. 1 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

Wülfing, A., Uebersicht der einfachen Formen der 32 krystallographischen Symmetriegruppen. Stuttgart, Schweizerbart. 5 Mk.

Die königl. preuss. Landestriangulation. 7. Theil. Berlin, Mittler & Sohn. 15 Mk.

Rümker, G., Positionsbestimmungen von Nebelflecken und Sternhaufen. Ausgeführt auf der Hamburger Sternwarte in den Jahren 1871 bis 1880. Hamburg, Gräfe & Sillem. 1 Mk. 50 Pf.

Stechert, C., Bahnbestimmung des Planeten Tyche (258). Ebendaselbst. 1 Mk. 50 Pf.

Fauth, P., Astronomische Beobachtungen aus den Jahren 1893 und 1894. Theil II. Mondbeobachtungen. Kaiserslautern, Gotthold. 15 Mk.

Physik und Meteorologie.

Tesla's Untersuchungen über Mehrphasen- und Wechselströme hoher Spannung und Frequenz. Von Commerford Martin; deutsch von H. Maser. Halle, Knapp. 15 Mk.

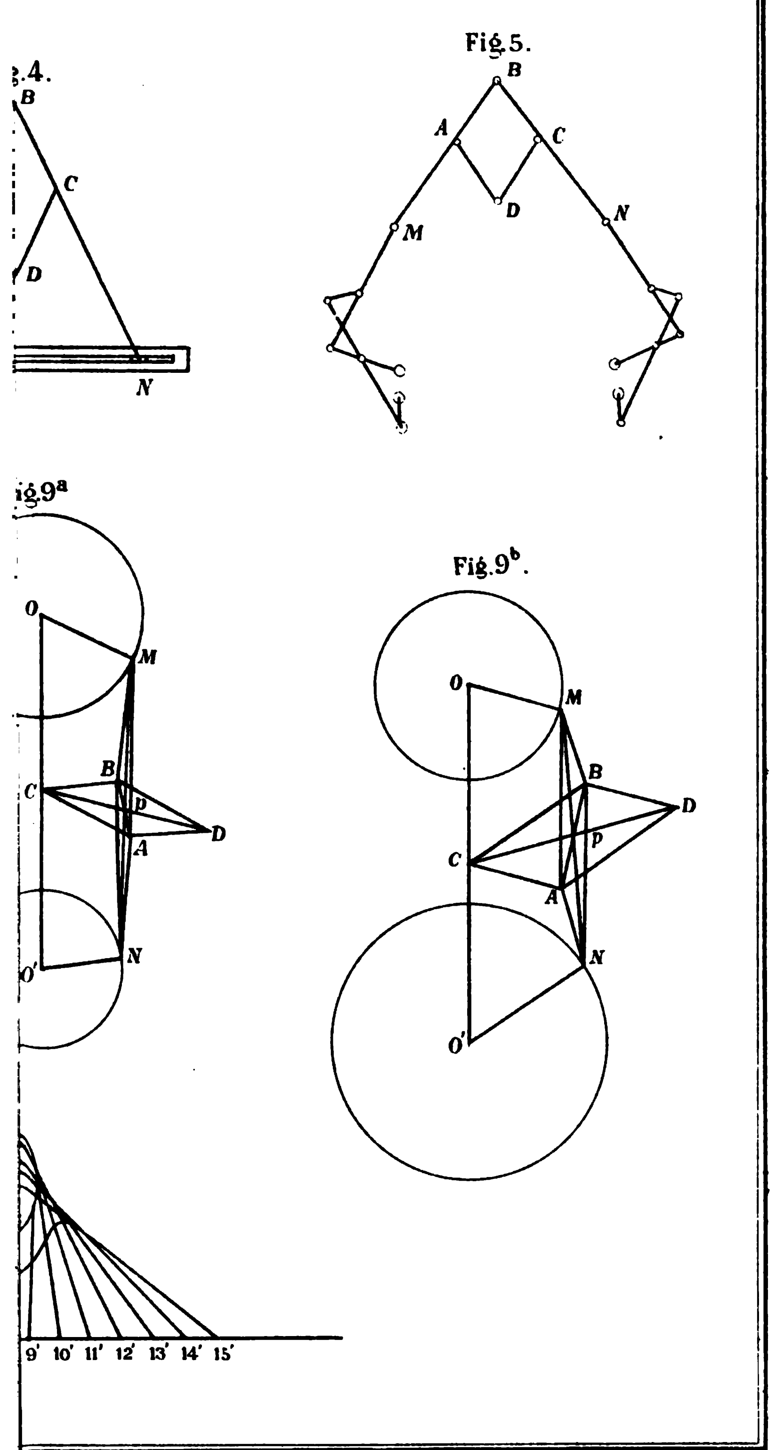
Exler, K., Grundzüge der Elektrotechnik. Wien, Spielhagen & Schurig. 10 Mk.

Bedell, F. und Crehore, C., Theorie der Wechselströme, analytisch und graphisch. Deutsch von H. Bucherer. München, Oldenbourg. 7 Mk.

Robel, E., Die Sirenen. 3. Theil. Der Streit um die Definition des Tones (Programm). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Schneider, E., Entstehung und Prognose der Wirbelstürme. Regensburg, Nationale Verlagsanstalt. 2 Mk. 40 Pf.

Jelinek, Anleitung zur Ausführung meteorologischer Beobachtungen, nebst Hilfstafeln. 2. Theil. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.



.4.
B
C
D
N
Fig. 5.
B
A
C
D
M
N
ig. 9ª
O
M
B
C
p
D
A
N
O'
Fig. 9ᵇ.
O
M
B
D
p
C
A
N
O'
9'
10'
11'
12'
13'
14'
15'

Historisch-literarische Abtheilung.

Anonyme Abhandlung über das Quadratum Geometricum.

Herausgegeben von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

Hierzu Tafel XII Figur 1—8.

Die folgende Abhandlung findet sich im Codex Latinus Monacensis 14908, Blatt 308—311. Sie lehrt die Herstellung des Quadratum Geometricum nicht ganz übereinstimmend mit **Georg Peurbach**, jedoch auch zu etwas anderem Zwecke bestimmt. Der ungenannte Verfasser lehrt nach der Beschreibung desselben seine Anwendung zum Tiefen-, Längen- und Höhenmessen. Von den Vorschriften, welche sich in der Geometria Gerberti finden, und welche mit einem bei weitem unvollkommeneren Instrumente gemacht werden, haben die hier gelehrten vor allem das voraus, dass sie auch den Grund angeben, auf welchem die ganze Anwendung desselben beruht, dass nämlich stets zwei ähnliche Dreiecke vorhanden sind, man von der daraus folgenden Proportion stets drei Glieder kennt, und dass man also auch leicht das vierte unbekannte berechnen kann. Der Verfasser nimmt dabei auf **Euklid** Buch 6, Prop. 4 Bezug und beruft sich an einer anderen Stelle auf den Algorismus de minutiis. Es ist darunter, wie mit Sicherheit nachgewiesen werden kann, der Algorismus de minutiis des **Johannes de Lineriis*** gemeint, der sowohl im Originale, wie in einer weiter ausgeführten Bearbeitung als zweiter Theil einer um-

* In den gedachten Ausgaben dieses Algorismus so wenig als in den meisten Handschriften findet sich die Widmung des **Joh. de Lineriis**, welche er seinem Werke voraussendet. Diese Widmung ist erhalten in der Handschrift der Amploniana in Erfurt Qu. 349[7], wo sie Blatt 11 folgendermassen beginnt:

> Multiplicis philosophiae variis radiis illustrato domino Roberto de Bardis de Florencia Glacunensis ecclesiae inclito decano Johannes de Lineriis Anbianensis diocesis astronomicae veritatis amator...

Daraus dürfte wohl absolut sicher hervorgehen, dass **Joh. de Lineriis** kein Sicilianer gewesen ist, und also **Johannes Siculus** eine andere Persönlichkeit sein muss.

fassenderen Schrift mit dem Gesammttitel **Algorismus Ratisponensis** in derselben Handschrift, sowie in noch einigen anderen der Münchener Hof- und Staatsbibliothek sich findet, und am Schlusse genau das enthält, was unser Verfasser als darin enthalten angiebt.

Von ganz erheblichem Interesse dürfte die am Schlusse des ganzen Aufsatzes hinzugefügte Tabelle sein, welche dazu bestimmt ist, dem Messenden die Rechnung abzunehmen. Wenn man dieselbe nach der gegebenen Anweisung nachrechnet, so sieht man leicht, dass die beiden ersten Colonnen nach dem ersten Theile der Regel, die beiden letzten nach dem letzten Theile derselben berechnet sind. Es sind dabei immer die Cubiti auf Ganze, theils mit plus, theils mit minus, abgerundet; ebenso im zweiten Theile die Gradus und minuta auf ganze minuta. So ist z. B. bei 52′ statt $69\frac{3}{13}$ rund 69, bei 44′ statt $81\frac{9}{11}$ das zu Grosse 82 gesetzt. Ebenso ist bei 46 cubiti *ec* um etwa 16″ zu klein, bei 22 cubiti um fast 22″ zu gross angegeben. Es ist daraus jedenfalls ersichtlich, wie wenig es damals noch auf wirkliche Genauigkeit ankam. Dass die Tabelle sich nur auf die in Figur 2, 3 und 4 dargestellten Messungen bezieht, ist einleuchtend.

|| De quadrato geometrico componendo.

Disponatur quadratum aereum seu ligneum aequilaterum undique planum, ut nusquam declinet, quod sit verbi gracia *abcd*; et quanto maior fuerit, tanto cercius. Ducanturque in lateribus quadrati praedicti lineae
5 rectae et aequales constituentes undique angulos rectos, qui sint *ab*, *bc*, *cd* et *da*, quarum duae, scilicet *cb* et *dc*, dividantur in 60 partes vel lineas praedictas aequaliter, quas partes vocabo gradus, quin per ipsos regula graditur. Quos gradus iterum subdividam in 60 partes, et vocabo eas minuta, scilicet si instrumentum fuerit magnum, vel subdividam in
10 alias partes grossiores, ut in 12 etc., et hoc, si instrumentum fuerit parvum. Deinde in unoquoque angulorum quadrati, scilicet *a*, *b* et *d*, *c* praecise in concursu linearum ordinetur clavus unus, qui tres clavi sint sibi omnino coaequales; per quas ordinetur regula seu volvella directa et plana, quae vocetur *de* seu *ac*, cuius longitudo fiat secundum logitudinem
15 diametri quadrati. In cuius volvellae medio ducatur linea recta, super quam lineam rectam circa punctum *d* fiat foramen, per quod volvella clavo *d* seu *a* competenter inmitti possit. In alio vero extremitate regulae, scilicet circa punctum *e*, infigatur scioterus, prioribus scioteris omnino aequalis ac eiusdem altitudinis inaequando *a* stilo vel clavo *e* versus
20 stilum *d*, qui per medium longitudinis regulae abscindatur medietas latitudinis ipsius regulae secundum longitudinem lineae in *ec* factae, ita tamen, ut praecise medietas lineae praedictae secundum | longitudinem moveat intacta, ut contactus medietatis volvellae et linearum *cb* et *dc* undique videri possit. Dividatur deinde volvella secundum divisiones et
25 subdiviones omnino aequaliter illis, quae sunt in lateribus quadrati factae,

quas ipsa volvella capere possit. Ultimo ordinetur perpendiculum, quod in lateribus quadrati *ab* et *ad* aptum sit suspendi, quo possit cognosci, quando ipsum quadratum steterit perpendiculariter orizonti (Fig. 1).

Constructo quadrato praedicto ad eius usum enudum est. Sciendum autem est, quod hoc instrumentum est de geometria, id est de triangu- 5 lorum mensura, qui triplex est, scilicet profundi, quae dicitur bassimetria; plani, quae dicitur planimetria; e talti, quae dicitur altimetria.

Primus modus.

De prima specie, scilicet bassimetria. Si igitur profundum mensurare volueris, exempli gracia fontem sive puteum, suspende quadratum in ore 10 putei perpendiculariter, et per duos stilos, scilicet *a* et *b*, ymum profundi respiciens punctum ymum, in quo visus terminatur, nota, et vocetur punctus ille super *f*. Deinde volvellam *ed* clavo *d* inmissam volve hincinde tamdiu, donec iterum punctum ymum prius notatum, scilicet *f*, per duos stilos *d* et *e* videris, et immota volvella diligenter nota, ubi ipsa cum 15 sui medio secat latus *bc*, et hic punctus semper vocetur sectionis *e*. Unde sicut se habet latus *bc* ad *ce*, sic se habet, scilicet *fa*, quae est profunditas putei, ad latus *ad*. Unde supposito, quod latus quadrati sit |309 cubiti, tunc quociens *bc* | vel *de* continetur *ce*, tot cubitorum erit profunditas putei praecedentis (Fig. 2).

Secundus modus. 20

De secunda specie, scilicet planimetria. Unde si planum metiri volueris, pone quadratum in terra ant in alio sic, ut terminum plani mensurandi, scilicet punctum *f*, per duos stilos *a*, *b* videre possis. Quo sic viso move volvellam super *d* positam, ut iterum per eius stilos punctum *f* videas. Deinde ubi volvella secat latus *bc*, scilicet punctum *e*, diligenter nota. Tunc 25 quociens *dc* continet *ce*, tociens distancia spacii mensurandi, scilicet *af*, continet latus *ad* (Fig. 3).

Tercius modus.

De tercia specie geometriae, scilicet altimetria. Unde, dum altum metiri volueris, considera, an ipsius alti basis sit accessibilis, an non, quae basis vocatur *g*. Si ergo accessibilis basis fuerit, tunc affige quadratum parieti 30 iuxta basim, id est punctum *g*, et per duos stilos *a*, *b* aliquod signum in extremitate altitudinis considera. Deinde idem signum per stilos, volvella *ed* stilo *d* infixa, vide, et procede praecise et omnino, sicut fecisti in planimetria (Fig. 4). *Aut sic*: Affige volvellam super stilum *a* et eam volve super punctum *c*, et quadrato perpendiculariter tento accide ad basim vel 35 recede tamdiu, donec per stilos regulae cacumen rei videtur, quia tunc distancia, quae est inter te et basim rei, est aequalis altitudini rei eiusdem addita ipsi distancia tua statura (Fig. 5).

|309' *Si vero basis* | *rei altae mensurandae non accessibilis fuerit*, aut aliquid, ut praedicto modo mensurare non possis, impediat, tunc in loco tibi 40 competenti stando secutam longitudinem, quae est inter te et cacumen rei altae mensura omnino eo modo, qui dictus est in planimetria, et vocetur longi-

tudo illa *af*. Qua habita situa quadratum perpendiculariter orizonti, et volvellam *a* stilo infigendo per eius stilos cacumen rei praedictae respice. Quo viso, ubi volvella secat quadratum, scilicet punctum *e*, diligenter nota. Scias autem, si regula ceciderit ultra *c* versus *b*, tunc distancia
5 inter te et basim est minor altitudine rei, et tunc, sicut se habet *ea* ad *ab*, sic se habet *af* ad *fg*, scilicet ad altitudinem rei. Sed quia tibi tria, *ea*, *ab* et *fa*, sunt nota, igitur *fg* quartum, quae est altitudo rei, est nota (Fig. 6). Si vero regula ceciderit ultra *c* versus *d*, tunc distancia inter te et basim rei est maior altitudine rei eiusdem. Et tunc,
10 sicut se habet *ae* ad *ed*, sic se habet *af* ad *fg*, quae est altitudo quaesita. Sed quia iterum tibi tria, scilicet *ae*, *cd* et *af*, sunt nota, igitur quartum, scilicet *fg*, quae est altitudo rei, est notum. Haec autem regulae, scilicet inveniendi ignotum per nota, ponuntur in fine algorismi de minuciis (Fig. 7).

Si vero fueris in cacumine montis, et altitudinem eius in eo stans scire
15 *volueris*, tunc scias longitudinem | a cacumine montis eiusdem, in quo stas, |318 usque ad pedem eius per modum dictum in secunda specie artis huius. Deinde situa quadratum perpendiculariter ipsi terra cum latere *dc* versus terram et affiges regulam stilo *a*, et per eius stilos punctum *f* in pede montis prius visum nota. Deinde considera punctum *e*, in quo scilicet
20 regula secat latus quadrati. Unde, sicut se habet *ae* ad *ad* aut *cb*, sic se habebit *af* ad *ag*, quae est montis altitudo quaesita, posito monte verbi gracia *hdk* (Fig. 8).

Fundatur autem haec tota practica super quartum sexti **Euclidis**, quae est: Omnium duorum triangulorum, quorum anguli unius angu-
25 lis alterius sunt aequales, latera aequos angulos respiciencia sunt proporcionalia.

Sed propter faciliorem modum in quadrato isto volo ponere certos numeros cubitorum et aliarum quantitatum, cuius quantitatis latus fuerit quadrati, certis gradibus et minutis in latere quadrati notatis correspon-
30 dentes.

Unde quando regula unum minutum, quod est sexagesima pars gradus, a *c* versus *b* eundo resecuerit, tunc longitudo mensurandi 3600 cubitorum est, supposito, quod latus quadrati unius cubiti fuerit. Si vero regula a *c* versus *b* per duo minuta distiterit, longitudo praedicta 1800 cubitorum
35 erit; si vero per tria minuta regula a *c* | versus *b* elongaverit, longitudo |319 mensuranda 1200 cubitorum erit, et sic omnes istos numeros notando usque ad 60 gradus in latere quadrati positos ponuntur in tabula praescripta.

Inveniuntur autem hii numeri sic. Vide per quot minuta distat *e* a *c*, et quociens ipsa continetur in latere quadrati, quod scire potes dividendo
40 per ea 60 gradus: tot cubiti correspondent minutis praedictis. Vel quod sit *dc* scilicet primus, *ce* verbi gracia secundus, *fa*, scilicet ignotus, tercius, *ad*, scilicet unitas, est quartus. Duc igitur etc. Vel e converso si habes cubitos, et quot ipsis gradus et minuta correspondent, scire volueris, tunc

pone cubitos, scilicet lineam *fa* primum; et *ab*, scilicet latus quadrati, secundum, id est unitatem; et *dc*, scilicet 60 tercium; et duc secundum in tercium et divide per primum, et quot proveniunt, sunt gradus et minuta, 311| aut minuta tantum praedictis cubitis correspondencia. |

Sequitur tabula.

Gradus	Minuta	Cubiti	Gradus	Minuta	Cubiti	Gradus	Minuta	Cubiti	Gradus	Minuta	Cubiti
0	1	3600	0	31	116	1	0	60	2	0	30
0	2	1800	0	32	112	1	1	59	2	4	29
0	3	1200	0	33	109	1	2	58	2	9	28
0	4	900	0	34	106	1	3	57	2	13	27
0	5	720	0	35	103	1	4	56	2	18	26
0	6	600	0	36	100	1	6	55	2	24	25
0	7	514	0	37	97	1	7	54	2	30	24
0	8	450	0	38	95	1	8	53	2	37	23
0	9	400	0	39	92	1	9	52	2	44	22
0	10	360	0	40	90	1	11	51	2	51	21
0	11	327	0	41	88	1	12	50	3	0	20
0	12	300	0	42	86	1	14	49	3	9	19
0	13	277	0	43	84	1	15	48	3	20	18
0	14	257	0	44	82	1	17	47	3	32	17
0	15	240	0	45	80	1	18	46	3	45	16
0	16	224	0	46	78	1	20	45	4	0	15
0	17	212	0	47	77	1	22	44	4	17	14
0	18	200	0	48	75	1	24	43	4	37	13
0	19	189	0	49	73	1	26	42	5	0	12
0	20	180	0	50	72	1	28	41	5	27	11
0	21	171	0	51	71	1	30	40	6	0	10
0	22	164	0	52	69	1	32	39	6	40	9
0	23	157	0	53	68	1	35	38	7	30	8
0	24	150	0	54	67	1	38	37	8	34	7
0	25	144	0	55	65	1	40	36	10	0	6
0	26	138	0	56	64	1	43	35	12	0	5
0	27	133	0	57	63	1	46	34	15	0	4
0	28	129	0	58	62	1	49	33	20	0	3
0	29	124	0	59	61	1	52	32	30	0	2
0	30	120	0	60	60	1	56	31	60	0	1

Recensionen.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Professor Dr. LUDWIG SCHLESINGER. I. Bd. Leipzig 1895. B. G. Teubner. XX und 486 S.

In dem Werk, dessen erster Band uns vorliegt, soll der gewaltige Stoff, der sich in den dreissig Jahren seit Begründung der modernen Theorie der linearen Differentialgleichungen angehäuft hat, einem zweifellos vorhandenen Bedürfniss entsprechend „zu einem einheitlichen Lehrgebäude zusammengefasst werden, um ein möglichst getreues und vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande dieser Theorie zu liefern". Das ist keine geringe Aufgabe, und es durfte daher mit Freuden begrüsst werden, als die Anzeige erschien, dass zwei Männer sich mit derselben befassen wollten, die sich durch ihre Arbeiten bereits als in hohem Maasse hierfür befähigt erwiesen hatten. Paul Günther aber wurde schon wenige Monate nach Beginn der gemeinsamen Arbeit von einem vorzeitigen Tode dahingerafft. Die Lectüre der nach dem Vorwort wesentlich von ihm herrührenden, geradezu vorzüglich geschriebenen historischen Einleitung* über die Entwickelung der Functionentheorie im Allgemeinen und der Theorie der Differentialgleichungen im Besonderen, lässt uns seinen Hingang auf's Neue beklagen.

So sah sich Herr Schlesinger allein vor dem grossen Unternehmen; aber er hat sich demselben auch ohne den Mitarbeiter völlig gewachsen gezeigt. Wir wollen schon an der Schwelle des Berichtes folgende Hauptvorzüge seiner Arbeit erwähnen. Der Verfasser steht allenthalben merklich über dem äusserst reichhaltigen und vielseitigen Stoff, den er selbst in manchen Punkten wesentlich bereichert. Indem er aber auch die von Anderen geschaffenen Theorien zunächst gründlich in sich aufgenommen und verarbeitet hat, um sie dann erst in Anpassung an das Ganze zu reproduciren, ist er eigentlich überall originell. Die Behandlung dringt stets in die Tiefe und sucht auch bei schwierigeren Fragen den Kern der Sache zu treffen. Die Anordnung und Darstellung ist fast durchweg klar und

* S. 2 Zeile 15 von oben lies „nur" statt „nicht"; Zeile 14 von unten lies „hier" statt „wieder".

naturgemäss. Dadurch, dass der Verfasser „sich nicht den beengenden Zwang einer starren Systematik auferlegen, sondern die Darstellung in der Form möglichst frei und im Aufbau wesentlich der historischen Entwickelung folgend gestalten“ wollte, ist es ihm in der That gelungen, den Eindruck der Langweiligkeit glücklich zu vermeiden, der wohl gelegentlich nicht mit Unrecht dem Begriff „Handbuch“ anhaftet.

Eine kurze Wanderung durch das Buch selbst möge dazu dienen, ein so günstiges Urtheil zu begründen, und zugleich Gelegenheit bieten, diejenigen Punkte hervorzuheben, in denen — nach Ansicht des Referenten — Ausstellungen gemacht werden müssen.

Auf die schon erwähnte historische folgt eine theoretische Einleitung*, welche u. A. auf die zuerst von Fuchs hervorgehobenen verschiedenartigen Singularitäten einer monogenen Function hinweist, die linearen Differentialgleichungen als solche charakterisirt, die keine mit den Anfangswerthen verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, und endlich die Nothwendigkeit darlegt, für die linearen Differentialgleichungen einen besonderen Existenzbeweis zu liefern, der mehr leistet wie der allgemeine Cauchy'sche für beliebige Differentialgleichungen.

I. Allgemeine Grundlagen der Theorie.

In der Umgebung einer regulären Stelle besitzt die lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ein Integral in Gestalt einer gewöhnlichen Potenzreihe mit n-willkürlichen ersten Coefficienten (Anfangswerthen), convergent mindestens in dem Kreis, der bis zur nächsten singulären Stelle reicht. Durch Fortsetzung kann der Giltigkeitsbereich dieses Integrals über das ganze von den regulären Stellen erfüllte Gebiet ausgedehnt werden.** Der nun folgende Begriff des particulären Integrals — so wird ein Integral genannt, wenn alle n-Anfangswerthe bestimmte sind — scheint uns etwas zu eng gefasst, da so in der Bezeichnung für die Integrale mit ν willkürlichen Constanten $(0 < \nu < n)$ eine Lücke bleibt. — Ein Fundamentalsystem ist ein solches System von n Integralen, dessen Determinante nicht identisch verschwindet; das allgemeine Integral ist die lineare homogene Verbindung der Elemente eines Fundamentalsystems mit n willkürlichen Coefficienten. Aus der Definitionseigenschaft des Fundamentalsystems folgt die lineare Unabhängigkeit seiner Elemente und umgekehrt. Die Elemente eines Fundamentalsystems erfahren eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante, wenn die unabhängige Variable einen Umlauf beschreibt, der die Coefficienten nicht ändert.

---

* S. 15 Zeile 1 lies „(2)“ statt „(3)“, S. 17 Zeile 1 der Ausdruck „in deren jeder Nähe“ dürfte auch in „mathematischem Deutsch“ nicht zulässig sein! — S. 17 Z. 14, 15 die Worte „unendlich vielen positiven und“ sind als überflüssig und daher vielleicht verwirrend zu streichen.

** S. 27 am Kopf lies „10“ statt „11“.

II. Formale Theorien.

Nachdem im I. Abschnitt mit dem Existenzbeweis eine Operationsbasis gewonnen ist, wird diese zunächst für das eigentliche Integrationsgeschäft noch nicht weiter ausgenützt, sondern es folgt erst eine Art „Intermezzo". Die linearen Differentialgleichungen zeigen mannigfache Analogieen mit algebraischen Gleichungen; z. B. „eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten, die mehr linear unabhängige Integrale besitzt, als ihre Ordnungszahl beträgt, muss identisch verschwinden" — der Appell'sche Satz, der ein Gegenstück zu dem Satz von der rationalen Ausdrückbarkeit der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch die Coefficienten darstellt — die Theorie der gemeinsamen Lösungen mehrerer Differentialgleichungen — die Zusammensetzung von Differentialausdrücken (Frobenius) u. A. — Wie der Grad einer algebraischen Gleichung bei Kenntniss einer Wurzel um 1 zu erniedrigen ist, so auch hier die Ordnung der Differentialgleichung bei Kenntniss eines Integrals.* Die alsdann folgende Theorie der Multiplicatoren und adjungirten Differentialgleichungen gipfelt in dem Satz: „Die sämmtlichen Multiplicatoren einer Differentialgleichung sind Lösungen der adjungirten und umgekehrt." Die Multiplicatoren lassen sich noch mittelst Determinantenquotienten durch die Elemente eines Fundamentalsystems ausdrücken. Dies führt zu Beziehungen zwischen adjungirten Fundamentalsystemen. Uebt man auf die Elemente eines Fundamentalsystems eine lineare Substitution aus, so ergiebt sich: Dieses Fundamentalsystem und sein adjungirtes sind contragredient. Sätze über sich selbst adjungirte und ihren adjungirten entgegengesetzt gleiche Differentialausdrücke beschliessen diese Betrachtungen, die sodann eine Anwendung finden in der Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen.

Die Kenntniss der Integration einer solchen gestattet nun die weitere Ausführung der Untersuchung über gemeinsame Lösungen mehrerer Differentialgleichungen und die Einführung des Begriffs der Irreductibilität. Der Verfasser stellt sogleich die folgende sehr allgemeine Definition auf „eine lineare homogene Differentialgleichung heisst irreductibel, wenn sie mit keiner ebensolchen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, deren Coefficienten von derselben Beschaffenheit sind (dies entspricht der Berücksichtigung des Rationalitätsbereichs bei der algebraischen Irreductibilität) „eine Lösung gemein hat." Hierbei kommt es natürlich wesentlich auf den Bereich an, in welchem die beiden Differentialgleichungen gleiche Beschaffenheit haben; dies wird auch vom Verfasser streng hervorgehoben und wird im Folgenden sehr bald praktisch. Eben deshalb aber scheint es uns wünschenswerth, ja nothwendig, dies in die

---

* S. 48 Zeile 9 von unten würden wir statt „Werth" lieber „Zweig" lesen.

Definition mit aufzunehmen und von vornherein nur von „Irreductibilität in einem gewissen Bereich“ zu sprechen. Es tritt dann deutlich zu Tage, wie z. B. die beiden Arten von Irreductibiltät, welche Frobenius eingeführt hat, sich lediglich durch den Bereich, in dem diese Eigenschaft besteht, unterscheiden. Umfasst der Bereich die ganze x-Ebene, so kann man ja übereinkommen, in diesem Falle, gerade wie z. B. von „eindeutigen Functionen“ schlechthin, auch von „Irreductibilität“ schlechthin zu sprechen. — Die Bedeutung der Reductibilität einer linearen Differentialgleichung wird treffend darin erkannt, dass diejenigen Integrale derselben, die einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung genügen, nur so viel linear unabhängige Zweige (in dem betreffenden Bereich!) besitzen, als die Ordnung der letzteren Differentialgleichung beträgt.

III. Theorie der Fundamentalgleichung.

Diese wichtige Gleichung wird für irgend ein zweifach zusammenhängendes (ringförmiges) Gebiet E, das keinen singulären Punkt enthält, und einen darin vollzogenen Umlauf U in bekannter Weise nach Fuchs aufgestellt und liefert, falls sie lauter verschiedene Wurzeln besitzt, die Existenz eines canonischen Fundamentalsystems, dessen Elemente sich beim Umlauf U nur mit Constanten multipliciren.

Eine durchaus originelle Behandlung erledigt in elegantester Weise auch den Fall mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung und basirt auf dem bemerkenswerthen Ergebniss, dass die Coefficienten der Fundamentalgleichung übereinstimmen mit denen der Relation

$$c_n \Theta^n v + c_{n-1} \Theta^{n-1} v + \cdots + c_n v = 0,$$

welche das allgemeine Integral v mit den n-Integralen $\Theta v, \Theta^2 v, \ldots, \Theta^n v$ verknüpft, die bezw. durch $1, 2, \ldots n$-maligen Umlauf U aus v hervorgehen.* Hieraus folgt u. A.: „Wird die vorgelegte Differentialgleichung $P=0$ durch alle Integrale einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $R=0$ befriedigt, so ist die linke Seite ihrer Fundamentalgleichung durch die linke Seite der Fundamentalgleichung von $R=0$ theilbar.“ Da dieser Satz, wie einige andere ihm ähnliche, leicht zu beweisen ist, falls E ein Kreisring und die analytische Gestalt der Integrale in E schon ermittelt ist, muss besonders hervorgehoben werden, dass die Ableitung hier ohne diese Voraussetzung erfolgt. Die Anwendung dieser Theoreme auf die mehrfachen Wurzeln der Fundamentalgleichung ergiebt die Existenz eines in (Fuchs'sche) Gruppen eingetheilten Fundamentalsystems, dessen Elemente sich nur innerhalb der Gruppen verzweigen (wenn dieser kurze Ausdruck

* Der S. 109 Zeile 8 gebrauchte Ausdruck „specielles Integral“ ist nicht erklärt worden.

hier gestattet ist). Statt der Theorie der Elementartheiler führt alsdann diejenige des Ranges linearer Gleichungssysteme noch zur Eintheilung der Gruppen in die (Hamburger'schen) Untergruppen*, so dass die Integrale sich nur noch innerhalb der letzteren verzweigen, das heisst zu einem canonischen Fundamentalsystem auch im Falle mehrfacher Wurzeln der Fundamentalgleichung. Wir vermissen bei der Wichtigkeit des Begriffs eines canonischen Fundamentalsystems, mit dem im Folgenden häufig operirt wird, an der Stelle, wo dieser Name eingeführt wird (S. 127), die ausdrückliche Definition, das heisst die Angabe der charakteristischen Eigenschaften eines solchen Fundamentalsystems.

Endlich wird nun aus dem Vorhergehenden für ganz beliebige Gestalt des Ringgebietes E die analytische Form des canonischen Fundamentalsystems abgeleitet und dann für den Fall specialisirt, dass E ein Kreisring ist, dessen innerer Kreis beliebig klein ist und eine isolirte singuläre Stelle einschliesst. Dabei wird auch ausdrücklich auf den Fall eingegangen, in welchem die betreffende Stelle eine Verzweigungsstelle der Coefficienten der Differentialgleichung ist. Rein äusserlich ist die Berichtigung, dass hierbei auf S. 133 und 135 statt „ϱ-fach" nach Riemann'schem Sprachgebrauch „$(\varrho-1)$-fach" gesetzt werden muss (entsprechend später S. 209 „$(\lambda-1)$-fach" statt „λ-fach"). Ferner dürften in dem Satz S. 135 die Worte (Zeile 19, 20) „und durch die zu $x=a$ gehörige Fundamentalgleichung" zu streichen sein, und endlich ist S. 136 Zeile 17 von unten entweder „im Allgemeinen" zu streichen oder aber „können" durch „werden" zu ersetzen.

IV. Die singulären Stellen, an denen sich die Integrale bestimmt verhalten.

Während nach den bis jetzt gewonnenen Resultaten ein singulärer Punkt der Differentialgleichung im Allgemeinen eine Stelle der Unbestimmtheit für die Integrale ist, wird nun gefragt: „wie müssen die Coefficienten in der Umgebung eines Punktes, wo sie den Charakter von rationalen Functionen haben (noch des Weiteren) beschaffen sein, damit alle Integrale sich in dieser Umgebung bestimmt verhalten?" Dass bei dieser Fragestellung über die Coefficienten überhaupt schon eine Annahme gemacht wird, berührt etwas fremdartig. Die Voraussetzung wird zwar in der That S. 152 zunächst durch die weniger enge ersetzt, die Coefficienten sollen eindeutig in der betreffenden Umgebung sein, und in Nr. 59 wird dann auch der Fall einer beliebigen singulären Stelle, wo die Coefficienten algebraisch mehrdeutig sind, auf den Fall der Eindeutig-

* S. 125 Zeile 17 von unten flg. dürften die Worte „sind die ... so" als überflüssig zu streichen sein.

keit zurückgeführt. Thatsächlich ist aber jede Voraussetzung über die Coefficienten überflüssig, da lediglich aus dem Ansatz der Integrale in der Form

$$u = x^r(\psi_0 + \psi_1 \log x + \cdots + \psi_m \log^m x),$$

wo die ψ gewöhnliche Potenzreihen sind, im Kapitel I des Abschnittes die Form (D) [S. 152] der Coefficienten folgt. Auf diesen Ansatz der Integrale lässt sich der andere, wenn man annimmt, dass die ψ nach gebrochenen positiven Potenzen fortschreiten, von vornherein sofort zurückführen, so dass man auch für diesen Fall die nothwendige Gestalt der Coefficienten besitzt. Da aber andererseits beide Ansätze durch die vorangehende allgemeine Theorie gegeben werden, falls man von den Coefficienten voraussetzt, sie seien in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nur algebraisch mehrdeutig, so würde das bei dieser Fragestellung erzielte Resultat zugleich das geben, was hier für S. 136 zusammen mit den später folgenden Erweiterungen erreicht wird, und noch darüber hinausreichen. — Bei Satz 1 S. 141, der zweifellos richtig, aber (im allgemeinen Falle) keineswegs evident ist, wünschten wir wenigstens die Andeutung eines Beweises. In Satz 2 möchten wir die modificirte Fassung vorschlagen: „..., so gehört die Ableitung von $F(x)$ zu einem Exponenten $\geqq r - 1$, und zwar ist dieser Exponent nur dann $> r - 1$, wenn u. s. w.“*

Umgekehrt wird nun gezeigt, dass, wenn die Coefficienten die vorher gefundenen Bedingungen erfüllen, ein sich bestimmt verhaltendes Fundamentalsystem existirt. Eine wichtige Rolle spielt dabei die determinirende Gleichung, die für die linearen Differentialgleichungen dasselbe leistet, wie das Newton-Puiseux'sche Polygon für die algebraischen Gleichungen zwischen zwei Variablen, indem sie die Anfangsexponenten der Reihen, bezw. den Exponenten, „zu dem ein mit Logarithmen behaftetes Integral gehört“, bestimmt. Dass das Handbuch für diese Gleichung wieder den doch gar zu lang hindonnernden Namen „determinirende Fundamentalgleichung“ beibehält, bedauern wir um so mehr, als die hierfür theils S. 158, 159, theils S. 162 angegebene ausdrückliche Motivirung thatsächlich nur das Attribut „determinirend“ rechtfertigt. Eine Pietätsverletzung aber gegen den Entdecker dieser Gleichung (dessen Verdienste wahrlich über derartige Aeusserlichkeiten erhaben sind) kann unseres Erachtens in einer solchen liebevollen Abkürzung des ihr von ihm gegebenen Namens gewiss nicht erblickt werden!

Was die Methode selbst betrifft, nach der die jetzt in Rede stehende Umkehrung zu beweisen ist, wobei es namentlich auf die Gewinnung der mit Logarithmen behafteten Integrale ankommt, so stehen dafür mehrere verschiedene Wege offen, von denen jeder seine besonderen Vorzüge hat.

* S. 140 Zeile 12 von unten lies „keine negativen“ statt „nur positive“; S. 141 Zeile 7 von unten statt „kann ... eintreten“ lies „tritt ... ein“.

Die Frobenius'sche Methode, welche durch Differentiation des Integrals in Reihenform nach dem zunächst unbestimmt bleibenden Anfangsexponenten die logarithmischen Integrale erzeugt, zeichnet sich jedenfalls durch ausserordentliche Eleganz der Ableitung aus. Sie giebt Beziehungen zwischen den einzelnen Reihen in demselben Integral, die vorher nicht bekannt waren, und wir würden eine Darstellung, die heutigen Tages jene Beziehungen ausser Acht liesse, für unvollständig erachten. Sie bedarf aber eines Convergenzbeweises, der complicirter ist als derjenige der Fuchs'schen Methode, die sich der Reduction der Differentialgleichung durch das Integral in Reihenform und wiederholter Integration bedient, dafür aber an sich jene Beziehungen noch nicht giebt. Benutzt man aber die durch die Fuchs'sche Methode (oder durch die Fundamentalgleichung) gegebene Kenntniss der Form der Integrale und leitet die einzelnen Integrale durch formale Integration in Bezug auf den Logarithmus aus dem logarithmenfreien Integral ab, so liefern die Recursionsformeln der gewissermassen als „Integrationsconstanten" neu auftretenden Reihen die Frobenius'schen Beziehungen und zugleich die Vertheilung der willkürlich bleibenden Constanten auf die einzelnen Reihen. Da jeder dieser Wege also seine eigenartigen, sich etwa ausgleichenden Vorzüge besitzt, ist es augenscheinlich Geschmacksache, welchen man einschlagen will: Der Verfasser des Handbuches hat sich für die Frobenius'sche Methode entschieden. Sobald dann hiermit der Beweis geliefert ist, dass die Form (D) der Coefficienten nothwendig und hinreichend für das bestimmte Verhalten der Integrale ist (S. 177), wünschten wir auch die Bezeichnung „Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung" eingeführt zu sehen, die erst S. 272 bedeutend nachhinkt.

Um die Gruppen des gewonnenen Fundamentalsystems in Untergruppen zu sondern,* wird die Frage untersucht, zu welchen Wurzeln der determinirenden Gleichung ein logarithmenfreies Integral gehört. Die Entscheidung, ob dies bei einer bestimmten Wurzel der Fall ist oder nicht, wird in eigenartiger Weise auf die Untersuchung zurückgeführt, ob der Rang zweier gewisser linearer Gleichungssysteme derselbe ist oder nicht. Die explicite Form dieses Kriteriums liefert (vergl. die in der Berichtigungstabelle als erforderlich bezeichneten Correcturen) nicht mehr die allgemeine Lösung der Frage, sondern eine solche nur für einen Specialfall. Dieser letztere umfasst den noch besonders erwähnten Fall, dass die ganze Integralgruppe logarithmenfrei ist; nebenbei bemerkt trifft die Behauptung (S. 196), dass die für das Eintreten dieses Falles angegebenen Bedingungen mit den von Fuchs (Crelle 68) gegebenen übereinstimmen, nur für einen Theil derselben zu.

* S. 181 Zeile 8 von unten der Ausdruck „die kennen gelehrte Eintheilung" und ebenso später S. 427 Zeile 1 „kennen gelernte" ist unmöglich.

Bilden alle n-Integrale eine einzige logarithmenfreie Gruppe, so nennt der Verfasser mit Poincaré diesen Punkt einen „scheinbar singulären Punkt"; sind insbesondere noch alle n-Anfangsexponenten ganzzahlig und keiner negativ, so wird der Punkt mit Weierstrass als „ausserwesentlich singulär" bezeichnet.* Wir können auch hier unsern Widerspruch gegen diese Terminologie nicht zurückhalten. Die ersteren Punkte sind thatsächlich nicht scheinbar, sondern wirklich singuläre Punkte der Coefficienten sowohl, wie der Integrale; der Name „ausserwesentlich singulär" aber hat sich zu sehr in dem von Weierstrass später bei den eindeutigen Functionen eingeführten Sinn eingebürgert, als dass er hier in so ganz anderer Bedeutung wieder verwandt werden sollte. Gerade auf die letzteren Punkte passt nun ausgezeichnet der Name „scheinbar singulär", da bei ihnen zwar die Coefficienten, aber nicht, wie es dann sonst im Allgemeinen der Fall ist, auch die Integrale singulär sind. Auf die ersteren aber passt der Name „ausserwesentlich singulär" (oder allenfalls „aufhebbar singulär"), da man die Singularität der Integrale bei diesen Punkten durch Multiplication mit einer endlichen bestimmten Potenz beseitigen kann. Wir plaidiren daher aufs Entschiedendste geradezu für eine Vertauschung der beiden Bezeichnungen und sind der Ansicht, dass das Handbuch sich diese klärende That getrost hätte gestatten dürfen und sollen.

Ein besonderes Verdienst erwirbt sich der Verfasser durch das wiederholte ausdrückliche Eingehen auf das Verhalten der Integrale in der Umgebung eines algebraischen Windungspunktes der Coefficienten, so auch am Schlusse des gegenwärtigen Abschnittes.** Lediglich vom pädagogischen Standpunkte aus ist es vielleicht zu bemängeln, dass solche Punkte hier gemeinsam mit $x = \infty$, wenn dies Stelle der Bestimmtheit ist, abgemacht werden; die Beziehung zwischen beiden Fällen ist nämlich insofern ziemlich äusserlich, als nur beide Male $x = \xi^\lambda$ gesetzt wird und dann für $\lambda > 0$ der eine, für $\lambda < 0$ der andere Fall eintritt. Die Wichtigkeit der Stelle $x = \infty$ und des Verhaltens der Integrale daselbst ist auf diese Weise ein wenig verhüllt.

V. Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

Die Differentialgleichungen, deren Integrale in der ganzen Ebene bestimmt sind, spielen historisch und für zahlreiche Theile der Theorie eine ausgezeichnete Rolle. Sie wurden von Fuchs schon bei Begründung seiner

* S. 202 Zeile 3 von unten ist hinter „beginnen" hinzuzufügen: „worauf dann bei allen frühestens gleich das Glied mit x^n folgt", da sonst das unmittelbar Folgende nicht ganz correct ist.

** S. 206 Zeile 7, 8 des Textes sind die Worte „und dass ... verhalten" zu streichen, da dies bereits in dem Begriff „Normalform" enthalten ist. — S. 207 Gleichung 3) fehlt „$= 0$".

Theorie hervorgehoben und führen daher mit Recht seinen Namen. — In vorzüglicher Weise wird die Frage der Convergenz von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise im Anschluss an Thomé ententwickelt* und auf die Integrale der jetzt in Rede stehenden Klasse von Differentialgleichungen angewandt. — Die Herstellung einer Differentialgleichung dieser Klasse mit vorgeschriebenen singulären Stellen und Wurzeln der zugehörigen determinirenden Gleichungen führt zur Besprechung der Differentialgleichungen mit einem singulären Punkt — von da durch Transformation zu den Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten —, zu den Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchs'schen Klasse und speciell zu einer solchen mit zwei endlichen singulären Stellen, der Riemann'schen und Gauss'schen Differentialgleichung, deren Theorie hier theils als Anwendung des Vorangehenden, theils als Vorbereitung für Späteres dient.

VI. Die Entwickelungen der Integrale innerhalb eines Kreisringes.

Während die beiden vorangehenden Abschnitte sich nur mit Stellen der Bestimmtheit befassten und in der Umgebung einer solchen für die Integrale die Entwickelungen selbst wirklich geben konnten, steht nach dem III. Abschnitt in der Umgebung einer Stelle der Unbestimmtheit oder überhaupt in einem Kreisring, in welchem die Coefficienten nach Laurent-schen Reihen entwickelbar sind, bisher lediglich die Form der Entwickelung der Integrale fest:

$$y = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} g_\nu(\varrho)\, x^{\varrho+\nu}.$$

Hier greift nun die auf den Begriff der unendlichen Determinanten begründete Theorie von H. von Koch ein.** Die Recursionsformel der Differentialgleichung kann so transformirt werden, dass die aus ihren Coefficienten gebildete unendliche Determinante $D(\varrho)$ convergirt und die „Normalform“ hat. Sie ist eine ganze transcendente Function von ϱ mit der Eigenschaft:

$$D(\varrho+1) = (-1)^n D(\varrho).$$

Der Gleichung $D(\varrho) = 0$ genügen folglich sämmtliche Exponenten eines in Reihenform darstellbaren Integrals. Sie ver-

* S. 230 Zeile 14 lies „Ra“ statt „R“. — Zeile 10 von unten lies einfacher „$x = R' e^{\Theta i}$“.

** S. 278 Zeile 12. Statt „unbedingt“ wäre correcter „absolut“, weil darauf folgt „d. h. die Reihe der absoluten Beträge convergirt ebenfalls“; aus der absoluten folgt dann erst die unbedingte Convergenz. — S. 288 Zeile 10 lies „fehlt“ statt „verschwindet“.

tritt also die Stelle der determinirenden Gleichung bei Stellen der Unbestimmtheit, folglich zugleich auch die der Fundamentalgleichung, von deren linker Seite sich $D(\varrho)$ in der That nach der Substitution $\omega = e^{2\pi i\varrho}$ nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Die Coefficienten g_ν der Integralreihen, sowie die Integralgruppen und Untergruppen, Sätze über die Fundamentalgleichungen componirter und adjungirter Differentialgleichungen fliessen aus der Koch'schen Theorie.

Ihr folgt die Hamburger'sche Methode zur wirklichen Darstellung der Integrale in einem Kreisring, womit dann stets die Berechnung der Coefficienten der zugehörigen Fundamentalgleichung aufs Engste zusammenhängt.

Ein Kreisring ist auch das Giltigkeitsgebiet eines Fundamentalsystems, von dessen Elementen sich nur ein Theil bestimmt verhält; daher finden die Stellen, bei denen der charakteristische Index (nach Thomé) > 0 ist, hier ihre Besprechung. Dass die Koch'sche Theorie auch dabei sich bewährt, wird sehr interessanter Weise kurz gezeigt. Die über diesen Gegenstand handelnde Arbeit von Koch's (Acta math. 18) kann übrigens dem Verfasser noch nicht vorgelegen haben.

Ein Kreisring ist ferner die Umgebung von $x = \infty$, wenn dies ein Punkt der Unbestimmtheit ist. Die Integrale sind also in diesem Fall darstellbar mittelst Reihen, die nach Absonderung einer Potenz von x als Factor unendlich viele positive Potenzen von x enthalten. Es werden nun die Fälle herausgehoben, wo diese unendlich vielen positiven Potenzen von einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine ganze rationale Function von x ist („fundamentaler determinirender Factor" nach Thomé), aufgesaugt sind, während der andere Factor der Reihe keine positiven Potenzen von x mehr enthält. Ein solches Integral heisst nach Thomé „Normalintegral". Die Differentialgleichung mit constanten Coefficienten stellt also den allereinfachsten Fall einer Differentialgleichung mit solchen Integralen dar. Wie bei ihr spielt auch in dem allgemeinen Fall eine „charakteristische Gleichung" eine wesentliche Rolle und wie bei ihr der Umstand, ob alle Wurzeln dieser Gleichung verschieden sind oder nicht. In letzterem Falle können auch die von Poincaré als „anormale" bezeichneten Reihen auftreten.

Bei den Entwickelungen über die Normalintegrale sind — worauf der Verfasser selbst den Referenten aufmerksam machte — in den Nr. 95, 96 einige ergänzende Bemerkungen* erforderlich. Der Schluss auf S. 341, dass $\lim\limits_{x=\infty} \frac{v}{x^k}$ ein bestimmter endlicher Werth sei, beruht auf der Annahme der Convergenz der für w angesetzten Reihe, das heisst auf der Annahme der

---

* S. 340 in Formel 10) lies „vD_r" statt „rD_r", — in Gleichung 4) „x^{2k}" statt „x^2".

Existenz eines Normalintegrales der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$). In der That sind die durch 14) [S. 342] bestimmten Grössen z_λ, falls sie die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) wirklich befriedigen, Normalintegrale. Im Allgemeinen dagegen genügen die z_λ der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) nicht und spielen für ($\mathfrak{A}$) ebensowohl wie für die Differentialgleichung (A) nur die Rolle von fundamentalen determinirenden Factoren. In diesem Falle ist dann auch v_λ keine wirkliche Lösung von 11), so dass also im Allgemeinen in Gleichung 15) [desgleichen in der Gleichung S. 344 oben] gewisse fortgelassene Glieder wieder hinzugefügt werden müssen, die eben nur dann verschwinden, wenn v_λ die Gleichung 11), das heisst z_λ die Gleichung ($\mathfrak{A}$) erfüllt. Das Gleiche gilt von dem Schluss S. 346, dass $\lim\limits_{x=\infty} \frac{Y}{x^k}$ ein endlicher bestimmter Werth sei, woraus folgen würde, dass x ein Normalintegral ist. Demgemäss ist endlich der Satz S. 347 dahin einzuschränken: „Ein Normalintegral hat die Eigenschaft, nicht in jeder Nähe von $x=\infty$ zu verschwinden, und umgekehrt, wenn ein bei $x=\infty$ in Reihenform darstellbares Integral diese Eigenschaft hat und überdies seine logarithmische Ableitung für $x=\infty$ von endlicher Ordnung unendlich wird, so ist es ein Normalintegral."

VII. Allgemein giltige Darstellungen der Integrale von Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Da alle bisher gegebenen Darstellungen der Integrale im Allgemeinen immer nur ein beschränktes Giltigkeitsgebiet besitzen, die Kreisfortsetzung aber praktisch so gut wie unausführbar ist, erhebt sich nun die Aufgabe, auf andere Art den Werth eines durch seine Anfangswerthe für irgend eine reguläre Stelle definirten Integrals an irgend einer anderen regulären Stelle zu berechnen, falls der Weg gegeben ist, auf dem x von jener nach dieser Stelle gelangt. Am einfachsten wird diese Aufgabe gelöst, wenn ein analytischer Ausdruck der Integrale sich finden lässt, der für die ganze x-Ebene gilt, abgesehen höchstens von den singulären Punkten selbst, gerade wie z. B. die Darstellung der elliptischen Functionen durch den Quotienten zweier Θ-Functionen. Dies gelingt in der That mittelst einer Methode von Fuchs, welche die Integrale in Reihen entwickelt, deren Glieder durch iterirte Integration rationaler Ausdrücke entstehen. Dadurch besteht auch die Möglichkeit, die zu irgend einem Umlauf gehörige Fundamentalgleichung wirklich aufzustellen (Günther) und einen Einblick in die Abhängigkeit der Integrale von den in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen Parametern zu gewinnen.

Im Mittelpunkt der folgenden, wesentlich von Poincaré stammenden Untersuchungen steht die sogenannte „Laplace'sche Transformirte" (Differentialgleichung) einer vorgelegten Differentialgleichung. Sie gehört insofern hierher, als die Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung dar-

stellbar sind durch bestimmte Integrale auf gewissem Weg erstreckt über die Lösungen ihrer Laplace'schen Transformirten. Sie giebt auch Kriterien für die Convergenz der Normalreihen und führt zu „asymptotischen“ Darstellungen der Integrale durch divergente Reihen, ähnlich wie dies bei der Stirling'schen Reihe der Fall ist. — Einige der Entwickelungen, die zur Einführung der Laplace'schen Transformirten dienen (Nr. 108, 109 und zum Theil 112), würden wir ihres Charakters wegen lieber an früheren Stellen des Buches eingeordnet sehen.

VIII. Berechnung der Fundamentalsubstitutionen für Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Zur Lösung der zu Beginn des vorigen Abschnittes gestellten Aufgabe werden noch andere Hilfsmittel gelehrt, welche nur die Entwickelung der Integrale in der Umgebung der einzelnen Stellen, bezw. in einem Kreisring voraussetzen. Dahin gehört zunächst der Ausdruck zweier Fundamentalsysteme (die in der Umgebung von regulären Stellen giltig sind) durcheinander, eine Aufgabe, die durch Abbildung auf den Fall zurückgeführt wird, dass beide Convergenzkreise in einander greifen.* Des Weiteren bedarf es sodann noch der Kenntniss der „Fundamentalsubstitutionen“, das heisst derjenigen Substitutionen, welche irgend ein bestimmtes Fundamentalsystem bei einfachen Umläufen um die einzelnen („wesentlich“ oder — wie wir sagen würden — „wirklich“) singulären Punkte erleidet. Ausser den für deren Berechnung bereits gelehrten Methoden wird noch die im Allgemeinen mehrdeutige Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen durch eine hinreichende Zahl von „Fundamentalinvarianten“ gegeben. Dies sind die Coefficienten der Fundamentalgleichungen. Sie hängen lediglich von den Parametern der Coefficienten der Differentialgleichung, nicht wie die Fundamentalsubstitutionen auch noch von den Anfangswerthen des zu Grunde gelegten Fundamentalsystems ab. Da bei einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse die zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalgleichungen, also auch die aus ihnen entspringenden Fundamentalinvarianten leicht zu bilden sind, ihre Zahl aber (im Allgemeinen) zur Bestimmung der Fundamentalsubstitutionen noch nicht hinreicht, kommt hier noch die Berechnung einer Anzahl sogenannter „Uebergangssubstitutionen“ in Frage, das heisst der Coefficientensysteme, die ein zu einem singulären Punkt gehöriges Fundamentalsystem durch das zu einem anderen gehörige bei bestimmtem Uebergangsweg ausdrücken. Dies geschieht zum Theil mit Hilfe einer Abbildung, die sich des sogenannten Fuchs'schen „Grenzkreises“ bedient. Endlich wird die Aufstellung der Fundamentalinvarianten und Fundamental-

* S. 430 Z. 16 ist hinter „Ableitungen“ hinzuzufügen „mit beliebiger Genauigkeit“.

substitutionen bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die der Uebergangssubstitutionen speciell bei der Gauss'schen Differentialgleichung durchgeführt.

Durch die vorstehende kurze Skizzirung hoffen wir eine angenäherte Vorstellung von dem reichen Inhalt des Werkes gegeben zu haben. Die Uebersicht über diesen Inhalt wird erleichtert durch die Eintheilung des Ganzen in fortlaufende, mit Ueberschriften versehene Artikel und das aus jenen zusammengesetzte Inhaltsverzeichniss. Dasselbe giebt gleichzeitig in ausserordentlich sorgfältiger und eingehender Weise die einschlägige Literatur bei jedem einzelnen Artikel.* Diese recht zweckmässige Einrichtung ist aber noch einer erheblichen Verbesserung fähig, die ebensowohl im Interesse des Autors als in dem des Lesers läge. Es ist mitunter — falls man das nicht zufällig anders woher weiss — gänzlich unmöglich zu erkennen, auf welchen Theil des Inhaltes eines Artikels sich die einzelnen Literaturangaben beziehen. Wir möchten deshalb dem Verfasser nahe legen, womöglich schon im zweiten Band seines Werkes, die Stellen im Text, an welche eine Literaturangabe anschliesst, mit kleinen Ziffern zu versehen, die dann im Literaturverzeichniss an entsprechender Stelle wiederkehren. Wo dies bei der älteren Literatur Schwierigkeiten machen sollte, weil sie sich nicht auf einen einzelnen angebbaren Punkt bezieht, könnte diese ja im Anschluss an die Ueberschrift des Artikels gemeinsam citirt werden. Es würde auf diese Weise auch noch deutlicher hervortreten, was als des Verfassers geistiges Eigenthum zu betrachten ist.

Endlich muss noch bemerkt werden, dass das Buch für jeden, der über eine gewisse Gewandtheit in der Functionentheorie verfügt, fast überall ohne Schwierigkeit zu lesen ist. Alle nur einigermassen nicht alltäglichen, ausserhalb liegenden Hilfsmittel werden in sehr ansprechender Form vor ihrer Verwendung mitgetheilt. Ja, mitunter hat der Verfasser eine allzu geringe Meinung vom Leser: die Bemerkung unter den Berichtigungen zu Seite 143—145 stellt geradezu eine Injurie für denselben dar!

Für den vorgeschrittenen Leser wird das Buch eine Quelle reichster Anregung bilden.

Auf Grund aller dieser Vorzüge dürfen wir dem Erscheinen des zweiten Bandes, der nach der hier entwickelten allgemeinen Theorie im Wesentlichen lineare Differentialgleichungen unter speciellen Voraussetzungen, sei es über die Coefficienten, sei es über die Integrale, behandeln soll, mit freudigster Spannung entgegenblicken, inzwischen aber das Studium des vorliegenden ersten Bandes auf das Eindringlichste empfehlen!

* Bei den Citaten zu Nr. 42 ist noch hinzuzufügen: „Koehler, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 33. Bd. S. 231 flg."

Lothar Heffter.



Lehrbuch der Algebra. Von Heinrich Weber, Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. In zwei Bänden. Erster Band. Braunschweig 1895. Vieweg. XV und 653 S.

In der neueren algebraischen Lehrbuchliteratur hat die Theorie der algebraischen Gleichungen nicht gleichen Schritt gehalten mit anderen Theilen, wie der Theorie der Determinanten, der linearen Substitutionen etc. Die Entstehungszeit der Bücher, auf welche man für die Theorie der algebraischen Gleichungen bis vor Kurzem der Hauptsache nach angewiesen war, vor allem der Werke von Serret, C. Jordan u. A., liegt gegenwärtig schon ein wenig zurück. Die Gleichungstheorie ist inzwischen nicht nur in vielen Einzelheiten weiter ausgereift, sondern es haben auch principielle Auffassungen durch Hereinnahme neuer Gesichtspunkte ein stark verändertes Aussehen gewonnen. Zwar giebt natürlich die Theorie der Permutationsgruppen, welche zumal auch schon in dem Jordan'schen Werke mit grosser Ausführlichkeit behandelt ist, die wesentlichste Grundlage der Gleichungstheorie ab. Aber daneben haben die arithmetischen Schöpfungen Dedekind's und Kronecker's auch in der Algebra mehr und mehr Boden gewonnen und müssen in einer erschöpfenden Darstellung vom gegenwärtigen Stande der Theorie der Gleichungen entsprechend zur Wirkung kommen.

In diesem Sinne ist es freudig zu begrüssen, dass Herr H. Weber, der nicht nur einer der ersten Kenner der modernen Arithmetik und Algebra ist, sondern auch als selbständiger Forscher an der Fortentwickelung dieser Disciplinen den lebhaftesten Antheil genommen hat, eine moderne Darstellung der Theorie der Gleichungen zu liefern unternommen hat. Das auf zwei Bände geplante Werk soll möglichst von den Elementen ab und, ohne eingehende Einzelkenntnisse nach irgend einer Richtung vorauszusetzen, zu dem jetzt erreichten Stande der Entwickelung hinführen. Der vor Kurzem erschienene erste Band enthält folgende Theile des gesammten Stoffes:

In einer Einleitung bespricht Weber zunächst den Zahlbegriff und speciell den Begriff der irrationalen Zahlen in der von Herrn Dedekind begründeten Auffassungsweise, wie sie von letzterem in der bekannten Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" dargestellt ist. Die Einleitung hat den Sinn, das Fundament der späteren Entwickelungen in abstracter, begrifflicher Weise zu legen. Doch wird auf die Möglichkeit geometrischer Interpretationen schon hier hingewiesen und solche werden auch in der Folge des öfteren verwendet.

Die Eintheilung ist nun so getroffen, dass der ganze erste Band in drei Bücher zerfällt, welche „Die Grundlagen", „Die Wurzeln" und „Die algebraischen Grössen" überschrieben sind. Jedes Buch zerfällt seinerseits wieder in sechs Abschnitte.

Die ersten Abschnitte enthalten wesentlich einleitende Betrachtungen. Es gilt zuvörderst eine einfache Theorie der ganzen rationalen Functionen zu entwerfen. Die Coefficienten sind dabei für gewöhnlich unbestimmte

Grössen, werden jedoch vielfach als rationale oder ganze Zahlen angenommen. So z. B. wird gleich anfangs der bekannte Satz von Gauss über Multiplication sogenannter primitiver Functionen abgeleitet. Um für minder vorgerückte Leser das Heranziehen sonstiger Lehrbücher möglichst zu ersparen, hat Herr Weber in einem besonderen Abschnitte diejenigen Sätze aus der Determinantentheorie zusammengefasst, welche später zur Verwendung kommen sollen.

Der dritte Abschnitt ist dem Fundamentalsatz über Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen gewidmet. Nach einigen einführenden Paragraphen wird vorab von Gleichungen ungeraden Grades mit reellen Coefficienten, sowie von reinen Gleichungen gehandelt; und im Anschluss daran wird die Lösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen dazwischen gefügt. Sodann wird der Fundamentalsatz in voller Allgemeinheit durch die bekannte Deduction bewiesen, welche sich im Wesentlichen auf die Stetigkeit der ganzen Functionen und auf die Existenz einer unteren Grenze bei einem System reeller Zahlen stützt, die alle grösser als eine angebbare Zahl sind. Hier vor allem bewähren sich die Entwickelungen der Einleitung zum Zwecke einer völlig scharfen Beweisführung. Ein zweiter, in der Hauptsache von Lipschitz herrührender Beweis des Fundamentalsatzes, sowie der Beweis der stetigen Abhängigkeit der Wurzeln von den Coefficienten beschliessen den Abschnitt.

Die drei folgenden Abschnitte gipfeln in der Darstellung von Hermite's Behandlung der Tschirnhausen-Transformation. Es sind freilich, zumal da Hermite's Theorie auf invarianten-theoretischen Principien beruht, vorab erst noch mehrfache Vorbereitungen zu treffen, die auch ohnehin nicht fehlen dürfen. Einmal nämlich werden die Principien der Theorie der symmetrischen Functionen, sowie das Eliminationstheorem von Bezout entwickelt. Sodann gilt es vor allen Dingen, Anschluss an die lineare Invariantentheorie zu gewinnen. Die Entwickelung zeigt hierbei insofern einen arithmetischen Charakter, als zumeist auch auf Rationalität bez. Ganzzahligkeit der Coefficienten Nachdruck gelegt wird. Den Auffassungen der Invariantentheorie gemäss tritt nun an Stelle der Gleichung $f(x) = 0$ bez. der Function $f(x)$ die Form f; und es ist dann der im Mittelpunkt von Hermite's Behandlung der Tschirnhausen-Transformation stehende Satz, dass die Coefficienten der transformirten Form Simultan-Invarianten der ursprünglichen Form n^{ten} Grades und einer gewissen Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades T sind. Dieser Hermite'sche Satz erweist sich für die Tschirnhausen-Transformation der cubischen und biquadratischen Gleichungen bereits als ausreichend. Für den allgemeinen Fall ist die Untersuchung formal erst noch weiter zu entwickeln, wobei die von Sylvester als Bezoutiante bezeichnete Covariante zur Verwendung kommt. Die Theorie wird am Beispiel der Gleichungen fünften Grades vollständig durchgeführt; dabei wird die Gleichung fünften Grades sogleich als Hauptgleichung (nach

Klein) angenommen, und letztere wird durch eine Transformation, die als einzige Irrationalität die Quadratwurzel aus der Discriminante besitzt, auf eine Normalform mit nur einem Parameter übergeführt.

Im folgenden Buche „Die Wurzeln“ stehen die Gleichungen mit reellen Coefficienten voran. Es wird zuvörderst eine Realitätsdiscussion der Wurzeln durchgeführt, wobei für den allgemeinen Fall eine erneute Anwendung der Bezoutiante stattfindet. Speciell im Falle der biquadratischen Gleichungen wird eine interessante geometrische Betrachtung gegeben auf Grundlage der hier eintretenden Discriminantenfläche, auf welche zuerst Kronecker hinwies.

Besonders inhaltreich ist der den Sturm'schen Functionenketten gewidmete Abschnitt, vermöge deren das Problem behandelt wird, die Anzahl der Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen anzugeben. Der allgemeinen Theorie werden zwei specielle Beispiele Sturm'scher Ketten vorausgesandt; einmal sind es die Kugelfunctionen erster Art, welche hierher gehören, sodann eine Kette, welche in der Theorie der säcularen Störungen der Planeten eine Rolle spielt. Für die allgemeine Behandlung des Sturm'schen Problems sind wieder die Schöpfungen Hermite's leitend gewesen. Es ist aber besonders dankenswerth, dass Herr Weber an dieser Stelle die Kronecker'sche Charakteristikentheorie wenigstens in einem einfachen Falle durchführt und auf das Problem der Einschliessung der complexen Wurzeln, sowie auf den ersten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes anwendet. Die Charakteristikentheorie verfolgt für Gleichungssysteme mit beliebig vielen Variabeln dasselbe Ziel, wie der Sturm'sche Satz für Gleichungen mit einer Unbekannten. Die Durchführung bezieht sich auf den Fall zweier Veränderlichen und damit auf den Schnitt ebener Curven.

Die folgenden Abschnitte sind den bekannten älteren Theoremen von Budan-Fourier, Newton, Descartes u. s. w., sowie den Regeln zur angenäherten Berechnung der Wurzeln gewidmet. Erwähnt sei eine von Klein herrührende geometrische Abzählung der reellen Wurzeln, welche zu einer Vergleichung der erstgenannten Theoreme benutzt wird.

Einen wesentlich neuen Charakter gewinnt die Darstellung durch Heranziehung der Kettenbrüche zur angenäherten Berechnung der Wurzeln. Herr Weber ergreift hier die Gelegenheit, um etwas principieller auf die Theorie der Kettenbrüche einzugehen. Dieselbe wird in der That ausgestaltet zu einer Theorie der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinanten ± 1, an welche sich in verkappter Form eine Theorie der Aequivalenz und Reduction der ganzzahligen binären quadratischen Formen schliesst. Doch wird dabei zumeist nicht explicit von den Formen gesprochen, sondern nur von äquivalenten Zahlen, welch letztere als Wurzeln der den Formen entsprechenden Gleichungen anzusehen sind. Eine über das Formale hinausgehende Umgestaltung gewinnt hierdurch die Theorie der Aequivalenz und Reduction nicht. Die Anwendung der Theorie der Kettenbrüche zur

numerischen Auflösung der Gleichungen wird in den beiden letzten Paragraphen des elften Abschnitts behandelt.

Auch im letzten Abschnitt des zweiten Buches, „Theorie der Einheitswurzeln“ überschrieben, bleibt zumeist der arithmetische Charakter der Darstellung erhalten. Es kommen hier nur erst einige einführende Definitionen, sowie die Irreducibilität und die Discriminante der Kreistheilungsgleichung zur Behandlung. Gegen Ende des Abschnitts folgen Entwickelungen über Multiplication der Kreisfunctionen. Zwischendurch sind zahlentheoretische Entwickelungen eingeschaltet (über Lösung von Congruenzen höheren Grades, Potenzreste, primitive Wurzeln, Indices, quadratische Reste und dergl.), welche nur mittelbar mit der Ueberschrift des Abschnittes zusammenhängen, die aber doch später gebraucht werden und an anderer Stelle nicht gut untergebracht werden konnten.

Im dritten Buche „Die algebraischen Grössen“ liefert Herr Weber auf Grundlage der Dedekind'schen Körpertheorie, sowie der Theorie der Permutationsgruppen, eine interessante Darstellung der Galois'schen Gleichungstheorie; und hier ist es eben, wo durch die Hereinnahme der Körpertheorie ein neues und wichtiges Fundament gegenüber den früheren Darstellungen gewonnen wird.

Ein erster Abschnitt des dritten Buches trägt die Ueberschrift „Die Galois'sche Theorie“. Jedoch handelt es sich hier noch keineswegs um endgiltigen theoretischen Einblick in den Auflösungsprocess einer Gleichung, den man als den Haupterfolg der von Galois ergriffenen gruppentheoretischen Wendung und demnach als den Hauptinhalt der Galois-schen Theorie anzusehen pflegt. Es erfordert dieser Gegenstand vielmehr erst mannigfache Vorbereitungen. Demgegenüber gilt es hier zunächst, den Körperbegriff in Allgemeinheit, sowie sodann in seinem engeren für die Algebra in Betracht kommenden Umfange zu discutiren. Dabei rückt dann vor allem der Begriff des Normalkörpers in den Mittelpunkt der Betrachtung. Die Gewinnung der Galois'schen Resolvente einer Gleichung gestaltet sich nun einfach und durchsichtig. In den früheren Darstellungen, welche zumeist unmittelbar an die Theorie der Permutationsgruppen anknüpfen, ist die Aufstellung der Galois'schen Resolvente bei allen solchen Gleichungen, die einen Affect haben, umständlicher, da die Prämissen betreffs des Rationalitätsbereiches weniger in den Vordergrund gerückt erscheinen als hier. Der Anschluss an die Gruppentheorie wird im zweiten Theile des in Rede stehenden Abschnitts genommen. Für weitergehendes Studium der Körpertheorie ist übrigens Dedekind's eigene, durch Schärfe und Allgemeinheit gleichermassen bewunderungswürdige Darstellung in der vierten Auflage von „Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie“ S. 452 flg. zu empfehlen.

Im folgenden (vierzehnten) Abschnitt wird nunmehr auf Grundlage einer allgemeinen Theorie der Permutationsgruppen die Galois'sche Auf-

fassung vom Auflösungsprocess der Gleichungen entwickelt. Die hier befürwortete Bezeichnungsweise ist einheitlich und zweckmässig gewählt, weicht übrigens von der sonst üblichen Terminologie in einigen Punkten ab: statt Ordnung einer Gruppe wird Grad gesagt, die Untergruppen heissen Theiler, gleichberechtigte und ausgezeichnete Untergruppen werden conjugirte Theiler und Normaltheiler. Der ganze Abschnitt gipfelt natürlich in dem grossen Theorem über Reduction der Galois'schen Gruppe durch Adjunction natürlicher Irrationalitäten und damit über die Auflösung der Gleichung durch Lösung einer Kette zugehöriger Resolventen.

Die cubischen und biquadratischen Gleichungen ordnen sich nun leicht ein. Darüber hinaus werden die Abel'schen Gleichungen, das heisst die irreducibeln Gleichungen mit commutativer Gruppe behandelt. Sie werden in bekannter Weise auf cyklische Gleichungen reducirt, während die Lösung der letzteren durch die Resolventen von Lagrange auf die Auflösung reiner Gleichungen zurückgeführt wird.

Nun folgt die Besprechung des classischen Beispiels der Kreistheilungsgleichungen. Bei Gelegenheit der $\frac{1}{3}(n-1)$- und $\frac{1}{4}(n-1)$-gliedrigen Perioden fügt Herr Weber Excurse über die Körper ganzer complexer Zahlen der Gestalten $a+b\varrho$ und $a+bi$ an.

Im siebzehnten Abschnitt wird das Hauptproblem der überkommenen Algebra, die Frage nach der Auflösbarkeit der Gleichungen durch Wurzelzeichen behandelt. Die allgemeine Galois'sche Theorie, sowie die vorangegangene Behandlung der Abel'schen Gleichungen, geben die Lösung des Problems in der bekannten Gestalt durch Eigenschaften der Galois'schen Gruppe der Gleichung. Herr Weber schlägt bei dieser Gelegenheit für die durch Wurzelziehungen lösbaren Gleichungen in Erweiterung einer Kronecker'schen Benennung den Namen der metacyklischen Gleichungen vor. Aus der Einfachheit der alternirenden Gruppe für $n > 4$ folgt sodann Abel's bekannter Satz über Nichtauflösbarkeit der „allgemeinen“ Gleichungen vom fünften und höheren Grade. Doch verdient sehr bemerkt zu werden, dass die Allgemeinheit der Coefficienten hier näher erörtert wird, indem nämlich der sehr interessante Satz bewiesen wird, dass es bei jedem Primzahlgrade unendlich viele affectlose Gleichungen mit rationalen Coefficienten giebt. Eine weitere Durchbildung findet die Theorie der metacyklischen Gleichungen vom Primzahlgrad n, worauf sich Galois' eigene Untersuchungen beziehen. Die Substitutionen der Galois'schen Gruppe kann man dadurch bewerkstelligen, dass man auf die unteren Indices z der Wurzeln x_z der Gleichung alle $\operatorname{mod} n$ incongruenten Substitutionen $(z,\ az+b)$ mit ganzzahligen Coefficienten a und b ausübt. Diese besonders zugängliche Gestalt der Gruppe gestattet ohne Schwierigkeit die Durchbildung einer eingehenden Theorie für den Fall eines Primzahlgrades; Specialausführungen werden für $n=5$ gegeben.

Den Beschluss des ersten Bandes bildet die Besprechung des Problems, alle metacyklischen Gleichungen vom Primzahlgrad wirklich aufzustellen. Bekanntlich ist dies Problem von Kronecker in der Weise gelöst, dass er die Gestalt der Wurzeln aller Gleichungen vom Primzahlgrad charakterisirt, welche in einem gegebenen Körper metacyklisch werden. Auf Grundlage der Structur der metacyklischen Gruppe lassen sich die fraglichen Wurzeln ohne besondere Schwierigkeit in einem geschlossenen Ausdrucke angeben. Am Beispiel $n = 5$ werden auch hier wieder die allgemeinen Sätze illustrirt.

Das erneute Eingreifen der Arithmetik an dieser Stelle führt zu weiteren wichtigen Fragestellungen, die jedoch für den zweiten Band vorbehalten bleiben. Die Frage nach Eigenart und Umfang der metacyklischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten, mit Coefficienten aus einem quadratischen Körper u. s. w. treten nun auf. Auch hier sind es wieder die bewunderungswürdigen Schöpfungen Kronecker's, denen wir eine wenigstens theilweise Klärung dieser Probleme danken. Die Behandlung der metacyklischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten nimmt Herr Weber für den zweiten Band bestimmt in Aussicht. Auch über das gleiche Problem in quadratischen Körpern, welches mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen aufs Innigste zusammenhängt, besass Kronecker ein Theorem, analog demjenigen des rationalen Falles, wie aus einem erst neuestens publicirten Briefe Kronecker's an Dedekind hervorgeht. Vielleicht gelangt auch dieser Gegenstand im Verlaufe des zweiten Bandes zur Untersuchung.

R. Fricke.

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von S. Gundelfinger. Herausgegeben von F. Dingeldey. Leipzig 1895. B. G. Teubner. VIII und 434 S. Mit Figuren im Texte.

An Werken über die analytische Geometrie der Kegelschnitte haben wir keinen Mangel, indessen behandeln sie meist nur die elementaren Theile der Kegelschnittlehre. Von nicht elementaren Werken, wie Hesse's sieben Vorlesungen, Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie und Salmon-Fiedler's Kegelschnitte, ist es nur das letztgenannte, welches es sich zur Aufgabe macht, die Theorie der Kegelschnitte ausschliesslich und umfassend zu behandeln. Bei einem Vergleiche des zu besprechenden Buches, welches die Elemente der analytischen Geometrie übrigens als bekannt voraussetzt, mit der vorhandenen Literatur, kommen von den angeführten Werken nur die beiden letztgenannten in Betracht. Der hervorstechendste Unterschied zwischen ihnen und den Gundelfinger'schen Vorlesungen besteht nun darin, dass bei Herrn Gundelfinger sämmtliche Probleme, projective sowohl als metrische, unter Zugrundelegung von Dreiecks-Coordinaten (projectiven Coordinaten), also mit Benutzung der allgemeinsten linearen Coordinaten behandelt werden, während bei metrischen

Problemen von Clebsch-Lindemann ausschliesslich Parallel-Coordinaten, von Salmon-Fiedler bald Parallel-Coordinaten, bald specielle Dreiecks-Coordinaten benutzt werden. Ausserdem wird von Herrn Gundelfinger die Rechnung so geführt, dass in jedem Augenblicke die Specialisirung von den allgemeinen Dreiecks-Coordinaten zu besonderen oder zu Parallel-Coordinaten erfolgen kann, was bei Salmon nicht der Fall ist. So einleuchtend nun auch das Vorgehen des Herrn Gundelfinger vom rein theoretischen Standpunkte aus erscheint, so wird man doch sofort die Frage aufwerfen, wie sich nun diese durchgängige Anwendung projectiver Coordinaten praktisch gestalten wird? Wir sind ja gewohnt, bei analytischer Behandlung eines vorgelegten geometrischen Problems das passendste Coordinatensystem zu wählen. So werden wir mitunter auch bei metrischen Problemen mit grossem Vortheile Dreiecks-Coordinaten gebrauchen, da uns hier mehr Anfangsdaten zur Verfügung stehen, oder da die Dreiecks-Coordinaten, wie sich Herr F. Klein gelegentlich sehr zutreffend ausdrückt, grössere Schmiegsamkeit als die Parallel-Coordinaten besitzen. Wie aber ist es, wenn hier bei metrischen Problemen durchweg projective Coordinaten verwandt werden? Werden z. B. nicht schon die Ausdrücke für die Entfernung zweier Punkte, den Winkel zweier Geraden u. s. w. ungewöhnlich complicirt ausfallen? Schon eine flüchtige Durchsicht des Gundelfinger'schen Werkes belehrt uns vom Gegentheile. Herr Gundelfinger hat es verstanden, den analytischen Apparat überall so einzurichten, dass die Entwickelungen einfach und übersichtlich werden, dabei sein bedeutendes formalistisches Talent auf Beste bewährend; derselbe weiss ausserdem den Formeln durchweg eine solche Gestalt zu geben, dass die Beziehung der metrischen Begriffe zu den unendlich fernen Elementen der Ebene, speciell zum imaginären Kreispunktepaar, besonders deutlich hervortreten. Es wird sich Alles dieses noch klarer zeigen, wenn wir nunmehr auf den Inhalt unseres Buches näher eingehen.

Im ersten Abschnitte desselben werden die fundamentalen Eigenschaften des einzelnen Kegelschnittes entwickelt. Die beiden ersten Paragraphen enthalten einleitende Betrachtungen, und zwar werden zunächst (§ 1) in der Ebene Dreiecks-Coordinaten in einer für die Folge besonders geeigneten und daher von der üblichen etwas abweichenden Weise eingeführt; als vortheilhaft erweist es sich hierbei, die Höhen des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Bei der Einführung der Linien-Coordinaten tritt ein Ausdruck $\omega(u_1, u_2, u_3) = \omega(u, u)$ auf, der in der Folge eine grosse Rolle spielen wird; $\omega(u, u)$ ist eine definite quadratische Form mit verschwindender Determinante, und zwar stellt, wie sich später zeigt, $\omega(u, u) = 0$ die Gleichung des imaginären Kreispunktepaares in Linien-Coordinaten vor.

Von speciellen Dreiecks-Coordinaten werden baryoentrische und Parallel-Coordinaten betrachtet.

Ersichtlich handelt es sich in § 1 mehr um rasche Einführung in den Gegenstand, als um strenge Begründung desselben. Ohne dass man von vornherein ein Coordinatensystem, am einfachsten ein rechtwinkliges, zu Grunde legt, wird man über gewisse Schwierigkeiten hinsichtlich der unendlich fernen Elemente nicht hinauskommen; es sei dies besonders in Bezug auf die Specialisirung von allgemeinen Dreiecks-Coordinaten zu Parallel-Coordinaten gesagt. Dieser Uebergang muss analytisch ausgeführt werden, da für uns die unendlich ferne Gerade nur analytisch existirt; so kann z. B. von dem Abstande eines Punktes von der unendlich fernen Geraden nicht ohne Weiteres gesprochen werden, sondern dies kann erst auf Grund der unten für q gegebenen Formel geschehen. Ein näheres Eingehen auf diesen Gegenstand würde indessen hier zu weit führen. Legt man ferner von vornherein ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das im Texte ja doch gelegentlich herangezogen wird, zu Grunde, so gestaltet sich die Transformation der Dreiecks-Coordinaten bedeutend einfacher, als dies in § 3 der Fall ist. Der zweite Paragraph bringt die Ausdrücke für den Abstand q eines Punktes $y = y_1, y_2, y_3$ von einer Geraden $u = u_1, u_2, u_3$ und den Winkel uv zweier Geraden u und v. Um einen Einblick in die Structur der Formeln zu geben, mögen die betreffenden Ausdrücke hierher gesetzt werden; es wird

$$q^2 = \frac{u_y^2}{\omega(u, u) p_y^2}, \quad \cos(uv) = \frac{\omega(u, v)}{\sqrt{\omega(u, u)}\sqrt{\omega(v, v)}},$$

wo

$$2\omega(u, v) = \frac{\partial \omega(u, u)}{\partial u_1} v_1 + \cdots$$

ist, und

$$p_y \equiv p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 = 0$$

die unendlich ferne Gerade vorstellt. Wichtig für die Folge ist hier noch die Einführung des Normalencentrums einer Geraden u, worunter Herr Gundelfinger den gemeinsamen Punkt aller Normalen von u versteht; seine Gleichung ist offenbar $\omega(u, v) = 0$ in Linien-Coordinaten v.

Nach diesen Vorbereitungen treten wir in die Untersuchung des durch eine homogene quadratische Gleichung $f(x, x) = 0$ in Punkt-Coordinaten x_1, x_2, x_3 gegebenen Gebildes ein (§ 4); dass dieses Gebilde stets einen ebenen Schnitt eines Kegels zweiter Ordnung vorstellt, muss als aus der Raumgeometrie bekannt vorausgesetzt werden. Die Begriffe „Polare", „Tangente", „Mittelpunkt" und „Durchmesser" werden eingeführt, worauf eine vorläufige Eintheilung der Curven zweiter Ordnung hinsichtlich ihres Mittelpunktes erfolgt. Hierauf wird die Kegelschnittgleichung in Linien-Coordinaten abgeleitet, das Poldreieck eingeführt, und das Zerfallen des Kegelschnitts in ein Geradepaar besprochen. Interessant ist hier für den Determinanten-Theoretiker die Anwendung der geränderten

Determinanten zur Darstellung der Gleichung der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve zweiter Ordnung nach Methoden von Herren Gundelfinger und Aronhold.

Es folgen (§ 5) zu den vorhergehenden dualistischen Betrachtungen und (§ 6) eine Klassification der Kegelschnitte nach einer Methode, die Herr Dingeldey in der Einleitung wohl mit Recht als neu bezeichnet: Die Curve zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$, deren Linien-Coordinatengleichung $F(u, u) = 0$ lautet, wird mit der unendlich fernen Geraden $p_x = 0$ geschnitten. Auf Grund der erwähnten Aronhold'schen Untersuchungen hängt alsdann der Charakter unserer Curve zweiter Ordnung wesentlich von dem Ausdrucke $F(p, p)$ ab. Ist bei nicht zerfallender $f(x, x) = 0$, z. B. $F(p, p) > 0$, so stellt $f(x, x) = 0$ eine Ellipse, ist $F(p, p) < 0$, eine Hyperbel, ist $F(p, p) = 0$, eine Parabel vor. Die Kriterien für die Curven zweiter Ordnung, ebenso diejenigen für die Curven zweiter Klasse, sind dann in Tabellen zusammengestellt, die an Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen.

Der folgende Paragraph (§ 7) behandelt den Kreis, die imaginären Kreispunkte und ihre Beziehungen zum Winkel zweier Geraden in sehr eleganter Ausführung. Er enthält somit auch den Ausdruck für die Entfernung r zweier Punkte x, y, und zwar ist

$$r^2 = \frac{\begin{pmatrix} y\,x \\ y\,x \end{pmatrix}_{\omega_{ik}}}{\tau \cdot p_x^2\, p_y^2},$$

wo rechts τ eine Constante und der Zähler eine doppelt geränderte Determinante vorstellt, welch' letztere gleich Null gesetzt, die Gleichung der von einem Punkte y nach den imaginären Kreispunkten gehenden Geraden (des durch y gehenden circularen Geradepaares bei Herrn Gundelfinger) in Punkt-Coordinaten x liefert.

Nachdem in den beiden folgenden Paragraphen gewisse Gleichungen mit nur reellen Wurzeln untersucht (§ 8) und der Invariantenbegriff für ternäre Formen dargelegt und an wichtigen Beispielen (Discriminante, Hesse'sche Covariante u. s. w.) verdeutlicht worden ist (§ 9), gelangen wir zu dem Hauptachsenprobleme, welches hier in eigenartiger, interessanter Weise erledigt wird (§ 10). Diese Behandlung wird indessen nur ermöglicht durch die vorerwähnten Untersuchungen des § 8, welch' letztere, ganz abgesehen von ihrer Anwendung an dieser und späterer Stelle (§ 15, § 18), an und für sich von hervorragendem Interesse sind und als eine glänzende Leistung auf algebraischem Gebiete bezeichnet werden müssen. Hauptachse einer Curve zweiter Ordnung ist eine im Endlichen gelegene Gerade, welche mit der Polaren ihres Normalencentrums zusammenfällt; diese Heranziehung des Normalencen-

trums ist für die Behandlung des Hauptachsenproblems bei Herrn Gundelfinger eben das Charakteristische. Ein weiteres Eingehen auf die elegante Methode muss sich Referent leider versagen. Rein algebraisch wird dabei, was noch besonders hervorgehoben werden möge, das Problem erledigt, zwei quadratische ternäre Formen $f(x, x)$ und $\omega(u, u)$ mit contragredienten Veränderlichen gleichzeitig in eine Summe von Quadraten (bez. auf eine canonische Form) linear zu transformiren, allerdings aber nur für den Fall, dass $\omega(u, u)$ eine singuläre quadratische Form ist; indessen ist doch der Weg für die Behandlung des allgemeinen Falles vorgezeichnet. In diesem Paragraphen wird schliesslich eine nochmalige Klassification der Kegelschnitte mittelst der Hauptachsentransformation vorgenommen.

Von den beiden Schlussparagraphen des ersten Abschnittes beschäftigt sich noch der erste (§ 11) mit den wichtigsten metrischen Eigenschaften der Kegelschnitte, der zweite (§ 12) mit der Erzeugung der Kegelschnitte durch projective Strahlenbüschel und Punktreihen. Hier findet sich unter Anderem ein hübscher Beweis des Pascal'schen Lehrsatzes durch eine einfache Determinanten-Rechnung.

Der zweite Abschnitt unseres Buches entwickelt die Theorie des Kegelschnittbüschels und Kegelschnittnetzes und der zu diesen dualen Gebilde. Nach einleitenden Bemerkungen (§ 13) werden die gemeinsamen Punkte und Tangenten zweier Curven zweiter Ordnung $f = 0$, $g = 0$ untersucht, wobei gleichzeitig das Verhalten des durch die beiden Kegelschnitte bestimmten Büschels in Betracht gezogen wird (§ 14), und zwar wird der Ausnahmefall, dass $det(\varrho f + \sigma g)$ identisch Null ist, eingehend berücksichtigt. Dieser Paragraph bringt noch die Transformation zweier Kegelschnitte auf das gemeinsame Poldreieck als Coordinatendreieck, der nächste (§ 15) die allgemeinen Eigenschaften des Kegelschnittbüschels und zu dem Vorhergehenden Dualistisches. Es werden dann die Haupteigenschaften der speciellen Schaar

$$\varrho\varphi(u, u) + \sigma\omega(u, u) = 0$$

von confocalen Kegelschnitten aus den allgemeinen Eigenschaften abgeleitet.

Der folgende Paragraph (§ 16) erledigt mittelst Partialbruchzerlegung die Transformation zweier Curven zweiter Ordnung auf eine besonders einfache Form auch für die Specialfälle, in welchen einfache oder doppelte Berührung u. s. w. stattfindet.

Es folgt (§ 17) die geometrische Deutung der Fundamentalinvarianten des Kegelschnittbüschels, wobei auch die ausartenden Kegelschnitte genügend berücksichtigt werden.

Im folgenden Paragraphen (§ 18) wird die Schaar confocaler Kegelschnitte erneuter Betrachtung unterzogen. Der Charakter der confocalen Schaar hängt, wie gezeigt wird, von den Wurzeln der cubischen Gleichung

$$det\,[\lambda\varphi(u,u) + \omega(u,u)] = 0$$

für λ ab; im allgemeinen Falle dreier verschiedener Wurzeln bestehen die Curven der Schaar aus Ellipsen und Hyperbeln, im Falle einer von Null verschiedenen Doppelwurzel aus concentrischen Kreisen, im Falle einer Doppelwurzel Null aus confocalen Parabeln. Enthält die confocale Schaar auch nur einen Kreis oder eine Parabel, so enthält sie nur Kreise bez. Parabeln. Die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte werden im nächsten Paragraphen (§ 19) noch näher untersucht; besonders interessiren hier die Sätze über doppelt berührende Kreise eines Kegelschnitts und ihre Beziehung zu den Brennpunkten. Der folgende Paragraph (§ 20) beschäftigt sich mit einigen Curven, welche zu einem Kegelschnittbüschel bez. zu einer Kegelschnittschaar in invarianter Beziehung stehen und zwar zunächst mit dem Polkegelschnitt N einer Geraden in Bezug auf ein Büschel (Kegelschnitt der neun Punkte), und bringt dann als Specialfall von N den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels. Dem Polkegelschnitte entspricht dualistisch eine Curve zweiter Klasse N, welche umhüllt wird von den Polaren eines Punktes y in Bezug auf eine Kegelschnittschaar; ist diese Schaar speciell eine confocale

$$\lambda\varphi(u,u) + \omega(u,u) = 0,$$

so ist N eine Parabel, die Herr Gundelfinger als Steiner'sche Parabel des Punktes y in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi(u,u) = 0$ bezeichnet; die Pole der Tangenten der Steiner'schen Parabel in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi(u,u) = 0$ erfüllen eine gleichseitige Hyperbel. — Am Schlusse dieser Paragraphen wird noch der Combinantenbegriff erklärt, und die später noch eingehender zu besprechende Combinante

$$\psi(x,x) = \frac{3}{2}\sum_1^3{}_i\sum_1^3{}_k \frac{\partial^2 N}{\partial x_i\,\partial u_k}\,\frac{\partial^2 N}{\partial x_k\,\partial u_i}$$

eines Kegelschnittbüschels eingeführt.

Die Untersuchungen über die Steiner'sche Parabel leiten uns zu solchen über Krümmungskreis und Evolute eines Kegelschnitts über (§ 21). Liegt nämlich y auf $\varphi(u,u) = 0$, so berührt die Steiner'sche Parabel von y in Bezug $\varphi(u,u) = 0$ die Normale im Punkte y in dem zu y gehörigen Krümmungsmittelpunkte. Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkt werden zuerst allgemein für Curven n^{ter} Ordnung oder k^{ter} Klasse bestimmt, und die Resultate dann auf die Kegelschnitte angewandt. Die Evolute eines Kegelschnitts ist im Allgemeinen eine Curve sechster Ordnung und vierter Klasse.

Die Schlussparagraphen des zweiten Abschnittes beschäftigen sich in der Hauptsache mit den Netzen und Geweben von Kegelschnitten. Zunächst werden die Hesse'sche und Cayley'sche (Hermite'sche) Curve eines Netzes eingeführt und ihre geometrischen Eigenschaften entwickelt (§§ 22—24). Dass die Hesse'sche Curve (Hessiane) eines Netzes auch als Jacobi'sche Curve desselben bezeichnet wird, hätte doch mindestens erwähnt werden müssen. Zwischen einem Kegelschnittnetze und einem gewissen Kegelschnittgewebe findet, wie dann gezeigt wird (§ 25), eine bemerkenswerthe Reciprocität statt, die insbesondere ihren Ausdruck darin findet, dass die Hessiane des Netzes zugleich die Cayley'sche Curve des Gewebes und die Cayley'sche Curve des Netzes die Hessiane des Gewebes vorstellt. Wir kommen sogleich auf diesen Gegenstand zurück, indem wir auf den Inhalt des folgenden Paragraphen (§ 26) eingehen, in welchem die conjugirten linearen Kegelschnittsysteme behandelt werden. In diesen Schlussparagraphen handelt es sich im Wesentlichen darum, die betreffenden Theorien in ihren Grundzügen soweit zu entwickeln, als es für den Anhang, von welchem wir unten sprechen werden, erforderlich ist. Referent bedauert aber, dass gerade auf die conjugirten linearen Kegelschnittsysteme, die in analytischen Lehrbüchern nicht oder doch nur ungenügend behandelt sind, nicht näher eingegangen worden ist. Es wäre auch vortheilhaft gewesen, den Begriff „n-gliedriges lineares System“ oder „n-gliedrige Gruppe von Kegelschnitten“ einzuführen, dann hätten die Hauptresultate des § 26 folgende einfache Gestalt angenommen: Jeder r-gliedrigen Gruppe von Curven zweiter Ordnung ist eine $(6-r)$-gliedrige Gruppe von Curven zweiter Classe zugeordnet der Art, dass jeder Kegelschnitt der einen Gruppe, und nur ein solcher, conjugirt ist zu sämmtlichen Kegelschnitten der anderen Gruppe ($r = 1, 2 \ldots 5$). Im Specialfalle $r = 3$ erhält man ein Netz und ein zu ihm conjugirtes Gewebe; zwischen beiden findet die oben bemerkte Reciprocität statt.

Es folgt nunmehr ein Anhang, welcher fast die Hälfte unseres Buches einnimmt. Derselbe enthält zunächst eine grosse Anzahl von Aufgaben und Lehrsätzen, meistens von Herrn Gundelfinger herrührend, welche grösstentheils mittelst der im Haupttheile entwickelten Theorien gelöst bezw. bewiesen werden können. Die Lösungen und Beweise sind meist ausführlich angegeben, wenn nicht, wenigstens angedeutet. Unter den Lehrsätzen finden sich viele, welche Steiner (oft ohne Beweis) aufgestellt hat, und die hier eine elegante Behandlung erfahren. Ueberhaupt findet sich hier des Interessanten und Anregenden eine grosse Menge.

Weiterhin bildet dieser Anhang eine Ergänzung des Haupttheils, indem Manches, was dort unterdrückt werden musste, darin zur Sprache kommt. So enthält derselbe einen Excurs über binäre quadratische und cubische Formen, um dann die (sechs) Curven von gegebenen Doppelverhältnissen in einen Kegelschnittbüschel bestimmen zu können. Die

Beziehungen der drei harmonischen und der zwei äquianharmonischen Curven des Büschels zu der schon erwähnten Combinante ψ derselben sind von besonderem Interesse. Der von Herrn Gundelfiger über ψ entwickelte Satz, wonach jeder der drei harmonischen Kegelschnitte mit ψ eine doppelte Berührung hat, erinnert sofort an einen analogen Satz über eine gewisse von Brioschi eingeführte Combinante ψ des syzygetischen Büschels einer ebenen Curve dritter Ordnung. In der That sind beide Combinanten nach demselben Gesetze gebildet. Weiterhin verwendet Herr Gundelfinger ψ noch bei der Aufstellung der Realitätskriterien für die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte; die folgenden Untersuchungen über Polviereck und conjugirte Kegelschnitte hätte Referent gern breiter ausgeführt und mit den damit im Zusammenhange stehenden Untersuchungen des Haupttheils verschmolzen gesehen, worauf schon oben hingedeutet wurde. Von den grösseren Entwickelungen des Anhangs seien noch erwähnt diejenigen über die Steiner'sche Curve dritter Klasse und vierter Ordnung, welche von den Achsen aller Parabeln umhüllt wird, die ein gegebenes Dreiseit zum Poldreiseit haben, ferner die Behandlung eines Aronhold'schen Integrals mittelst der Theorie der Poldreiecke und die Verallgemeinerung der Weierstrass-schen Methode, elliptische Integrale auf die Normalform zu reduciren unter Benutzung der Theorie der Kegelschnittbüschel.

Wie aus der vorstehend gegebenen Inhaltsübersicht hervorgeht, unterscheidet sich das Gundelfinger'sche Werk von den im Eingange erwähnten Werken vielfach durch die in ihm angewandten Methoden; es ist eben die principielle Benutzung projectiver Coordinaten, welche in vielen Fällen eine Umgestaltung der alten Methoden veranlasst, indem sie dazu nöthigt, den algebraischen Operationen eine allgemeinere Gestalt zu geben. Als Beispiel hierfür sei nochmals auf die Behandlung des Hauptachsenproblems bei Herrn Gundelfinger hingewiesen. — Stofflich deckt sich der Inhalt unserer Vorlesungen (im Haupttheile) ungefähr mit dem, was in denen von Clebsch-Lindemann über Kegelschnitte gebracht wird. Ueber das Salmon'sche Werk greift das Gundelfinger'sche in einzelnen Punkten hinaus (vergl. z. B. § 26), in anderen bleibt es hinter jenem zurück. Es ist aber auch offenbar nicht die Absicht des Herrn Gundelfinger, in seinem Werke alle Theile des weitverzweigten Gebietes der Kegelschnitttheorie gleichmässig und im Einzelnen in Betracht zu ziehen. Seine Absicht dürfte vielmehr, worauf schon die Wahl des Titels schliessen lässt, dahin gehen, diejenigen Methoden aus jener Theorie, welche er in einer Reihe von Jahren in den verschiedensten Zeitschriften entwickelt, als Universitätslehrer vorgetragen und praktisch erprobt hat, nunmehr auch weiteren Kreisen des mathematischen Publikums in bequemer Weise zugänglich zu machen. Niemand, der auf dem behandelten Gebiete thätig ist, wird dem Studium dieser Methoden sich entziehen können.

Herr Dingeldey hat die Herausgabe dieser Vorlesungen mit anerkennenswerther Sorgfalt ausgeführt. Die Diction ist fliessend, der Stoff sehr übersichtlich angeordnet und die Rechnung so gestaltet, dass sie ohne Schwierigkeit verfolgt werden kann. Das Studium des Buches wird sonach auch keinem Studirenden, welcher die nöthigen Vorkenntnisse besitzt, besondere Schwierigkeiten bereiten. Die benutzte Literatur ist durch Citate hinreichend kenntlich gemacht. Bei den Citaten ist das Erscheinungsjahr der betreffenden Abhandlung stets zugefügt, was sehr zu billigen und allgemein zu empfehlen ist. Ein ausführliches Sachregister macht das Werk zu einem werthvollen Nachschlagebuch. Indessen sollten im Register nicht zu viele Dinge fortlaufend ohne Gliederung unter denselben Begriff gestellt sein. Von sonstigen kleinen Ausstellungen nur noch die, dass die Bezeichnung p_z für

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3$$

schon Seite 25, nicht erst Seite 33 hätte erklärt werden müssen. — Schliesslich werde noch hervorgehoben, dass unter den Aufgaben und Sätzen sich solche befinden, welche theils von Herrn Dingeldey herstammen, theils von ihm auf Anregung des Herrn Gundelfinger bearbeitet worden sind.

P. Muth.

G. Holzmüller. **Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.** Erster Theil, nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlussprüfung der Vollanstalten reichend. VIII u. 212 S. 2 Mk. 40 Pf. Zweiter Theil, für die drei Oberklassen der höheren Lehranstalten bestimmt. Leipzig 1894. B. G. Teubner. VII u. 273 S. 3 Mk.

Der Verfasser, ein bekanntes Mitglied der Schulreform-Conferenz, giebt in dem vor uns liegenden Lehrbuche eine erste Darstellung von dem mathematischen Pensum der höheren Lehranstalten im Sinne jener Conferenz. Referent hat das Buch mit eingehendstem Interesse gelesen, und es erscheint ihm geboten, auf die Besonderheiten des neuen Lehrbuches genauer einzugehen.

Im Vorwort spricht es Verfasser als seine Grundanschauung aus, dass bei einem Lehrbuche eine einfache und naturgemässe Entwickelung einer lückenlosen systematischen Darstellung vorzuziehen sei. Weiter heisst es in dem Begleitwort zu dem ersten Theile, dass „es eigentlich nicht tadelnswerth ist, wenn ein Lehrbuch einmal etwas Neues bringt und aus dem altgewohnten Geleise heraustritt“. Sicher nicht, so lange die unabweisbare Forderung nach mathematischer Strenge überall befriedigt wird. Sehen wir von einzelnen Kapiteln ab, so bietet das Lehrbuch in der That vieles Gelungene. Allerdings, manches von dem, was Verfasser vielleicht als seinem Lehrbuch eigenthümlich bezeichnet wissen will, findet sich schon anderswo. So der auf S. 32 mitgetheilte kinematische Beweis für den Satz

von der Winkelsumme des Dreiecks, z. B. in „H. Müller, Die Elemente der Planimetrie“, 5. Aufl., Metz 1892, Scriba, S. 7; der auf S. 57 gegebene elegante Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes in „Kunze, Lehrbuch der Geometrie“ I, 3. Aufl., Jena 1873, Frommann, S. 86, 87. Auch der Gedanke, auf welchen Verfasser besonderen Werth legt, den Congruenzsätzen die Construction aus den betreffenden Stücken vorauszuschicken, ist schon anderswo, z. B. von Herrn H. Müller in dem citirten Lehrbuch, sowie in seinem „Leitfaden der ebenen Geometrie“ I, 3. Aufl., Leipzig 1889, B. G. Teubner, S. 20 zur Ausführung gebracht. Nicht recht ersichtlich ist es, weshalb die vier Aehnlichkeitssätze in üblicher Breite vorgetragen werden; zwei oder drei wären passender unter die Uebungsaufgaben zu verweisen.

In dem Begleitwort zur Stereometrie des ersten Theiles erhebt Verfasser nachdrücklichst die Forderung nach correctem stereometrischen Zeichnen und stimmt hierin mit Herrn Martus überein (vergl. dessen „Raumlehre für höhere Schulen“ II, Bielefeld und Leipzig 1892, Velhagen und Klasing). Gerade das Kapitel über Stereometrie aber scheint dem Referenten nicht durchaus einwandsfrei zu sein. So möchte sich Referent erlauben, gegen die alleinige Anwendung der Parallelprojection Bedenken zu erheben, Bedenken, welche auch in dem Vorwort zu dem „Leitfaden für den Unterricht in der Raumlehre von H. Martus“, II, Bielefeld und Leipzig 1893, Velhagen und Klasing, einen Ausdruck gefunden haben.

Was die Ausdrucksweise anbetrifft, so lässt deren Correctheit zu wünschen übrig. Indessen möchte die anerkennenswerthe Schnelligkeit, mit welcher das Lehrbuch zur Ausführung gekommen ist, als Entschuldigung gelten. Damit die zweite Auflage hierin Wandel schaffe, seien einige Belege mitgetheilt. Auf S. 14 schreibt der Verfasser: Die Ebene ist eine Fläche, bei der jeder Punkt gleichen Abstand von zwei gegebenen Raumpunkten hat; und auf S. 47 wird sie als die Gesammtheit aller Punkte bezeichnet, deren jeder von zwei gegebenen Raumpunkten dieselbe Entfernung hat. Auf S. 135 wird π ein Decimalbruch mit unendlich langer Periode genannt. Die auf S. 186 angeführte trigonometrische Aufgabe 25) dürfte in der Wirklichkeit wohl unausführbar sein. Dem Referenten fiel ferner (besonders bei der Aufgabe auf S. 30) auf, dass die Meilenbezeichnung statt der jetzt üblichen km-Bezeichnung angewendet wird, sowie dass Verfasser vermeidet, neben senkrecht die Bezeichnungen lothrecht und rechtwinklig zu unterscheiden. Noch eine mehr subjective Bemerkung bezieht sich auf die Stellung der Zahl π: die unbenannte Zahl gehört doch vor die benannte. Auch ein Druckfehler sei hier mitgetheilt: Auf S. 113, 124, 159 ist die Null durch den Buchstaben *o* dargestellt.

Ein Wort noch über die arithmetische Abtheilung des ersten Theiles. Das Begleitwort liefert hierzu eine längere treffende Auseinandersetzung. Wer noch weitere Belehrung wünscht, sei auf „O. Reichel, Darstellung der Grundbegriffe der Arithmetik“, Programm-Abhandung, Kaiserin Aug.-

Gymnasium, Charlottenburg 1882, aufmerksam gemacht. Bei den quadratischen Gleichungen fiel dem Referenten die unbequeme Normalform $x^2 - ax + b = 0$ statt $x^2 - 2ax + b = 0$ auf. Soviel über den ersten Theil!

Der zweite Band, dessen Redaction eine sehr sorgfältige zu nennen ist, beginnt mit dem Satz des Ptolemäus, aus welchem die Heron'sche Inhaltsformel hergeleitet wird, und mit Constructionen regelmässiger Kreisvielecke, wobei Mascheronis elegante Constructionen eines Fünf- und Zehnecks eine Stelle finden. Verfasser hätte hier auch die Construction erwähnen können, welche viele der bisher bekannt gewordenen an Eleganz und Einfachheit überragt: Referent meint die Construction des Herzogs Carl Bernhard von Sachsen-Weimar, welche für die regelmässigen Polygone mit überraschender Annäherung gilt (vergl. Kunze a. a. O. S. 246, sowie H. Martus, Raumlehre II S. 36). Hieran reihen sich Uebungen am Dreieck, welche durch ihre Auswahl und Anordnung bemerkenswerth sind: eine Reihe von Relationen zwischen den Seiten und den Radien der Um-, In- und Ankreise einerseits, den Höhen, Mittellinien und Winkelhalbirenden andererseits werden vorgeführt und u. A. eine Aufgabe behandelt, die sich als ein Specialfall des Steiner'schen Schliessungsproblems darstellt. Es folgen allgemeine Bemerkungen über Constructionsaufgaben: Lösungen mit Hilfe von Lehrsätzen, Methode der Symmetrie oder der Spiegelbilder, Methode der Parallelverschiebungen, Methode der Aehnlichkeit, Methode der Umkehrung der Aufgabe, Methode der Drehung, Methode des geometrischen Ortes, Methode der algebraischen Analysis. Dieses Kapitel verdient besondere Hervorhebung, da es eine grosse Zahl hübscher Aufgaben bietet, deren Lösungen durch ihre Eleganz ausgezeichnet sind. Verfasser geht hiernach zur neueren Geometrie über, die hier erheblich stärker berücksichtigt wird, als es in der Regel geschieht. Es kommen zur Behandlung: Satz des Ceva, Satz des Menelaus, Anwendungen auf vollständiges Vierseit, Pascal'scher Satz und Aehnlichkeitsachsen dreier Kreise; harmonische Punkte und Strahlen; Aehnlichkeitspunkte und Pascal'scher Satz; harmonische Punkte und Strahlen am Kreise, Pol und Polare; die Inversion oder Spiegelung mittels reciproker Radien; Potenz und Potenzlinien; einige Berührungsaufgaben. Diese Betrachtungen dienen dem Verfasser zum Theil als Vorbereitung für kartographische Anwendungen, welche er mehr als bisher in den mathematischen Unterricht hineingezogen wissen will, in Uebereinstimmung mit Herrn Martus, der in seinem Buche über „Astronomische Geographie“ ein Kapitel der Darstellung des Kugel-Gradnetzes auf Karten gewidmet hat. Um den Zusammenhang der verschiedenen Gradnetze klarzulegen, entwickelt Verfasser in höchst einfacher und elementarer Weise die Grundzüge der conformen Abbildung, eines Gebietes, in welchem der Verfasser auch wissenschaftlich thätig gewesen ist.

Erst die Trigonometrie dieses Theiles bringt die Additionstheoreme, welche auf zwei Weisen hergeleitet werden. Die so schwerfällige und den identischen Charakter der Additionstheoreme verdeckende Herleitung mit Hilfe des Ptolemäischen Satzes hätte vielleicht wegbleiben können. Es sei auf eine andere Herleitung verwiesen, vielleicht die einfachste unter den bekannten, welche Referent u. A. in „J. Diekmann, Anwendung der Determinanten und Elemente der neueren Algebra“, Leipzig 1889, B. G. Teubner, S. 99 gefunden hat.

Die stereometrische Abtheilung bringt ausser den üblichen Betrachtungen noch Kapitel über den Schwerpunkt, die Guldin'schen Regeln, die Sätze über abgeschrägte Körper, die Newton-Simpson'sche Regel und die Summenformel, sowie Kugelbetrachtungen mit kartographischen Anwendungen. Auch im zweiten Bande spricht Verfasser noch von einem „Satze“ des Cavaleri. Eine folgende Abtheilung enthält die „Grundlehren von den Kegelschnitten“, doch soll auch hier, wie es in der Vorbemerkung heisst, nur ein „Einblick“ gegeben werden. Der arithmetische Theil behandelt geometrische und arithmetische Reihen, den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten, die Exponentialreihe und die natürlichen Logarithmen, den Moivre'schen Satz, die geometrische Darstellung der complexen Zahlen und der n^{ten} Wurzeln aus der Einheit und reciproke Gleichungen.

Ein Anhang bringt eine Hauptaufgabe der mathematischen Geographie, einige Bemerkungen über Maxima und Minima, sowie die Quadrateintheilung der Ebene mittelst der Polarcoordinaten.

Schon dieser kurze Auszug lässt erkennen, dass das vorliegende Lehrbuch unstreitig zu den bedeutendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der pädagogischen Literatur zu zählen ist.

E. Jahnke.

B. Féaux. **Buchstabenrechnung und Algebra nebst Uebungsaufgaben.** 9. Aufl. von F. Busch. Paderborn 1894. Schöningh. 316 S. Mk. 2,40.

Diese Auflage unterscheidet sich nur äusserlich von der vorhergehenden, über welche schon Herr Schwering im XXXIII. Bande dieser Zeitschrift referirt hat. In Rücksicht auf die neuen Lehrpläne sind die Kapitel der Determinanten und Combinatorik gestrichen und andere, wie die Lehre von den Kettenbrüchen und diophantischen Gleichungen gekürzt worden. Auch erfuhr die Aufgabensammlung eine Revision, so zwar, dass die alten Nummern der Aufgaben hinter die neuen gesetzt worden sind.

E. Jahnke.

S. Epstein. **Die vier Rechnungsoperationen mit Bessel'schen Functionen nebst einer geschichtlichen Einleitung.** Bern 1894. Wyss. 56 S.

Es ist eine unter Leitung des Herrn Graf entstandene Inaugural-Dissertation, deren Redaction an manchen Stellen zu wünschen übrig lässt.

Sie giebt eine Zusammenstellung von Resultaten aus den einschlägigen Arbeiten der Herren Gegenbauer, Graf, Lommel, C. Neumann, Nicolas, Schläfli, Schlömilch u. A. Nach einer kurzen historischen Einleitung werden im ersten und zweiten Theile die Entwickelungen angegeben, welche sich auf die Addition, Multiplication und Division der Bessel'schen Functionen beziehen; der dritte Theil bringt die Formeln für die Producte und Quotienten von Bessel'schen Functionen.

In dem angehängten Literatur-Nachweis fiel dem Referenten ein Versehen auf. Die citirte Arbeit von Herrn Haentzschel ist nicht im 43. Bande der „Mathematischen Annalen", sondern im XXXI. Bande der Schlömilch'schen „Zeitschrift" erschienen.

E. Jahnke.

B. Kämpfe. Tafel des Integrals $\Phi_{(\gamma)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-t^2}dt$. Leipzig 1893. Engelmann.

In der Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeiten spielt das Gauss'sche Fehlerintegral $\Phi_{(\gamma)}$ eine Rolle als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler seinem absoluten Werthe nach zwischen 0 und $D (\gamma = hD)$ liege. Schon Fechner hatte eine Tafel für dieses Integral berechnet. Vollständiger ist die hier vorliegende, welche aus der entsprechenden in A. Meyers, Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitet ist. Sie giebt die Werthe von $\Phi_{(\gamma)}$ auf vier Stellen genau, wie es für psychophysische Zwecke genügt, von $\gamma = 0{,}000$ bis $\gamma = 1{,}509$ und von $\gamma = 1{,}51$ bis $\gamma = 2{,}89$.

E. Jahnke.

Eine allgemeinere Integration der Differentialgleichungen. Von Emanuel Puchberger. 1. Heft. Wien 1894. Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

Der Verfasser sagt in seiner Vorrede von dieser Methode: „Dieselbe integrirt alle Differentialgleichungen, ist theoretisch auf alle anwendbar, ihre Ausführung unterliegt, wie jedes Verfahren, nur den äusserlichen Rücksichten auf Raum und Zeit; sie ist die einzige bekannte Methode, von der man dies sagen kann." Einen Beweis für diese Behauptung wird man allerdings vergebens suchen. Das ist eine Folge der Ansicht des Verfassers über das mathematische Beweisverfahren. Nach seiner Meinung nämlich genügt es, wenn die Methode an einzelnen Zahlenbeispielen zum Ziele führt, um ihre Allgemeingiltigkeit zu behaupten, und diese Behauptung so lange aufrecht zu erhalten, bis ihm ein Beispiel vorgeführt wird, auf welche sie nicht anwendbar ist. Er befindet sich dabei mit seinen eigenen Worten in Widerspruch, indem er ausführt: „Es wäre eine gewagte Behauptung, die allgemeinste Methode gefunden zu haben. Eine solche giebt es nicht, und insofern will das Streben nach einer solchen Unmögliches oder ist — wenn man sich weniger höflich ausdrücken will — ungereimt."

Was die Methode selbst anbetrifft, so beruht sie auf folgendem Princip: „Die Integrale sind Functionen der Coefficienten und ihrer 1., 2., 3. ... n^{ten} Ableitungen und zwar unendliche oder endliche Reihen, deren Glieder die Producte der mit unbestimmten Constanten-Coefficienten und Exponenten — versehenen Gleichungscoefficienten und ihrer 1., 2., 3. ... n^{ten} Ableitungen sind." In den einzelnen Beispielen wird nicht genau nach dieser Methode verfahren. In vielen derselben sind die Coefficienten Functionen von x und lx; in allen diesen Fällen wird

$$y = a_m \,.\, x^{b_m} \,.\, (lx)^{c_m} \ldots$$

gesetzt. b_m und c_m werden so bestimmt, dass möglichst viele Glieder der Gleichung verschwinden. Diese Werthe, von denen wir z. B. bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung im Allgemeinen zwei erhalten, werden mit $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ bezeichnet; $b_3 b_4$, $c_3 c_4$ werden dadurch erhalten, dass man das erste Glied der Gleichung für b_3 dem niedrigsten in der Gleichung für b_1 noch vorhandenen gleich setzt und ebenso mit b_4 und b_2 verfährt. Auf dieselbe Weise bestimmt man die weiteren Exponenten; die Zahlen mit ungeradem Index sind die Exponenten der Reihe für y_1, die geraden diejenigen von y_2. Der Nachweis der Convergenz der betreffenden Reihen wird niemals erbracht. Diese Aufgabe wird einfach als nicht in den Rahmen der Untersuchung fallend bezeichnet, obgleich doch gerade die Convergenz die nothwendige Bedingung für die Verwendung der Reihe bildet. Die Methode soll übrigens bei partiellen Differentialgleichungen zu viel allgemeineren Resultaten führen als die bisher bekannten.

Als Beispiel hierfür benutzt der Verfasser die Gleichung:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = 0$$

und erhält als Resultat:

$$z = \varphi\Big[\frac{y^{c_1}}{0!} + \frac{c_1 x y^{c_1-1}}{1!} + \frac{c_1(c_1-1)}{2!}x^2 y^{c_1-2} + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)}{3!}x^3 y^{c_1-3} + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)(c_1-3)}{4!}x^4 y^{c_1-4} + \cdots + \frac{c_1(c_1-1)(c_1-2)\ldots(c_1-m+2)}{(m-1)!}x^{m-1} \,.\, y^{c_1-m+1}\Big]\ldots$$

Hierzu macht er folgende Bemerkung: „In der That ein überraschendes Resultat und eine glänzende Leistung der angewandten Methode, wenn man bedenkt, dass die bisher bekannten Methoden für die Gleichung $z' - z_1 = 0$ nur das Integral: $z = \varphi(x + y)$ bestimmen konnten, welches an Eleganz, Allgemeinheit und Reichthum der Gestaltung weit von dem hier entwickelten Integrale übertroffen wird." Er scheint also ganz zu übersehen, dass diese Reihe, falls sie convergirt, $= (y + x)^{c_1}$ ist. Das ist in der That ein überraschendes Resultat!

Max Meyer.

Vierstellige Logarithmentafel. Von Th. Albrecht. Leipzig 1894. Verlag von Wilhelm Engelmann.

Die vorliegende Tafel zeichnet sich durch Klarheit und Uebersichtlichkeit der Anordnung aus. Sie enthält:

I. Logarithmen der Zahlen.
II. Länge der Kreisbögen für den Halbmesser 1.
III. Logarithmen der trigonometrischen Functionen.
IV. Additions- und Subtractions-Logarithmen.
V. Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000.
VI. Numerische Werthe der trigonometrischen Functionen.
VII. Constanten.

Es ist also alles für den praktischen Gebrauch Nothwendige darin vorhanden und in allen Fällen, in denen eine Rechnung mit vierstelligen Logarithmen genügt, der Gebrauch derselben zu empfehlen.

Max Meyer.

Bibliographie

vom 16. Juli bis 31. August 1895.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1894. Berlin, G. Reimer. Mathematische Abhandlungen. 4 Mk. 50 Pf. Physikalische Abhandlungen. 13 Mk.

Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Instituts. Zenitdistanzen von Helgoland, Neuwerk und Wangeroog u. s. w. Berlin, Stankiewicz. 20 Mk.

Astronomische Mittheilungen der königl. Sternwarte zu Göttingen. Herausgegeben von W. Schur. 4. Theil. Göttingen, Peppmüller. 30 Mk.

Katalog der Astronomischen Gesellschaft. I. Abtheilung 10. Stück. Leipzig, Engelmann. 18 Mk.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 14. Jahrgang. 1895. Nr. 1 und 2. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Nautisches Jahrbuch für 1898 zur Bestimmung der Zeit, der Länge und Breite zur See. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern unter Redaction von Tietjen. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Kleines nautisches Jahrbuch für 1896. 35. Jahrgang. Herausgegeben von W. Ludolph. Bremen, Heinsius. 75 Pf.

Jahresbericht für 1894 des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogthum Baden. Karlsruhe, Braun. 6 Mk.

Beobachtungen der kaiserl. meteorologischen Marinestation in Wilhemshaven, ausgeführt unter Leitung von C. Börgen. 1. Theil. Berlin, Mittler. 1 Mk. 75 Pf.

Geschichte der Mathematik.

Stäckel, P. und Engel, F., Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss; eine Urkundensammlung. Leipzig, B. G. Teubner. 9 Mk.

Reine Mathematik.

Plücker's gesammelte Abhandlungen, im Auftrag der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Herausgegeben von A. Schönflies und F. Pockels. 1. Bd. Mathem. Abhandlung. Leipzig, B. G. Teubner. 20 Mk.

KRONECKER's Werke, auf Veranlassung der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. HENSEL. 1. Band. Leipzig, B. G. Teubner. 28 Mk.

KLEIN, F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. TÄGERT. Ebendaselbst. 2 Mk.

GRASSMANN, R., Die Formenlehre der Mathematik. Stettin, Grassmann. 10 Mk.

SIEVERT, H., Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen. II. Theil. (Progr.) Bayreuth, Giesel. 75 Pf.

CHISHOLM, G., Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie (Dissertation). Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

JACOTTET, C., Ueber die allgemeine Reihenentwickelung der Potentialfunction nach Lamé'schen Producten (Dissertation). Ebendaselbst. 1 Mk. 20 Pf.

SNYDER, V., Ueber die linearen Complexe der Lie'schen Kugelgeometrie (Dissertation). Ebendaselbst. 1 Mk. 20 Pf.

WOODS, F., Ueber Pseudominimalflächen (Dissertation). Ebendas. 2 Mk.

Angewandte Mathematik.

KLEIN, F., Die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Antrittsrede. Leipzig, B. G. Teubner. 60 Pf.

Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen, ausgeführt in den Jahren 1892—1894 durch die kaiserl. königl. Kriegsmarine. Wien, Gerold. 18 Mk. 40 Pf.

VODUSEK, M., Die astronomische Strahlenbrechung (Programm). Laibach, Fischer. 50 Pf.

Physik und Meteorologie.

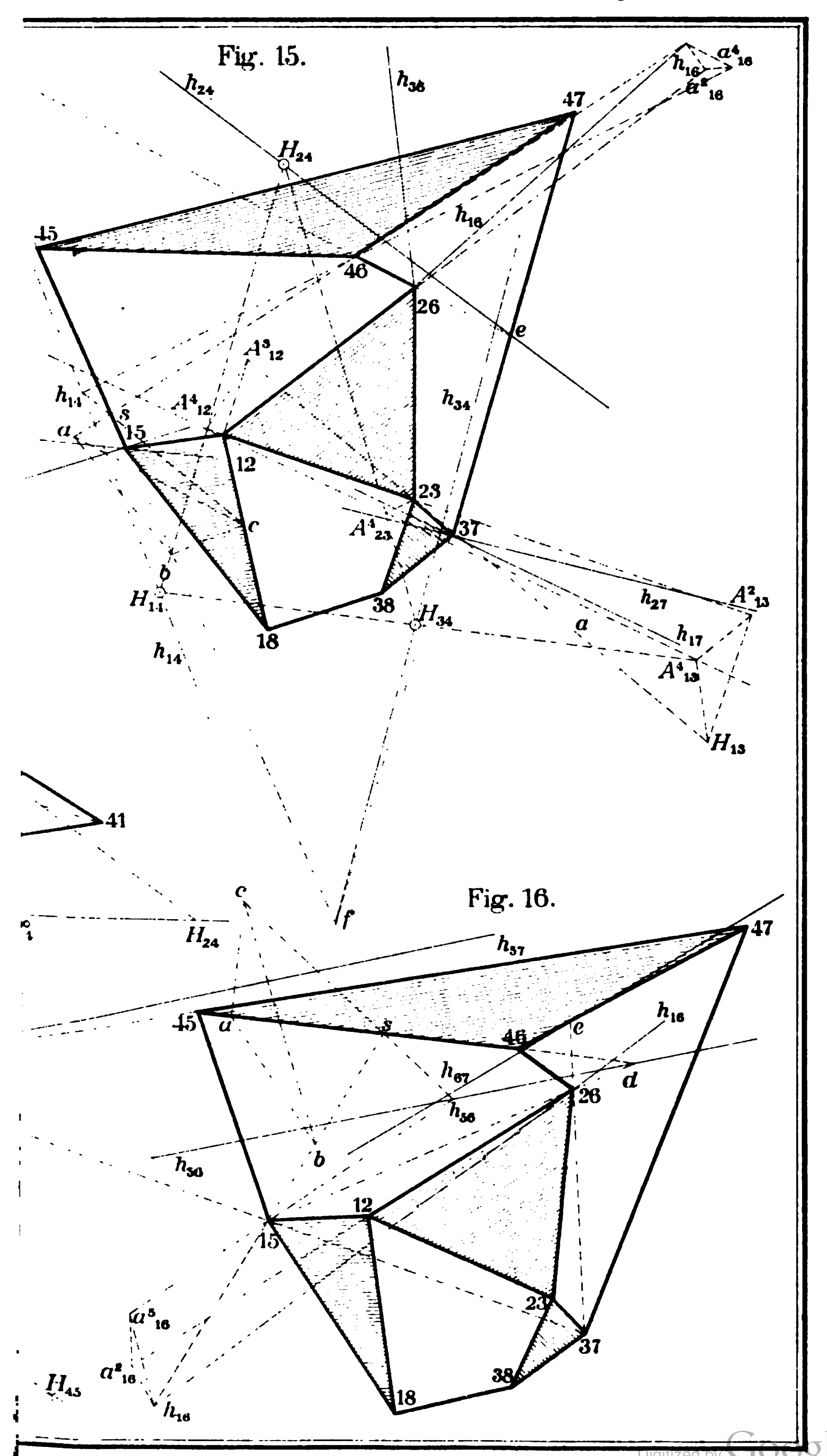
TESLA's Licht der Zukunft. Populärer Experimentalvortrag von P. SPIES. Berlin, Pätel. 50 Pf.

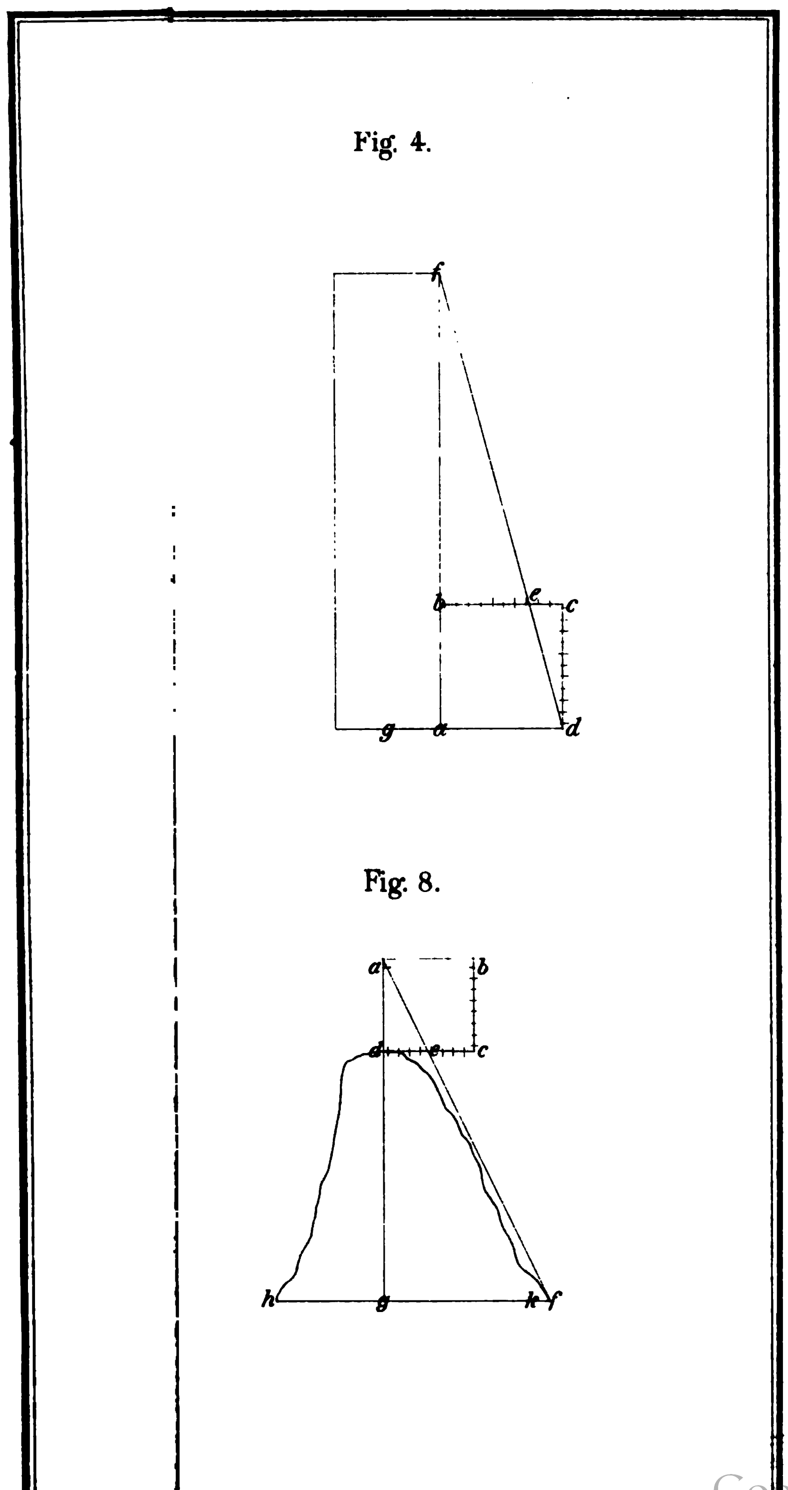
LEHMANN, O., Elektricität und Licht. Braunschweig, Vieweg. 7 Mk.

SCHMIDT, F., Moderne Anschauungen über die Kräfte der Elektricität. Halle, Pfeffer. 50 Pf.

KAPP, G., Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom. Theorie und Construction. Berlin, Springer. 7 Mk.

FRÖLICH, O., Ueber Isolations- und Fehlerbestimmungen an elektrischen Anlagen. Halle, Knapp. 8 Mk.


Fig. 15.
Fig. 16.


Fig. 4.
f
b
e
c
g
a
d
Fig. 8.
a
b
d
e
c
h
g
k
f

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

F. Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie. Leipzig 1892. B. G. Teubner. XV und 712 S.

Die Verspätung der Besprechung des vorliegenden Bandes — vergl. wegen des voraufgegangenen Bandes diese Zeitschrift Bd. 36 S. 201—212, Bd. 37 S. 82—84 — finde ihre Rechtfertigung in einem durch den früheren Referenten gewünschten nachträglichen Wechsel.

Die im Jahre 1884 erschienenen Vorlesungen von F. Klein über das Ikosaeder bildeten das erste Stadium, die 1890 und 1892 erschienenen, von R. Fricke bearbeiteten und verschiedentlich ergänzten Vorlesungen von Klein über elliptische Modulfunctionen das zweite Stadium eines grösseren Unternehmens, die Gesammtheit der neueren Untersuchungen über eindeutige Functionen mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich zu einem abgerundeten Ganzen zu gestalten.

Schon das „Ikosaeder“, aber recht eigentlich die „elliptischen Modulfunctionen“ sollen als Vorstufen zu der allgemeinen Theorie dienen, die in mehreren zu erwartenden Bänden ihre Darstellung finden soll.

Das Wort „Vorstufe“ ist hier in weiterem Umfange zu verstehen, indem wenigstens bei den „elliptischen Modulfunctionen“ bereits alle die Methoden und Gesichtspunkte ausgeprägt erscheinen, welche den Verfassern auch für die allgemeine Theorie massgebend sein werden.

Der Charakter dieser Methodik lässt sich füglich in zwei Worten bezeichnen: möglichst unmittelbare, geometrische Anschaulichkeit, insofern es sich um die Erfassung der leitenden Gedanken handelt, und andererseits in historischem Sinne, möglichst allseitige Beleuchtung und Durchdringung des Stoffes.

Kein Zweifel, dass sich bei rein analytischer Verfolgung des Gegenstandes der äussere Umfang der „Modulfunctionen“ hätte bedeutend reduciren lassen, aber dann würde eben das Wesen der ganzen Darstellung und Denkweise der Verfasser verloren gegangen sein.

Die Vorzüge, aber auch die (pädagogischen) Gefahren einer derartigen universellen Stoffdurchbildung fallen zu sehr ins Auge, als dass dabei lange

zu verweilen wäre. Bedenkt man aber, dass es bisher nur wenige Werke in der mathematischen Literatur gab, in denen das gemeinte Princip consequent durchgeführt ist, so wird man mit der Kritik doppelt vorsichtig sein müssen, und wird vielmehr die Verfasser beglückwünschen, dass sie den Muth gefunden haben, trotz der vielen so zu sagen zünftlerischen Vorurtheile unbeirrt ihren Weg zu gehen.

Eines soll allerdings ohne Weiteres zugestanden werden, dass an einen Durchschnitts-Leser nicht gewöhnliche Anforderungen gestellt werden. Trotzdem, oder vielmehr weil ihm specifische Vorkenntnisse nicht eigentlich zugemuthet werden, muss er eine um so grössere Elasticität des Geistes besitzen, um sich abwechselnd in den so ganz verschiedenartigen Gedankengängen mit Freiheit und Umsicht bewegen zu können.

Dass nur ein mit dem ersten Bande eingehend vertrauter Leser an den vorliegenden zweiten Band herantreten darf, bedarf wohl kaum der Bemerkung; immerhin sind in dieser Hinsicht die Fingerzeige, welche Herr Fricke in der Vorrede zum zweiten Bande gegeben hat, sowie das von demselben am Schlusse beigefügte Sachregister, für ein zweckmässiges Studium des ganzen Werkes von grossem Nutzen. Man vergleiche übrigens unsere Schlussbemerkung.

Wir erinnern zur Orientirung an das im ersten Bande (§§ 14, 15) formulirte Doppelprogramm. Der gruppentheoretische Theil desselben verlangte, von der „Modulgruppe“, das ist, der Gesammtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen:

$$\omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

die Untergruppen aufzustellen und sachgemäss zu klassificiren — der functionentheoretische Theil dagegen, die zugehörigen Invarianten, das ist, die einer solchen Untergruppe gegenüber invarianten Functionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ resp. Formen von ω_1, ω_2 zu bilden und deren gegenseitige Beziehungen zu ermitteln.

Beide Seiten des Programms ergänzen und vereinigen sich zur Lösung des Fundamentalproblems, die Resolventen der Modulgleichung $J(\omega) = const$ zu finden, wo nunmehr ω den Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des elliptischen Integrals erster Gattung (in der Weierstrass'schen) Normalform:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

bedeutet, und $J = \frac{g^3_2}{g^3_2 - 27g^2_3}$ dessen rationale absolute Invariante.

Das gruppentheoretische Problem wurde in Beschränkung auf Congruenzgruppen, das sind solche, welche sich durch Congruenzen der Substitutionscoefficienten *mod n* definiren lassen, zu einem gewissen Abschluss gebracht.

Die Lösung des functionentheoretischen Problems dagegen wurde nur erst auf Grund der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen unter Benützung gewisser Existenztheoreme als möglich nachgewiesen und in einigen einfachen Fällen explicite durchgeführt.

Um das Problem für Congruenzgruppen allgemein zu lösen, bedarf es nunmehr des durch die geschichtliche Entwickelung der Theorie der elliptischen Functionen, insbesondere der Theilung und Transformation derselben, gelieferten Materiales. Darüber hinaus erscheint aber jetzt eben dieses Gebiet der elliptischen Functionen unter neuen und wesentlich allgemeineren Gesichtspunkten; ja, man kann füglich behaupten, dass dieses bisher multis sed variis singulis modis bearbeitete Gebiet auf Grund des einheitlichen Klein'schen Programms erst zum Range einer wissenschaftlichen Disciplin erhoben wird.

Die Weierstrass'sche Function

$$p = p(u, \omega_1, \omega_2)$$

bleibt nicht nur der Modulgruppe gegenüber ungeändert, sondern auch bei Vermehrung von u um ganzzahlige Vielfache von ω_1, ω_2, oder zusammengefasst, p ist eine Invariante der ternären Gruppe „$\Gamma^{(3)}$“:

$$(\Gamma^{(3)}) \quad u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2; \quad \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2.$$

Die Gruppe des u für sich bildet eine in $\Gamma^{(3)}$ ausgezeichnete, unäre Untergruppe $\Gamma^{(1)}$; die der ω_1, ω_2 für sich, das ist eben die Modulgruppe, eine (nicht ausgezeichnete) binäre Untergruppe $\Gamma^{(2)}$ von $\Gamma^{(3)}$.

Der allgemeinste Ansatz wäre wiederum, sämmtliche Untergruppen von $\Gamma^{(3)}$ und die zu einer jeden solchen gehörigen Functionen resp. Formen zu suchen, sowie deren gegenseitigen Zusammenhang zu ergründen.

In dieser Allgemeinheit wäre das Problem indessen viel zu schwierig, und auch unzweckmässig gestellt.

Man wird sich einmal auf Congruenzgruppen *mod n* beschränken, und andererseits den zugehörigen Functionen bez. der Art der Singularitäten gewisse einschränkende Forderungen auferlegen. Die Zahl n heisst die Stufe der Gruppe resp. der Functionen. Wir erwähnen hier nur die zwei nächstliegenden Congruenzgruppen. Nennt man zwei Substitutionen der $\Gamma^{(3)}$ „*mod n* congruent“, wenn alle Differenzen (oder auch alle Summen) von je zwei homologen Coefficienten durch n theilbar sind, so haben wir einmal die „ternäre Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe $H^{(3)}$“, welche alle *mod n* zur Identität congruenten Substitutionen der $\Gamma^{(3)}$ umfasst, und andererseits die aus der $\Gamma^{(1)}$ entsprechend gebildete unäre Gruppe $H^{(1)}$. Dieser letzteren Gruppe gehört in der u-Ebene, als Inbegriff aller nicht äquivalenten Werthe von u, ein „Fundamentalparallelogramm“ zu, das aus n^2 der gewöhnlichen Elementarparallelogramme besteht.

Nunmehr lässt sich der Begriff der „elliptischen Function n^{ter} Stufe“ verständlich machen. Das ist eine solche eindeutige, homogene Function

der u; ω_1, ω_2, die eine Invariante der $H^{(3)}$ ist, die als Function von u im Fundamentalparallelogramm der $H^{(1)}$ wesentlich singuläre Stellen nicht aufweist, die endlich als Function der ω_1, ω_2, von den rationalen Invarianten

$$g_2(\omega_1, \omega_2), \; g_3(\omega_1, \omega_2)$$

algebraisch abhängt.

Für $n = 1$ liegt das Weierstrass'sche System ausgebildet vor; p und $p' = \frac{dp}{du}$ nebst g_2, g_3 sind Functionen erster Stufe, und jede weitere solche Function lässt sich rational durch p, p', g_2, g_3 ausdrücken.

Der nächste Fall $n = 2$ deckt sich mit der Jacobi'schen Theorie; snu, cnu, dnu nebst dem Doppelverhältniss λ sind Functionen zweiter Stufe (von der Dimension Null) und jede weitere solche hängt wiederum rational von jenen vier ab.

Hier gewährt bereits die gruppentheoretische Auffassung einen tieferen Einblick. Sieht man nämlich in der $\Gamma^{(3)}$ jeweils die $mod\ 2$ congruenten Substitutionen als nicht wesentlich verschieden von einander an, so reducirt sich die $\Gamma^{(3)}$ dadurch auf eine endliche Gruppe G_{24} (von der Ordnung 24), und diese G_{24} erweist sich als holoedrisch isomorph zur „Oktaedergruppe“, das ist, der Gruppe der Drehungen, welche ein Octaeder mit sich zur Deckung bringen. In Folge dessen giebt es in der G_{24} drei gleichberechtigte Untergruppen G_8, und snu, cnu, dnu sind eben Invarianten derselben. Die G_{24} beherrscht thatsächlich die ganze Jacobi'sche Theorie.

Man übersieht somit deutlicher das Verhältniss der Jacobi'schen Theorie zur Weierstrass'schen, und wie beide wiederum in eine allgemeinere Theorie eingeordnet erscheinen.

Die historische Entwickelung hat zwei Methoden ausgebildet, um indirect aus elliptischen Functionen niederer Stufe solche von höherer Stufe herzustellen, die „Theilung“ und die „Transformation.“

Ihnen ist der vierte Abschnitt (der erste des vorliegenden Bandes) gewidmet. Mit der Theilung beschäftigt sich das erste Kapitel, während die folgenden ausführlicher die Transformation erörtern, insbesondere die dadurch involvirten Modulargleichungen erster und höherer Stufe, und deren Anwendung auf die sogenannten Klassenanzahlrelationen der binären quadratischen Formen.

Sei $f(u; \omega_1, \omega_2)$ eine elliptische Function erster Stufe, so versteht man unter n-Theilung den Uebergang von f zu

$$f\left(\frac{u + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \; \omega_1, \omega_2\right),$$

wo λ, μ alle n^2 $mod\, n$ incongruenten Paare ganzer Zahlen durchlaufen können.

Für $u = 0$ entsteht die „specielle n-Theilung“, auf die man sich im Wesentlichen beschränken kann.

Die „n^{ten} Theilwerthe“

$$f\lambda\mu = f\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

werden — und das ist, hier wie durchgehends, der charakteristische Zug der Untersuchung — wechselseitig gruppentheoretisch und functionentheoretisch untersucht.

Das Hauptergebniss ist, dass $f_{\lambda\mu}$ einer irreducibeln „Theilungsgleichung“ vom Grade $\varphi(n)\psi(n)$ genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind; $f_{\lambda\mu}$ ist also eine algebraische Function der g_2, g_3. Hierbei sind $\varphi(n)$, $\psi(n)$ die bekannten zahlentheoretischen Functionen

$$\varphi(n) = n\Pi\left(1 - \frac{1}{q}\right), \quad \psi(n) = n\Pi\left(1 + \frac{1}{q}\right),$$

wo sich die Producte Π über alle Primfactoren q von n erstrecken; $\varphi(n)\psi(n)$ selbst bedeutet die Anzahl der $mod\, n$ incongruenten Paare von Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler prim gegen n ist.

Die Weierstrass'schen Theilwerthe $p_{\lambda\mu}$, $p'_{\lambda\mu}$ erfreuen sich noch einer besonderen Eigenschaft: da sie innerhalb des „Polygons n^{ter} Stufe“ überall endlich sind, sind sie ganze algebraische Functionen (Formen) der g_2, g_3.

Auf diese Weise hat man eine ganze Klasse von Modulformen n^{ter} Stufe gewonnen.

Eine ähnliche Entwickelung gilt übrigens für die σ-Theilwerthe $\sigma_{\lambda\mu}$, nur dass dieselben erst nach Multiplication mit einer geeigneten Exponentialgrösse zu algebraischen Modulformen werden.

Wir gehen zur „Transformation n^{ter} Ordnung“ über. Man versteht darunter den Uebergang von $F(\omega_1, \omega_2)$ zu

$$F' = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right),$$

wo $F(\omega_1, \omega_2)$ wiederum eine Function (Form, Modul) der ersten Stufe sei, die übrigens auch noch von u abhängen darf. Auch F' ist eine (algebraische) Function der n^{ten} Stufe.

Zunächst soll es sich darum handeln, die überlieferte Transformationstheorie ihrem Wesen nach mit den Hilfsmitteln des ersten Bandes zur Darstellung zu bringen. Es erweist sich als zweckmässig, mit der Transformation n^{ter} Ordnung eine lineare Transformation der ω_1, ω_2 zu verbinden und allgemeiner alle Formen

$$F\left(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \frac{\gamma\omega_1 + \delta\omega_2}{n}\right) = F(\omega'_1, \omega'_2)$$

als transformirte einzuführen. Man wird dann immer solche ω'_1, ω'_2, die bez. der Modulgruppe äquivalent sind, in eine „Klasse“ vereinigen; solcher Klassen giebt es dann $\psi(n)$. Dies ist der innere Grund, weshalb

zwischen F' und F eine irreducible Gleichung vom Grade $\varphi(n)$ mit in g_2, g_3 rationalen Coefficienten herrscht: das ist die zur Ordnung n gehörige „Transformationsgleichung".

Auch hier wird, wie bei der Theilung, von der functionentheoretischen und arithmetischen Behandlung in gleicher Weise Gebrauch gemacht. Unter arithmetischer Transformation n^{ter} Ordnung ist nach Dedekind (in nicht homogener Schreibweise) der Uebergang von ω zu

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \quad (ad - bc = n)$$

zu definiren. Die Gesammtheit dieser Transformationen zerlegt sich wiederum in „Klassen", deren Anzahl $\Phi(n)$ gleich der Summe aller Theiler von n ist.

Jede der $\psi(n)$ functionentheoretischen, wie der $\Phi(n)$ arithmetischen Klassen lässt sich durch einen geeigneten „Repräsentanten" ersetzen, und zwischen diesen beiden Arten von Repräsentanten besteht eine durchsichtige Zuordnung, die gestattet, von der einen Darstellung zur anderen überzugehen.

Im Uebrigen sei der Leser auf das wichtige Kapitel 3 verwiesen, worin die allgemeinen gruppentheoretischen Grundlagen für die Transformation n^{ter} Ordnung beliebiger Modulfunctionen (wesentlich vom Herausgeber herrührend) gegeben werden.

Die Form $F(\omega_1, \omega_2)$ wird nunmehr als Modul einer Hauptcongruenzgruppe q^{ter} Stufe (q prim gegen n) angenommen. Da tritt nun ein wesentlicher Unterschied ein, je nachdem die gemeinte Gruppe das Geschlecht Null hat oder nicht, d. h. je nachdem alle Moduln (Invarianten) der Gruppe von nur einem „Hauptmodul" F rational abhängen, oder aber von einem „vollen System von Moduln" M_1, $M_2 \ldots$, die dann unter sich wieder algebraisch verknüpft sind.

Da der letztere Fall den Hauptinhalt des letzten Abschnittes bildet, so kommt hier nur der erstere in Betracht; die Transformationsgleichung wird jetzt zur „Modulargleichung" n^{ter} Ordnung, q^{ter} Stufe.

Der einfachste und wichtigste Unterfall ist wiederum der der ersten Stufe, wo der fragliche Modul durch die absolute Invariante J gebildet wird, und wo zwischen J und J' die Modulargleichung n^{ter} Ordnung

$$f_n(J, J') = 0$$

besteht. Andererseits ist aber wohl zu beachten, dass gerade die gleichzeitige Berücksichtigung der Modulargleichungen verschiedener Stufen der ganzen Theorie erst ihre verhältnissmässige Durchsichtigkeit verleiht, und auch zu neuen Anwendungen geführt hat.

Die Gleichung $f_n(J, J') = 0$ lässt sich in verschiedene Gestalten bringen. Von Vortheil ist namentlich die Einführung von Parametern. So hat man für $n = 2$ das elegante Resultat:

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (4\tau + 1)^3 : (\tau + 1)(8\tau - 1)^2 : 27\tau \\ J' : J' - 1 : 1 &= (4\tau' + 1)^3 : (\tau' + 1)(8\tau' - 1)^2 : 27\tau' \end{aligned} \quad (\tau\tau' = 1).$$

In dieser Richtung haben neben Klein auch Gierster und Kiepert erfolgreich gearbeitet.

Von historischem Interesse ist, dass die Jacobi'schen Modulargleichungen für $\sqrt[4]{k}$ sich erst als solche von der 16. Stufe erweisen. Neben dieser wird noch die fünfte Stufe eingehend untersucht („Ikosaedermodulargleichungen").

Am fruchtbarsten ist das „Stufenprincip" für die Aufstellung der sogenannten „Klasenanzahlrelationen", welche merkwürdige Zusammenhänge zwischen einfachen zahlentheoretischen Functionen von Klassenanzahlen quadratischer Formen negativer Determinante wiedergeben. Um etwa die einfachste anzuführen, sei $H(\Delta)$ die Klassenanzahl (das ist die Anzahl aller reducirten Formen) für die Determinante $-\Delta$; die Zahl K durchlaufe alle positiven und negativen ganzen Zahlen des Intervalls zwischen $-2\sqrt{n}$ und $+2\sqrt{n}$; endlich bedeute $\Psi(n)$ den Ueberschuss der Summe derjenigen Theiler von n, die $>\sqrt{n}$ sind, über die Summe derer, die $<\sqrt{n}$ sind. Dann hat man:

$$\sum_K H(4n-K^2) = \Phi(n) + \Psi(n),$$

wodurch die Klassenanzahlen zu Theilersummen in Connex treten. Das ist eine der berühmten acht Relationen, die Kronecker 1857 mitgetheilt hat, und die zuerst von St. Smith bewiesen worden sind.

Eben die aufgeführte Relation nimmt hier die einfachste Stelle, nämlich als Klassenzahlrelation n^{ter} Ordnung erster Stufe ein. Bei ihrer Ableitung tritt schon die allgemeine Methode deutlich hervor. Aus der Modulargleichung $f_n(J, J') = 0$ entsteht für $J' = J$ die Gleichung $g_n(J) = 0$ für die sogenannten „singulären" Moduln (erster Stufe).

Die Anzahl der Nullstellen von $g_n(J)$ im Fundamentalbereiche führt auf arithmetischem Wege zu der obigen Summe von Klassenanzahlen; die ihr gleiche Zahl von Unendlichkeitsstellen führt auf functionentheoretischem Wege zu den obigen Theilersummen.

Auf Grund des Stufenbegriffes ist so Gierster über den Umfang der Kronecker'schen Relationen wesentlich hinausgegangen; die algebraischen Schwierigkeiten, welche ihm bei weiterem Verfolge die Modularcorrespondenzen boten, sind später von Hurwitz (siehe unten) principiell überwunden worden.

Im Texte wird als besonders instructives Beispiel die fünfte Stufe („Ikosaedermodulargleichungen") ausführlich entwickelt.

Mancher Leser wird wohl eine Angabe über die Stufeneinordnung sämmtlicher Kronecker'scher Relationen vermissen.

Im nächstfolgenden Abschnitte kann nun an die wichtige Aufgabe herangegangen werden, die zu den Congruenzgruppen gehörigen Moduln aufzustellen.

Zu dem Behuf erweist sich eine Hilfsvorstellung als fruchtbar, die nicht nur die Theilung und Transformation verschiedener Stufen unter ein-

heitlichem Gesichtspunkte erfasst, sondern noch tiefer liegende Eigenschaften der elliptischen Modulfunctionen sozusagen im Keime vorgebildet enthält.

Diese Hilfsvorstellung ist die der „elliptischen“ Curve (das ist einer solchen vom Geschlechte Eins) niedrigster, nämlich n^{ter} Ordnung im Raume von $(n-1)$ Dimensionen, über die das elliptische Integral erster Gattung u hinerstreckt wird.

Wählen wir als Typus den einfachsten Fall $n=3$, also den der ebenen Curve dritter Ordnung C_3, aus dem durch geeignete Verallgemeinerung die Vorkommnisse in den höheren Räumen hervorgehen.

Diese Normalcurve geht, den 2.3^2 Substitutionen

$$u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$$

entsprechend, durch 2.3^2 Collineationen der Ebene in sich über. Die Curve besitzt 3^2 „singuläre“ (Wende-)Punkte mit den Argumenten:

$$\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}.$$

Man hat zwei Coordinatensysteme, die zu den elliptischen Functionen in engster Beziehung stehen, das „canonische“ und das „singuläre“. Setzt man einmal die Coordinaten eines Curvenpunktes:

$$\frac{x_1}{x_0} = p(u), \quad \frac{x_2}{x_0} = p'(u),$$

so hat man

$$x_0 x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_0^2 x_1 - g_3 x_0^3$$

als „canonische“ Gleichung der Curve; solcher Darstellungen giebt es eben 2.3^2, jenen 2.3^2 Collineationen gemäss.

Bei einem gegebenen Coordinatensysteme der Art ist somit die Aufsuchung der „singulären“ Punkte äquivalent mit dem Problem der speciellen Theilung dritter Ordnung. — Das singuläre Coordinatensystem stützt sich unmittelbar auf die Configuration der neun Wendepunkte. Die Geraden, auf denen je drei dieser Punkte liegen, gruppiren sich zu vier $=\psi(3)$ Wendedreiecken. Wählt man ein solches als „singuläres“ Coordinatendreieck, so hat man die Hesse'sche Gleichung der Curve:

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + 6a X_0 X_1 X_2 = 0.$$

Dann ist der Uebergang vom canonischen Coordinatensysteme der x zum singulären der X wiederum äquivalent mit der Lösung der zur Ordnung 3 gehörigen „Transformationsgleichung“ vom Grade $\psi(3)$. Die Seiten eines singulären Coordinatendreiecks werden dargestellt durch Nullsetzen von drei Ausdrücken $X(x_0 x_1 x_2)$, die, in transcendenter Form geschrieben, zu Ausdrücken $X(u;\ \omega_1,\ \omega_2)$ werden, welche die Grundlage für die weitere Entwickelung abgeben.

Eine erste Klasse von Modulformen dritter Stufe, und zwar von sehr einfachem Aufbau, wird unmittelbar durch die Coefficienten der nach Potenzen von u geordneten X geliefert; mit anderen Worten sind es die

Nullwerthe der $X(u)$ und ihrer Ableitungen nach u, die mit den früher betrachteten Theilwerthen in engstem Connex stehen.

Bei Ausübung einer beliebigen homogenen Modulsubstitution erfahren die Grössen X selbst eine homogene lineare Substitution mit von u unabhängigen Coefficienten.

Die so entstehende „Gruppe" der X kann nach dem Vorgange von Kronecker holoedrisch isomorph auf sich bezogen werden, wenn man die in den Coefficienten auftretende dritte Einheitswurzel durch eine andere (bei beliebigem n primitive) dritte Einheitswurzel ersetzt.

Ebenso, wie die X selbst, kann man auch gewisse bilineare Verbindungen der X für $n > 3$ zur Bildung von Modulformen n^{ter} Stufe verwenden. Zu gewissen Verbindungen der Art leitet die Geometrie von selber hin. Die elliptische C_4 im Raume von drei Dimensionen ist der vollständige Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung F_2. Desgleichen die C_5 im nächst höheren Raume der vollständige Durchschnitt von fünf F_2 (für die der Referent gelegentlich eine explicite Darstellung gegeben hat), und allgemein die C_n der Schnitt von $\frac{1}{2}n(n-3)F_2$. Die linken Seiten der Gleichungen jener F_2 sind dann specielle bilineare Verbindungen der X von der gemeinten Art. Wegen der allgemeineren bilinearen Verbindungen muss auf den Text (Kapitel 3) selbst verwiesen werden.

Die aus diesen bilinearen Verbindungen der X entspringenden neuen Grössen n^{ter} Stufe, für die durchsichtige analytische Bildungsgesetze (Entwickelungen nach Potenzen von $e^{2i\pi\omega}$) angegeben werden, stehen in merkwürdiger Beziehung zu den binären quadratischen Formen, die ihren Ausdruck in gewissen Darstellungen von Zahlen durch jene Formen findet.

Auf Grund des so gewonnenen Materiales, der Theilwerthe, der transformirten Moduln und der aus den Grössen X hervorgehenden neuen Modulformen sind die Verfasser in der Lage, das functionentheoretische Grundproblem für Congruenzgruppen zu einem gewissen Abschluss zu bringen. War nämlich im ersten Bande die Bildung der zugehörigen Functionen mittelst Riemann'scher Schlussreihen explicite nur bis zur Stufe $n = 7$ ausführbar gewesen, so bieten sich jetzt allgemeine Ansätze dar, und die von Herrn Fricke durchgeführten Fälle ($n = 2, 4, 5, 7, 11, 31, 35, 47, 71$) lassen — namentlich auch im Gegensatze zu bisher derart, z. B. von Herrn Kiepert ausgeführten Rechnungen — erkennen, bis zu welchem Grade die Einfachheit und Schönheit im Gange der mechanischen Operationen durch die systematische Auffassung des Ganzen beeinflusst wird.

Der letzte Abschnitt, der von den „Modularcorrespondenzen" handelt, dehnt die Entwickelungen des vierten Abschnittes über Modulargleichungen auf den Fall aus, dass das Geschlecht p der bez. Congruenzgruppe von Null verschieden ist, wo also ein volles System von Moduln vorhanden ist, durch die sich alle übrigen rational ausdrücken.

Zwischen den Moduln eines solchen Systemes und ihren Transformirten besteht eine algebraische Abhängigkeit, die sich eben als Correspondenz auf einer in einem höheren Raume gelegenen Curve vom Geschlechte p darstellen lässt. Es handelt sich in erster Linie darum, die Transformation n^{ter} Ordnung, welche in transcendenter Gestalt die höchst einfache Form $\omega' = n\omega$ besitzt, in geeigneter Weise ins Algebraische zu übersetzen.

Nun gehört nach Klein'schen Principien zu jeder Congruenzgruppe als Repräsentant (bez. der Gruppe nichtäquivalenter Werthe von ω) ein „Fundamentalpolygon", welches sich wiederum durch Zusammenbiegen entsprechender Ränder zu einer Riemann'schen Fläche F umgestaltet. Einem Punkte ω resp. ω' entspreche ein Punkt x resp. y der Fläche. Dann sind vermöge der Transformation n^{ter} Ordnung, wie wir von früher her wissen, jedem Punkte x $\psi(n)$ Punkte y zugeordnet und umgekehrt, das heisst, es besteht zwischen beiden eine (ψ, ψ)-deutige Correspondenz.

Die algebraische Darstellung dieser Correspondenz ersetzt vollkommen den algebraischen Zusammenhang zwischen dem oben erwähnten Systeme voller Moduln und ihrer Transformirten.

Der algebraischen Darstellung der gemeinten Correspondenz lassen sich sehr verschiedene Formen geben; eine der bemerkenswerthesten unter ihnen ist diejenige, die seit Legendre und Jacobi als „irrationale Modulargleichung" aufgetreten ist, die hier erst die ihr zukommende Stellung innerhalb der Theorie angewiesen erhält.

Mit ähnlichen Correspondenzen $(x, y) = 0$ (auf ebenen, algebraischen Curven vom Geschlecht p) hatten sich schon seit Chasles die Geometer eingehend beschäftigt, immer aber unter der Voraussetzung, dass die fragliche Correspondenz auf der Curve durch eine einzige algebraische Gleichung vermittelt wird. Die Hauptfrage ist dann die nach den Stellen, wo ein Punkt x mit einem Punkte y „coincidirt"; sie findet ihre Lösung durch eine einfache Formel, welche für $p = 0$ von Chasles gegeben, für beliebiges p von Cayley aufgestellt, und bald darauf von Brill bewiesen wurde. Herr Brill hat erst neuerdings einen auf rein algebraischer Grundlage beruhenden Beweis veröffentlicht.

Die Wichtigkeit der „Coincidenz-Formel" erhellt aus zahllosen geometrischen Anwendungen: insbesondere gelingt mit ihrer Hilfe eine einwandfreie Herleitung der sogenannten „Plücker'schen" Formeln.

Die Cayley-Brill'sche Formel ist aber gerade auf den in Rede stehenden Fall der Modularcorrespondenzen nicht anwendbar, da sich eine solche eben nicht durch eine einzige Gleichung zwischen x und y darstellen lässt.

Hurwitz sah sich daher veranlasst, die Correspondenzen, die es auf einer Riemann'schen Fläche im Sinne der Theorie der analytischen Functionen überhaupt geben kann, functionentheoretisch zu untersuchen.

Dabei stellte sich das merkwürdige Ergebniss heraus, dass es zwei wesentlich verschiedene Arten von Correspondenzen giebt: einmal die, für

welche die Cayley-Brill'sche Formel, mit noch einer gewissen Erweiterung ausgestattet, gilt, sodann aber die sogenannten „singulären" Correspondenzen, welche nur auf besondern „singulären" Riemann'schen Flächen (oder Curven) möglich und durch ein System arithmetischer Bedingungen definirbar sind. Für diese singulären Correspondenzen, zu denen auch die Modularcorrespondenzen gehören, existirt eine weniger einfache Coincidenzformel.

Die Coincidenzformel wird in beiden Fällen auf Grund der zur Fläche gehörigen Integrale erster Gattung abgeleitet, indem die Null- und Unendlichkeitspunkte eines Quotienten von Θ-Producten auf verschiedene Weise abgezählt werden.

Dem Charakter des ganzen Werkes entsprechend wird die Hurwitz-sche Correspondenztheorie auf formentheoretische Anschauungen gegründet, wobei sich zugleich Gelegenheit findet, die im ersten Band entworfenen Grundzüge einer Theorie der algebraischen Functionen auf beliebigen Riemann'schen Flächen F in einer Reihe wesentlicher Punkte zu ergänzen und zu einem gewissen Abschluss zu bringen.

Irgend eine zu F gehörige algebraische Function z wird gleich $z_1 : z_2$ gesetzt, und auf diese homogenen Variabeln z_1, z_2 gründet sich die Darstellung der übrigen Grössen des Gebildes, insbesondere auch solcher homogener Functionen der z_1, z_2, deren Dimension nicht Null ist.

Ist w eine algebraische Function des Gebildes, so heisst $w . z^{\nu}_2$ eine zu F gehörige „algebraische Form der Dimension ν", wo ν eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Unter all' diesen Formen sind die wichtigsten die „ganzen", welche auf F nirgends unendlich werden.

Der Fundamentalsatz der weiteren Entwickelung ist dann der, dass es, in gewisser Analogie zu der Weierstrass'schen Primfunction, eine „Primform" giebt, durch die sich alle algebraischen Functionen von F, sowie die zugehörigen Integrale der drei Gattungen in einfacher Weise darstellen lassen.

Dieses Princip findet seine Anwendung einmal auf die Riemann'schen Flächen, welche zu Congruenzgruppen (von Primzahlstufe) gehören, und hier wiederum insbesondere auf die Integrale erster Gattung j, andererseits auf eine explicite algebraische Darstellung der Modularcorrespondenzen, mit Ausführung des Beispiels der siebenten Stufe. Die Integrale j führen bei dieser Behandlung nach Hurwitz zu merkwürdigen arithmetischen „Entwickelungsfunctionen".

Vermöge einer so vielseitigen Begründung der Modularcorrespondenzen hält es nun im Princip nicht schwer, die zu einer beliebigen Primzahlstufe gehörigen Systeme von Klassenanzahlrelationen wie früher anzusetzen. Ein solches System, bei gegebener Stufe und Transformationsordnung, hat die Eigenschaft, dass jede weitere mögliche Klassenanzahlrelation als lineare

Combination der Relationen des Systems erscheint. Als Beispiele dienen die Stufen 7 und 11.

Referent ist der Meinung, dass ein nicht ganz unbewanderter Leser, ehe er an das Einzelstudium dieses so ungemein inhaltsreichen Bandes geht, um über die Hauptziele der Untersuchung schneller orientirt zu werden, vorab einige der Originalabhandlungen mit Nutzen zu Rathe ziehen wird. Es seien als solche etwa angeführt die von Klein (Mathem. Ann. 14, 17; Leipzig. Abhandl. 1885); Gierster (Mathem. Ann. 17); Dedekind (Journal f. Mathem. 1883); Hurwitz (Dissertation und Leipz. Ber. 1886).

Im Uebrigen sei betont, dass wir auf ganze Partien des Buches (über complexe Multiplication, über die Smith'schen Methoden u. A.), die namentlich für den Arithmetiker von Interesse sind, gar nicht haben eingehen können.

W. Franz Meyer.

Ch. Méray. **Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques.** Première partie. Principes généraux. Paris 1894. Gauthier-Villars. XXXIII und 405 S.

Man könnte in Deutschland fast neidisch sein auf die französischen Lehrbücher der Analysis. Denn bei der fortwährenden Concurrenz auf diesem Gebiete, an der sich die ersten Namen betheiligen, ist jeder Verfasser eines neuen Werkes genöthigt, sei es durch eigene Forschungen, sei es durch eigenartige Anordnung und Verarbeitung des Stoffes, die Vorgänger zu übertreffen.

Herr Méray hat sich durch eine ansehnliche Reihe von grössten Theils analytischen Arbeiten — deren Verzeichniss gleich in der Vorrede dem Leser vorgeführt wird — so vortheilhaft bekannt gemacht, dass man auch hier etwas Besonderes von ihm erwarten kann. Man kann bald erkennen, dass der Verfasser von der Weierstrass'schen Schule stark beeinflusst worden ist, dass er aber sein berühmtes Vorbild an Abstraction noch zu überbieten sucht.

Referent muss von vornherein bekennen, dass er einen principiell anderen Standpunkt einnimmt; wenn der Verfasser ausdrücklich betont, dass er stolz darauf sei, dem Anfänger die allgemeinen Eigenschaften der Functionen rein, das heisst unbeirrt von irgend welchen Einzelheiten vorzutragen, so ist dieser Standpunkt doch sehr anfechtbar. Referent hat seiner Zeit nebst ca. 200 Zuhörern die „einleitende“ Vorlesung von Herrn Weierstrass über „analytische Functionen“ gehört, kann aber auf Grund seiner persönlichen Erfahrungen nur gestehen, dass der bildende Erfolg, im Verhältniss zu der starken Höreranzahl, nicht der entsprechende war.

Gerade die bedeutendsten der französischen Mathematiker sind aus der praktischen Schule der Ingenieure hervorgegangen, und eben hierin dürfte

der Grund liegen, dass jene sich eines so klaren und anschaulichen Styles befleissigen.

Ueberdies scheint es für die heutige Mathematik weit nothwendiger, sich den Naturwissenschaften und der Technik wieder zu nähern, anstatt einem scholastischen Dogmatismus zu verfallen. Referent möchte indess nicht missverstanden werden: er will gern zugeben, dass ein Buch, wie das vorliegende, einem Studirenden gegen Ende seiner Studienzeit, oder noch besser, nach bestandener Staatsprüfung, wo er das Bedürfniss hat, das Gelernte von einem höheren Standpunkt aus zu revidiren, die besten Dienste leisten wird. Ein Lehrer wird vollends Vieles daraus lernen können. Und damit seien auch gleich die grossen Vorzüge des Buches hervorgehoben: die Diction ist, in Anbetracht des schwierigen Stoffes, eine tadellos klare, und der Leser wird auf gedrängtem Raume mit einer Reihe der schwierigsten Partien der Analysis vertraut gemacht. Seine bekannte Neigung, für bekannte Begriffe neue Namen einzuführen, hätte der Verfasser füglich etwas einschränken können.

Der Inhalt des Bandes zerlegt sich, abgesehen von einigen einleitenden Abschnitten, in 13 Kapitel.

Nach Erörterung der verschiedenen Modificationen, welche der Begriff der „Grösse" durchlaufen kann, ist der erste, sehr knapp gefasste Hauptabschnitt den Reihen, insbesondere den Potenzreihen gewidmet, auf denen das Folgende ausschliesslich aufgebaut ist.

Das über Convergenz Vorgebrachte scheint für feinere Untersuchungen nicht ganz hinreichend zu sein.

Es folgt die Erörterung der Haupteigenschaften der (in gegebenen Bereichen) holotropen Functionen, ihrer Differentiation und Integration.

Zwei weitere Abschnitte beschäftigen sich mit den totalen und partiellen Differentialgleichungen und Systemen solcher, in der Hauptsache nur mit dem Existenzbeweise für deren Integrale.

Es wird dem Leser schwer, zu erkennen, welches die Stellung dieser Beweise zu den sonst bekannten ist: überhaupt sind die historischen Bezugnahmen des ganzen Bandes äusserst dürftige; man erhält beinahe den Eindruck, als ob die ganze Functionentheorie ein Erzeugniss des Verfassers sei.

Immerhin ist das Buch als ein höchst eigenartiges und fesselndes zu bezeichnen: die Einwände des Referenten sind ja auch nur pädagogischer Natur. Richtiger freilich hätte der Titel heissen sollen: „Refléxions nouvelles sur les principes de l'Analyse inf." Man darf gespannt sein, wie die Methode des Verfassers, immer nur die ganz allgemeinen Gesichtspunkte hervorzukehren, in den folgenden Bänden Stich halten wird, in denen die besonderen Functionen zur Darstellung kommen sollen. Bis dahin möge die Beurtheilung des Referenten auch nur als eine vorläufige angesehen werden.

W. Franz Meyer.

G. Arnoux. **Arithmétique graphique.** Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris 1894. Gauthier-Villars. XXIII und 175 S.

Das Buch ist für Solche geschrieben, die sich für mathematische Absonderlichkeiten — denn als das möchte doch die Theorie der namentlich in früheren Jahrhunderten mit Vorliebe studirten magischen Quadrate, und ähnlicher Erscheinungen aufzufassen sein — interessiren.

Um den Leser zu orientiren, sei erwähnt, dass unter einem magischen Quadrat zu verstehen ist eine schachbretartige Figur von n^2 Feldern, die mit den n^2 ersten natürlichen Zahlen so bedeckt sind, dass die Summe aller Felder je einer Horizontal-, oder Vertical-, oder Diagonalreihe einen und denselben Werth s besitzt.

Hierüber lässt sich noch hinausgehen: denkt man sich etwa die Figur als Determinante entwickelt, so repräsentirt jedes Glied der Determinante eine „Richtung", und man kann verlangen, dass die Summe s insbesondere für ein Maximum von Richtungen constant ist. Das sind dann die hypermagischen Quadrate.

Der Verfasser verfehlt nicht, gleich die n-dimensionalen Verallgemeinerungen (mittelst der sogenannten Gitter) hinzuzufügen. Hierdurch erscheint die ganze Frage als eine specielle Anwendung der Diophantschen Gleichungen resp. linearen Congruenzen. Schon daraus z. B., dass man die Zahlen $1, 2, \ldots n^2$ durch ein äquivalentes Restsystem $\bmod m$ ersetzt, kann man interessante Folgerungen ziehen.

Der Verfasser begnügt sich, die mathematischen Grundlagen der hier in Betracht kommenden Aufgaben zu erörtern und einzelne Fälle auszuführen. Eine allgemeine und vollständige Lösung der Aufgaben wird nicht gegeben.

W. Franz Meyer.

Differential- och Integral-Kalkylens. Användning vid Undusökning of Linier i Rymden och Bugtiga Ytor of H. T. Daug. Professor vid Upsala Universitet. Upsala. W. Schultz.

Der erste Theil des vorliegenden Werkes ist bereits im Jahre 1877 erschienen. Derselbe enthält zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Raumcurven, sowie die Darstellung einer Curve durch verschiedene Coordinatensysteme, Ableitung der Gleichung der Tangente, Osculations-Ebene und Kugel und Bestimmung des Krümmungskreises. Sodann folgt eine Untersuchung der krummen Flächen. Hier wird zunächst die Darstellung der Flächen durch ein Netz von Curven gegeben und dann die Bedeutung der Indicatrix für eine Fläche ausführlich auseinander gesetzt; es folgen die Theoreme von Euler und Meusnier und schliesslich die Krümmung der Flächen und die Krümmungslinien.

Der zweite Theil des Werkes ist aus dem handschriftlichen Nachlass des Verfassers von Herrn M. Falk, der bereits bei der Herausgabe des

ersten Theiles mitgewirkt hat, der Oeffentlichkeit übergeben worden. Er enthält eine specielle, sehr eingehende Behandlung der gradlinigen Flächen. Weiter auf Einzelheiten einzugehen ist wohl nicht erforderlich, da die Kenntniss der schwedischen Sprache verhältnissmässig wenig verbreitet ist und da ja auch gründliche deutsche Arbeiten über dieses Gebiet vorhanden sind.

Max Meyer.

Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Bearbeitet von Oberlehrer Dr. Hugo Fenkner. Pensum der Untertertia, Obertertia und Untersekunda der neunstufigen, bezw. der Tertia, Sekunda und Prima der sechsstufigen Anstalten. Zweite, auf Grund der preussischen Lehrpläne vom Januar 1892 ausgearbeitete Auflage. Braunschweig 1894. Verlag von Otto Salle.

Diese Sammlung arithmetischer Aufgaben stützt sich bei ihrer Anlage auf die Ausführungen Krumme's über den algebraischen Unterricht. Der Schüler soll von vornherein zum selbstständigen Denken angeregt werden, und daher nehmen die rein mechanischen Rechenaufgaben einen verhältnissmässig geringen Theil des Werkes ein; deshalb sind auch übermässig complicirte Rechnungen, welche einen zu grossen Zeitaufwand erfordern, vermieden. Der Nachdruck ist auf die Anwendungen gelegt, welche häufig aus anderen Unterrichtsgebieten, wie aus der Physik, Geometrie und Chemie, gewählt worden sind. Hierdurch wird dem Schüler Gelegenheit geboten, seine Kenntnisse in diesen Gebieten zu befestigen. Den Aufgaben gehen die zu ihrer Lösung nöthigen Lehrsätze voraus; indessen werden dieselben nicht immer streng bewiesen, sondern häufig nur an einzelnen Zahlenbeispielen erläutert, so dass das Werk ein Lehrbuch der Algebra nicht ersetzen kann. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass in Folge der neuen Lehrpläne die Abschnitte über Reihen und Zinseszinsrechnung weggelassen sind, wogegen die Anzahl der Uebungsbeispiele vermehrt wurde.

Max Meyer.

Ableitung der verschiedenen Formen der Curven dritter Ordnung durch Projection und Klassification derselben. I. Von Professor Dr. Friedrich Köhnel. Beilage zu dem Programm des Realprogymnasiums Ettenheim für das Schuljahr 1893/94. Ettenheim 1894. Druck von F. H. Leibold.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, eine Klassification der Curven dritter Ordnung durch perspective Collineation aus divergirenden Parabeln abzuleiten. Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung derselben in homogenen Coordinaten. Die Parabeln werden nach den Werthen gewisser

Invarianten in Gruppen eingetheilt und aus diesen durch lineare Transformationen die Curven dritter Ordnung abgeleitet. Die geometrischen Eigenschaften der Curven werden nur als Resultate der Untersuchung angegeben, während auf eine Ableitung derselben verzichtet wird. Der vorliegende Theil behandelt übrigens nur die Curven mit Oval; die übrigen sind einer späteren Abhandlung vorbehalten.

Max Meyer.

Geometrische Analysis und Synthesis. Eine Sammlung von 636 planimetrischen Constructions-Aufgaben mit rein geometrischer Lösung. Für höhere Lehranstalten, sowie zum Gebrauch beim Selbstunterricht systematisch geordnet und bearbeitet von W. Adam. Zweite Auflage. Potsdam 1893. Verlag von Aug. Stein.

Nach einer kurzen Auseinandersetzung über das Wesen der Construction bringt das vorliegende Werk eine Sammlung geometrischer Aufgaben, bei denen theils die Lösung vollständig ausgeführt, theils nur die Construction angegeben ist. Hauptsächlich dürfte dasselbe für Diejenigen geeignet sein, welche auf Selbstunterricht angewiesen sind, denen es zur Lösung geometrischer Aufgaben eine gute Anleitung geben wird. Zur Einführung an Lehranstalten ist dasselbe wohl weniger geeignet, da der Lehrer es vorziehen wird, den Schülern selbst diejenigen Andeutungen zu geben, die er zur Lösung der Aufgaben für erforderlich hält.

Max Meyer.

Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope. Von Dr. Max Brückner, Realgymnasialoberlehrer. Sonderabdruck aus dem Jahresberichte des Vereins für Naturkunde zu Zwickau. 1893.

Die nichteuklidische Geometrie ist in den letzten Jahrzehnten zu einem ausgedehnten Gebiet der Mathematik herangewachsen, so dass es wohl angebracht erscheint, dem Nichtfachmanne einen Einblick in dieselbe zu verschaffen. Speciell diese Aufgabe hat sich der Verfasser für die Theorie des vierdimensionalen Raumes gestellt. In einer Einleitung giebt er zunächst einen Abriss der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie und erörtert hierbei auch die Frage nach ihrer Berechtigung. Den Hauptmangel derselben erkennt er richtig in dem Fehlen der Anschaulichkeit, und er weist treffend alle Versuche zurück, unseren Raum durch einen vierdimensionalen ersetzen zu wollen. Die nichteuklidische Geometrie ist eine rein logische Wissenschaft und nur als solche hat sie eine Berechtigung. Trotzdem kann der Verfasser der Versuchung nicht widerstehen, dieselbe gelegentlich zu doch sehr zweifelhaften metaphysischen Speculationen zu benutzen, indem er sein Werk mit dem Satze Schlegel's schliesst: „Wenn hiernach der Geist durch rein logische Operationen mit Nothwendigkeit

dazu geführt wird, die Schranken der Anschauung zu durchbrechen und die Existenz (dies Wort in demselben Sinne gebraucht, wie man von der Existenz von Punkten, Geraden und Ebenen spricht) von Gebilden anzuerkennen, von denen er sich, gefangen mittelst des Leibes in den Fesseln der dreidimensionalen Anschauung, zwar keine Vorstellung machen kann, deren genaue Abbildungen aber im dreidimensionalen Raume er ebenso gut wahrnimmt wie andere Erscheinungen der Körperwelt, so scheint hieraus zu folgen, erstens, dass uns nur die Verbindung unseres Geistes mit der dreidimensionalen (oder, was genau dasselbe ist, materiellen) Körperwelt an der sinnlichen Wahrnehmung und geistigen Vorstellung höher dimensionirter Gebilde hindert, zweitens, dass unser Geist, da er eben vermöge innerer, von der Körperwelt unabhängiger Thätigkeit sich von den Fesseln des Dreidimensionalen emancipiren kann, seiner Natur nach wesentlich immateriell sein muss, und, für sich allein ohne den Leib gedacht, an kein Gebiet von bestimmter Dimensionenzahl gebunden ist."

In den ersten beiden Abschnitten werden in synthetischer und analytischer Weise die Elemente des vierdimensionalen Raumes abgeleitet, während in den übrigen (dritten bis fünften) die Eigenschaften der Polytope dargelegt werden. Zunächst die Projection der Polytope, der erweiterte Euler'sche Satz, sodann die Eintheilung der allgemeinen und singulären Polytope, sowie schliesslich die Klassification der regulären Polytope. Ganz dürfte die Arbeit ihren Zweck nicht erfüllen, denn wenn man ein so schwieriges Gebiet in allgemein verständlicher Weise darstellen will, so müssen die Beweise möglichst ausführlich und klar gegeben werden, während wir uns hier doch häufig mit Andeutungen begnügen müssen. Zum Theil wird diesem Mangel allerdings dadurch abgeholfen, dass durch ausführliche Literaturangabe Demjenigen, der sich dafür interessirt, ein eingehendes Studium dieses Gebietes ermöglicht wird.

Max Meyer.

---

1. Professor Dr. Th. Spieker. **Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben** für höhere Lehranstalten. Ausgabe A, welche in dem Theil über die Congruenz der Dreiecke einige Abänderungen erfahren hat;
   Ausgabe B, für mittlere Klassen, welche die beiden ersten Curse des Hauptwerkes enthält;
   Ausgabe C, abgekürzter Cursus für Gymnasien.
2. Derselbe, **Kurze Anleitung zum Lösen der Uebungsaufgaben** des vorgenannten Lehrbuchs.
3. Derselbe, **Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie mit Uebungsaufgaben** für höhere Lehranstalten.
4. Dr. Hermann Schubert. **Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben**, verbunden mit einem systematischen

Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen. Erstes Heft: Für mittlere Klassen.

5. Dr. Hermann Schubert, **Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra** für Real- und Bürgerschulen. Heft I und II.

6. Derselbe, **Ausgewählte Resultate** zu beiden Heften.

Da die hier genannten, in neuen Auflagen erschienenen Werke sich seit einer Reihe von Jahren in der Praxis bewährt haben, so bedürfen sie wohl keiner eingehenderen Besprechung.

Max Meyer.

Le scienze esatte nell' antica Grecia di Gino Loria, Prof. di geometria superiore nell' università di Genova. Libro II. **Il periodo aureo della geometria greca**. Modena 1895 coi tipi della Società tipografica, antica tipografia Soliani, 236 p. Estratto dol Vol. XI, Serie II delle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettre ed Arti di Modena. Sezione di Scienze, p. 3—237.

Wir verweisen für den ersten Abschnitt des Werkes unseres italienischen Fachgenossen auf Band 39 dieser Zeitschrift, wo wir, Hist.-lit. Abth. S. 184—185, darüber berichtet haben. Wir müssten eigentlich auch auf Band 36, Hist.-lit. Abth. S. 29—30, verweisen, wo Herrn Loria's Abhandlung über das goldne Zeitalter der griechischen Geometrie besprochen ist, welche zu dreifacher Ausdehnung angewachsen, heute unter gleicher Ueberschrift als Fortsetzung des umfangreicheren Werkes vor uns liegt. Wir haben bei dem ersten Abschnitte ein erfolgreiches Streben nach Vollständigkeit hervorheben dürfen. Des gleichen Lobes ist auch der zweite Abschnitt würdig. Herr Loria kennt Alles, was nur über den Gegenstand seiner Forschung geschrieben worden ist, und hat es nach Maassgabe seiner übereinstimmenden oder nicht übereinstimmenden Ansichten zu verwerthen gewusst. Zu den Schriftstellern, welchen Herr Loria eine grosse Sympathie entgegenbringt, gehört Herr Zeuthen. Allerdings hindert ihn dieses Wohlwollen nicht, auf S. 218 zuzugeben, dass Herr Zeuthen, ausser Stande, seine geometrische Phantasie zu zügeln, vielfach Eigenes gab, um die nur allzu zahlreichen Lücken in unserem Wissen von den Methoden der Griechen (dass sie solche besessen haben müssen, leugnet Niemand) auszufüllen. Dass geschichtliche Stützen für diese Ausfüllungen fehlen, erklärt Herr Loria damit, dass der geistreiche Koppenhagner Geometer entweder sich nicht bemühte, eine gesicherte geschichtliche Grundlage aufzusuchen, oder keine solche aufzufinden im Stande war. Wir sind der Meinung, das Entweder sei hier zu streichen und nur das Oder zu lassen. Wir persönlich verlangen aber geschichtliche Begründung für geschichtliche Vermuthungen und können uns daher mit der zu weit getriebenen Modernisirung des Apollonius nach wie vor nicht befreunden. Glücklicherweise beeinflusst diese ziemlich ver-

schiedene Werthschätzung eines unserer Zeit angehörenden Werkes nur wenige Stellen von Herrn Loria's Buch. Meistens sind Auszüge, und zwar vortrefflich angefertigte Auszüge aus den alten Schriftstellern, also insbesondere aus den vier Mathematikern des goldenen Zeitalters: Euklid, Archimed, Eratosthenes, Apollonius, gegeben. Wo blosse Vermuthungen ausgesprochen sind, kennzeichnet Herr Loria dieselben als solche, und der Leser ist dadurch in den Stand gesetzt, selbst zu prüfen und sich für oder gegen das Vorgeschlagene zu entscheiden. Wir halten deshalb auch den zweiten Theil der grossen Arbeit für einen entschiedenen Fortschritt gegen frühere Arbeiten und freuen uns auf die Fortsetzung.

Cantor.

Galilei betreffende Handschriften der Hamburger Stadtbibliothek. Von Dr. Emil Wohlwill (aus dem Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. XII). Hamburg 1895. Commissions-Verlag von Lucas Gräfe & Sillem. 77 S.

Mathias Bernegger (1582—1640) stand zu den bedeutendsten Gelehrten seiner Zeit in Beziehungen, mit vielen in eifrigem Briefwechsel, und die Entwürfe von nahezu 500 seiner Briefe haben sich in zwei Quartbänden erhalten. Diese kamen zuerst in den Besitz des Frankfurter Sammler's Zacharias Konrad von Uffenbach (1683—1734); dann, als er um 1731 sich aus Geldverlegenheit seiner Bücher mit Ausnahme der Francofurtensien entäussern musste, kaufte der Hamburger Philologe Johann Christoph Wolf die hebräischen Handschriften und etwa 20000 Briefe, darunter Bernegger's Entwürfe. So kamen diese nach Hamburg, wo sie gegenwärtig der Stadtbibliothek angehören. Wir haben von Bernegger's Beziehungen gesprochen. Zu Galilei waren es die eines Uebersetzers. Schon 1612 machte Bernegger Galilei's Proportionalzirkel in lateinischer Sprache bekannt, dann gab er 1635 in der Elzevir'schen Buchhandlung die lateinische Uebersetzung von Galilei's Gesprächen über die Weltsysteme heraus. Der recht schlechte Druck fand in Strassburg, wo Bernegger wohnte, durch David Hautt statt. Ueber diese letztere Uebersetzung wusste man, dass Elia Diodati Bernegger zur Anfertigung derselben aufgefordert hatte und zwar im Namen und Auftrage Galilei's. Man wusste, dass das zu übersetzende Buch am 1. August 1633 in Strassburg ankam. Wann aber hat Galilei die Uebersetzung veranlasst? War es vor oder nach dem 22. Juni 1633, vor oder nach Galilei's Abschwörung der Coppernikanischen Ansichten? Diese Frage zu beantworten dienen Briefe aus dem Bernegger'schen Briefwechsel. Herr Wohlwill, dessen Betheiligung an der Erforschung aller zum Galilei-Process gehörenden Umstände jedem Fachgenossen rühmlichst bekannt ist, hat die beiden Bände der Hamburger Stadtbibliothek gründlich untersucht und alle Stellen, welche irgend mit Galilei und dessen Schriften sich befassen, gesammelt und im

Drucke herausgegeben. Vieles davon ist schon gedruckt, aber so zerstückelt und unvollständig, dass eine Vereinigung des ganzen Materials nur mit Dank begrüsst werden kann. Noch dankenswerther ist die dem Abdrucke der im Ganzen 101 Nummern vorausgeschickte Einleitung. Herr Wohlwill sucht darin nachzuweisen, dass die Aufforderung Galilei's, Bernegger möge die Gespräche über die Weltsysteme übersetzen, spätestens Ende Juni 1633 von Rom aus erfolgt sein könnte, was aber aus inneren Gründen höchst unwahrscheinlich ist, dass unter Abweisung dieses letzten möglichen Zeitpunktes die Wahrscheinlichkeit dafür spricht, Galilei habe Mitte Januar 1633 den Wunsch nach einer Uebersetzung geäussert, mithin zu einer Zeit, als er noch nicht versprochen hatte, jede weitere Veröffentlichung über die Weltsysteme zu unterlassen, und alle späteren Schritte habe Diodati selbstständig gethan, ohne auch nur von der in Rom eingetretenen Katastrophe Kenntniss zu haben. Als die Verurtheilung Galilei's bekannt wurde, war sie dann für Diodati wie für Bernegger nur ein Grund mehr, die Uebersetzung des jetzt verbotenen Buches zu beschleunigen. Diese Auffassung schliesst nicht aus, dass, als Galilei um die Jahreswende von 1633 auf 1634 durch Engelke erfuhr, dass die Uebersetzung stattfinde, er sich darüber freute (vergl. den Brief Nr. 33 S. 40 von Engelke vom 1. Mai 1634). Geht doch auch das Gleiche aus dem längst bekannten Briefe Galilei's an Bernegger hervor (Brief Nr. 46 S. 46—47), in welchem Galilei die kirchliche Verurtheilung seiner Ansichten erwähnt, offenbar mehr in der Absicht, zur Ausgabe der Uebersetzung anzueifern als sie zurückzuhalten.

Cantor.

A History of Mathematics by Florian Cajori, Ph. D., formerly Professor of applied mathematics in the Tulane University of Louisiana, now Professor of physics in Colorado College. New-York and London 1895. Macmillan and Co. XIV, 422 p. (Set up and electrotyped January 1894. Reprinted March 1895.)

Wenn ein im Januar 1894 erstmalig gedrucktes Buch bereits im März 1895 neu gedruckt werden muss, so zeugt dieses von einer Aufnahme des Werkes, wie sie wissenschaftlichen Schriften nur selten zu Theil wird, und die ihren Grund in der Vortrefflichkeit des Buches oder auch in seiner Zeitgemässheit besitzen kann. Wenn wir Herrn Cajori's Geschichte der Mathematik nach diesem Maassstabe beurtheilen, so haben wir allerdings das Wort Vortrefflichkeit etwas herabzumindern. Schon im Maiheft 1894 des *Bulletin of the New-York Mathematical Society* hat Herr David Eugene Smith in einer ausführlichen Besprechung auf Irrthümer hingewiesen, welche alsdann in einem von der Macmillan'schen Verlagshandlung verbreiteten Fehlerverzeichnisse verbessert wurden und aus dem Neudrucke verschwunden sind. Aber auch der Neudruck hat in Herrn Eneström (*Bibliotheca mathematica* 1895 p. 55 — 60) einen Berichterstatter

gefunden, der Irrthümer aufzudecken fand. Vielleicht macht uns persönlich das Bewusstsein, wie leicht und oft bei grösseren geschichtlichen Werken Fehler sich einschleichen, die der Verfasser hätte vermeiden können, wenn es ihm möglich gewesen wäre, eben so rasch zu schreiben als Andere lesen und dadurch stets Alles vor seinem geistigen Auge vereinigt zu sehen, vielleicht, sagen wir, macht uns dieses Bewusstsein milder, aber uns scheinen die Vorzüge des Buches die Mängel so sehr zu übersteigen, dass wir sagen möchten, es sei heute schon ein gutes Buch und könne ein vortreffliches werden, wenn der Verfasser fortfährt, alle ihm zugehenden Berichtigungen gewissenhaft einzutragen, zugleich aber die Frische der Schreibart, die Hervorhebung der Beziehung der Geschichte der Mathematik zur Allgemeingeschichte (für welche wir ihn möglicherweise als unseren Schüler bezeichnen dürfen) sich bewahrt. Auch Herr Smith und Herr Eneström haben diese guten Eigenschaften bemerkt und betont. Einen ferneren Wunsch knüpfen wir an die Darstellung der neuesten Geschichte, in welcher Herr Cajori selbstständiger als in den anderen Theilen gearbeitet hat. Er möge bei einer abermaligen Ueberarbeitung etwas schärfer auf die Zeitfolge aufpassen. Wir ersparen es uns, einzelne Beispiele hervorzuheben, aber Herr Cajori wird nur selbst mit der Feder in der Hand die einzelnen Kapitel zu durchlesen haben, um zu finden, dass eine Umordnung einzelner Schriftsteller, oder einzelner Werke derselben wünschenswerth erscheint.

Cantor.

Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik, Theil III. Der Streit über die Definition des Tones. Von Dr. Ernst Robel, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Louisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin. Ostern 1895 [Programm Nr. 98]. Berlin 1895. R. Gaertner's Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 32 S.

Für den II. Theil der Untersuchungen verweisen wir auf Band 40 dieser Zeitschrift, Historisch-literarische Abtheilung S. 61. Der III. Theil giebt seinen Inhalt durch die Ueberschrift mit hinreichender Deutlichkeit zu erkennen. Der Streit über die Definition des Tones, wie er zwischen Ohm und Seebeck geführt wurde, über den beide grosse Physiker wegstarben, wird unter eingehendem Berichte über die beiderseitigen Streitschriften erzählt. Es handelte sich darum, ob, wie Ohm wollte, jede Tonempfindung nach Gliedern einer Sinusreihe in Tonbestandtheile zerlegbar sei, ob, wie Seebeck behauptete, auch andere Formen von Tonempfindungen nachweisbar seien, die eine Zerlegung nach Art der Fourier'schen Reihe nicht zulassen. Seebeck schien aus dem lebhaft, wenn auch leidenschaftslos geführten Kampfe als Sieger hervorzugehen. Von 1845 bis 1855 bildeten seine Ansichten die allgemein für richtig gehaltene Lehre. Da trat A. Brandt und dann ausführlicher H. von Helmholtz für die Ohm'sche Auffassung in

die Schranken. Helmholtz insbesondere wusste *Klang* und *Ton* zu unterscheiden und zu zeigen, dass mittels dieser Unterscheidung man beiden Gegnern Recht geben könne. Seebeck's Behauptungen sind richtig beim Klang, Ohm's Behauptungen beim Ton. Dann wird noch die Helmholtz'sche erstmalige Erzeugung einfacher Töne geschildert und ein rascher Blick auf die physiologisch-psychologischen Folgerungen des letzterwähnten Forschers geworfen.

CANTOR.

Annuaire du Bureau des longitudes avec des Notices scientifiques. Paris 1895. Gauthier-Villars et fils.

Die wissenschaftlichen Mittheilungen des Jahrganges 1895 sind fünf an der Zahl. Herr Bouquet de la Grye berichtet über durch Diagramme versinnlichte Einwirkungen des Mondes auf die Erdatmosphäre, zu deren genauen Erforschung er systematische, an vielen Orten angestellte Beobachtungen verlangt. Herr Tisserand erzählt von den Verhandlungen der Geodätenversammlung in Innsbruck, von den dort behandelten vergleichenden Pendelbeobachtungen und Veränderungen der geographischen Breite, zwei Gegenständen, welche, dem Geologen und dem Astronomen gleich interessant, ihnen gestatten, gegenseitig Fragen an einander zu richten. Herr Janssen spricht in einer ersten Mittheilung von einigen Apparaten des Observatoriums auf dem Montblanc, in einer zweiten von Messungen der Lichtstärke mittelst der Photographie. Herr Poincaré endlich äussert sich im Namen des *Bureau des longitudes* über den Vorschlag der Akademie von Canada und der astronomischen Gesellschaft von Toronto, künftighin und beginnend mit dem 1. Januar 1901 den astronomischen Tag um Mitternacht beginnen zu lassen. Das Bureau ist dem Grundgedanken des Vorschlages günstig, befürwortet aber dessen Durchführung nur unter der doppelten Voraussetzung, dass die Regierungen der Staaten, in welchen die wichtigsten Ephemeriden gedruckt werden, zu Gunsten der Aenderung gewonnen werden, und dass auch die bürgerliche Zeit, von demselben Tage an, die Tagesstunden von 1 bis 24, und nicht mehr zweimal von 1 bis 12, benenne.

CANTOR.

La géométrie analytique d'Auguste Comte, nouvelle édition précédée de la Géométrie de Descartes. Paris 1894 chez. Louis Bahl. 111, VIII, 598 p.

Die Verlagshandlung hat in einem stattlichen Bande von nahezu 45 Druckbogen den Neudruck von zwei Schriften sehr verschiedener Natur vereinigt. Die Geometrie von Descartes gehört längst zu den klassischen Werken, welche den Grundstock mathematischen Wissens bilden. Der französische Urtext, die lateinische Uebersetzung, eine deutsche Uebersetzung sind leicht zugänglich, und diese Zugänglichkeit hat zur Verbreitung beigetragen, wie sie selbst, beziehungsweise die Herstellung neuer

Abdrücke und Uebersetzungen, auf dem schon vorhandenen Interesse an dem Werke beruht. Die Geometrie von Auguste Comte aus dem Jahre 1843 mag ja, wir wissen es nicht, in Frankreich gleichfalls zu den Büchern gehören, von denen jeder Mathematiker weiss, wenn er sie auch nicht selbst gelesen hat, in Deutschland ist dem entschieden nicht so. Die positive Philosophie Comte's ist bei unseren Fachphilosophen und über deren Kreis hinaus bekannt geworden. Dass Comte thatsächlich Mathematiker war, dass er die Stellung eines Eintrittsexaminators an der Pariser polytechnischen Schule, eines Repetenten für höhere Analysis und Mechanik an derselben Anstalt inne hatte, dass er eine analytische Geometrie verfasste, Alles das dürfte mancher Fachgenosse erst aus dieser Anzeige erfahren. Und dennoch ist gerade diese analytische Geometrie in hohem Grade lesenswerth. Neue Thatsachen wird der Leser ihr heute gewiss nicht entnehmen, muthmasslich war das schon für den Leser von 1843 nicht der Fall, aber ein grosser Reichthum an didaktisch verwerthbaren Gedanken bildet den Reiz des Werkes, würde ihn noch mehr bilden, wenn Comte nicht allzu überzeugt von seinem philosophischen Uebergewichte über die anderen Mathematiker, die sich damit begnügen, Mathematiker zu sein, wäre und dieser Ueberzeugung zu oft und zu deutlich Worte verliehe. Der Mathematiker wird sich daher beim Lesen nicht selten ärgern, aber der Lehrer wird entschiedenen Nutzen aus der Kenntnissnahme des Werkes ziehen können, die wir deshalb dringend anempfehlen. An einige Spracheigenthümlichkeiten Comte's, wie den fortwährenden Gebrauch von *envers* statt *pour*, gewöhnt man sich rasch.

Cantor.

Berichtigung.

Im 4. Heft dieser Zeitschrift Seite 125 Zeile 9 von oben muss es heissen: „so folgt aus der ersten Gleichung der gerade elliptische Kegel $\frac{z^2}{h^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$,“

Bibliographie

vom 1. September bis 15. October 1895.

Periodische Schriften.

Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Klasse. 1895, II und III. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Abth. IIa. 104. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien, Tempsky. 3 Mk. 30 Pf.

—— Abth. IIb. 3. und 4. Heft. Ebendaselbst. 2 Mk. 10 Pf.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 30. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 24. Bd., 3. Heft (Schluss). Herausgegeben von E. Lampe. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1893. Dargestellt von der physik. Gesellschaft in Berlin. 49. Jahrgang. Nr. 2 und 3. Braunschweig, Vieweg. 55 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Zeuthen, G., Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Kopenhagen, Höst & Sohn. 6 Mk.

Hahn, W., Die Entstehung der Weltkörper, im Sinne Leo's XIII. untersucht und beleuchtet. München, nationale Verlagsanstalt. 4 Mk.

Reine Mathematik.

Jacobi, C. G. J., Ueber vierfach periodische Functionen zweier Variabelen. Aus dem Lateinischen (Crelle's Journal 13) übersetzt von A. Witting. Herausgegeben von H. Weber (aus Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften). Leipzig, Engelmann. 70 Pf.

Rosenhain, G., Ueber Functionen zweier Variabelen mit vier Perioden. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. Herausgegeben von H. Weber (aus Ostwald's Klassiker etc.). Ebendaselbst. 1 Mk. 50 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der Stereometrie für höhere Lehranstalten. Potsdam, Stein. 1 Mk. 60 Pf.

Angewandte Mathematik.

Hammer, E., Tafeln zur Berechnung des Höhenunterschieds. Für Entfernungen bis 400 Meter und Höhenwinkel bis 25°. Stuttgart, Metzler. 1 Mk.

Nernst, W. und Schönflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. München, Wolff. 8 Mk. 60 Pf.

Francke, A., Die elastische Linie des Balkens. Berlin, Ernst & Korn. 1 Mk. 60 Pf.

Göller, A., Lehrbuch der Schattenconstructionen und Beleuchtungskunde. Stuttgart, Neff. 12 Mk.

Engelhardt, B. de, Observations astronomiques, faites dans son observatoire. 3. partie. Dresden, Bänsch. 18 Mk.

Physik und Meteorologie.

Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Abhandlungen von Oersted und Seebeck (1820—21). Herausgegeben von J. v. Oettingen (aus Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften). Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 40 Pf.

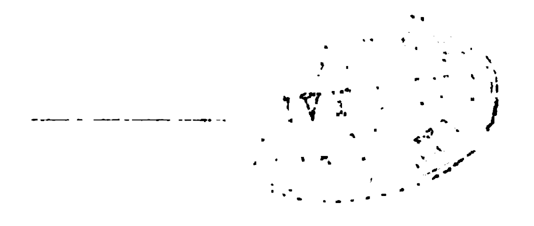
Handbuch der Physik. 25. u. 26. Lieferung. Breslau, Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Favarger, A., Die Elektricität und ihre Verwerthung zur Zeitmessung. Uebersetzt von M. Loeske. Bautzen, Hübner. 7 Mk.

Hammerl, H., Die elektrische Anlage in der Oberrealschule zu Innsbruck nebst Beschreibung verschiedener Apparate. Programm. Innsbruck, Wagner. 1 Mk. 20 Pf.

Weyer, E., Die magnetische Declination und ihre säculäre Veränderung an 48 Beobachtungsorten (aus der Leopoldina). Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Gibberne, A., Das Luftmeer. Uebersetzt von Kirchner. Berlin, Cronbach. 4 Mk. 50 Pf.



Mathematisches Abhandlungsregister.

1894.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abel'sche Transcendenten.

290. Sur les intégrales abéliennes qui s'expriment par des logarithmes. E. Goursat. Compt. Rend. CXVIII, 515.

Additionstheorem.

291. Sur une forme explicite des formules d'addition des fonctions hyperelliptiques les plus générales. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVI, 304.

Aerodynamik.

292. Sur les déformations successives de la tête d'une onde aérienne isolée, durant la propagation de cette onde le long d'un tuyau de conduite sans eau, de longueur indéfinie. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVII, 12.
293. Vibrations propres d'un milieu indéfiniment étendu extérieurement à un corps solide. Marc Brillouin. Compt. Rend. CXVII, 94.
294. Sur les lois de la résistance de l'air. E. Vallier. Compt. Rend. CXIX, 835.

Akustik.

295. Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand il y a diverses résistances au mouvement. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVIII, 162, 223, 271.
296. Émission des sons. H. Gilbault. Compt. Rend. CXVIII, 135, 1037.
297. Transmission des sons. H. Gilbault. Compt. Rend. CXVIII, 1244.
298. Réception des sons. H. Gilbault. Compt. Rend CXIX, 53.
299. Sur un système de gammes nouvelles. Alex de Bertha. Compt. Rend. CXVIII, 1137; CXIX, 56. — Edm. de Polignac ibid. CXVIII, 1412.

Analytische Geometrie der Ebene.

300. Sur le droite passant par les centres de deux des n^2 petits carrés en les quels on a divisé un grand carré par des lignes horizontales et verticales. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 28.
301. Relation entre des segments d'une droite coupée par deux cubiques. J. Destoux. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 15.
302. Propriétés des courbes du troisième degré et de la troisième classe. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 52.
303. Sur la strophoïde. Ew. Valdès. N. ann. math. Série 3, XIII, 243. [Vergl. Bd. XXXIX Nr. 184.]
304. Sur la strophoïde. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 264.
305. Génération d'une hypocycloïde à trois rebroussements. G. Caffin. N. ann. math. Série 3, XIII, 498.
306. Sur les courbes planes du quatrième ordre. Mod. Postnicoff. N. ann. math. Série 3, XIII, 348.
307. Courbe du sixième degré lieu du point de contact d'une droite mobile avec un cercle tangent aussi un cercle fixe. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII. Exerc. 18.
308. Sur les spirales sinusoides. E. Cesaro. N. ann. math. Série 3, XIII, 102.

309. Sur les trajectoires orthogonales de courbes, dont l'équation est donné en coordonnées bipolaires. G. Dariès. N. ann. math. Série 3, XIII, 283.
310. Sur les rayons de courbure successifs de certaines courbes. R. Godefroy. Compt. Rend. CXVII, 1062.
Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere). Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Normalen. Parabel.

Analytische Geometrie des Raumes.

311. Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle. P. Appell. N. ann. math. Série 3, XIII, 41.
312. Théorème sur les systèmes triplement orthogonaux. Luc. Lévy. Compt. Rend. CXVII, 477.
313. Sur une propriété métrique commune à trois classes particulières de congruences rectilignes. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVIII, 242.
314. Sur des congruences rectilignes et sur le problème de Ribaucour. E. Cosserat. Compt. Rend. CXVIII, 335.
315. Sur le premier invariant différentiel projectif des congruences rectilignes. Em. Waelsch. Compt. Rend. CXVIII, 736.
316. Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVI, 246.
317. Sur des propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représentation sphérique. C. Guichard. Compt. Rend. CXVI, 1238.
318. Discussion de la courbe passant par le point x, y, z et y faisant avec les axes des angles dout les cosinus sout respectivement x, y, z. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, 44.
319. Par cinq points donnés dans l'espace, faire passer un cylindre droit à blase circulaire. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 37.
Vergl. Geometrie (höhere). Hyperboloid. Krümmungslinien. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

320. Sur un problème de mécanique. J. Bertrand. Compt. Rend. CXVIII, 13.
321. Sur un problème de mécanique. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 102.
322. Sur le calcul des orbites des planètes. F. Tisserand. Compt. Rend. CXIX, 881.
323. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. M. Hamy. Compt. Rend. CXVII, 1050; CXVIII, 88, 698.
324. Sur les expressions approchées destermes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. N. Coculesco. Compt. Rend. CXVIII, 59.
325. Sur les formules de l'aberration annuelle. Gaillot. Compt. Rend. CXVI, 563.
326. Sur les termes du second ordre provenant de la combinaison de l'aberration et de la réfraction. Folie. Compt. Rend. CXVI, 359, 732, 1105.
327. Sur les lacunes dans la zone des petites planètes. O. Callandreau. Compt. Rend. CXVIII, 751.
328. Sur la distribution des planètes entre Mars et Jupiter. E. Roger. Compt. Rend. CXIX, 895, 943.
Vergl. Geodäsie. Nautik 557—562.

B.

Bestimmte Integrale.

329. Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. J. Andrade. Compt. Rend. CXIX, 1192.
330. Valeurs de lacets. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, 22.
331. Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms. Dav. Hilbert. Acta Math. XVIII, 155.
332. Angenäherte Darstellung der Quadratwurzel einer Veränderlichen mittelst einfacher Brüche. P. Tchebychew. Acta Math. XVIII, 113.
333. Calcul d'une intégrale définie. M. d'Ocagne. N. ann. math. Série 3, XIII, 198.

C.

Capillarität.

334. Sur la dépression capillaire barométrique. C. Maltézos. Compt. Rend. CXVIII, 583.

Combinatorik.

335. Sur certaines permutations spéciales. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 16.
336. Sur le triangle des séquences. Dés. André. Compt. Rend. CXVIII, 575, 726. — G. Darboux ibid. 1026.
337. Sur les permutations quasi alternées. Dés. André. Compt. Rend. CXIX, 947.
338. Sur le nombre des valeurs que prend une fonction rationnelle de n lettres par l'ensemble des substitutions effectuées sur ces n lettres. Cartan. Compt. Rend. CXIX, 902.

Cylinderfunctionen.

339. Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 383.

D.

Differentialgleichungen.

340. Équations pour lesquelles $\frac{1}{P^2+Q^2}$ ou $\frac{1}{P^2-Q^2}$ sont des facteurs d'intégrabilité. C. Harkema. N. ann. math. Série 3, XIII, 502.
341. Sur le problème général de l'intégration. Riquier. Compt. Rend. CXVI, 426.
342. Sur la reduction d'un système différentiel quelconque à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre. Riquier. Compt. Rend. CXVI, 866.
343. Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable. Riquier. Compt. Rend. CXIX, 267. — Em. Picard ibid. 1250.
344. Sur les équations différentielles ordinaires qui possèdent un système fondamental d'integrales. A. Guldberg. Compt. Rend. CXVI, 964; CXVII, 215, 614.
345. Sur les équations différentielles ordinaires, qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales. Soph. Lie. Compt. Rend. CXVI, 1233.
346. Sur la limitation du degré pour l'intégrale générale algébrique de l'équation différentielle du premier ordre. Autonne. Compt. Rend. CXVI, 132, 1045.
347. Sur la limitation du degré pour les integrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. Autonne. Compt. Rend. CXVIII, 1184.
348. Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre. Em. Lindelöf. Compt. Rend. CXVIII, 454. — Em. Picard ibid. 457.
349. Sur un exemple d'approximations successives divergentes. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII 899.
350. Sur l'application des methodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. Em. Picard. Journ. Mathem. Série 4, IX, 217.
351. Sur une hypothèse négligeable pour le développement des intégrales d'un système d'équations. Bendixon. Compt. Rend. CXVIII. 971.
352. Sur une classe d'équations différentielles dout l'intégrale générale est uniforme. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 603. [Vergl. Nr. 436.]
353. Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII, 760.
354. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 91.
355. Sur les sytèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 179.
356. Sur les intégrales uniformes des équations linéaires. H. von Koch. Compt. Rend. CXVI, 365.
357. Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. H. von Koch. Acta Math. XVIII, 337.
358. Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. J. Cels. Compt. Rend. CXVI, 176.
359. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. Auric. N. ann. math. Série 3, XIII, 47.
360. Sur les équations aux dérivées partielles linéaires et à caractéristiques réelles. Delassus. Compt. Rend. CXIX, 40.
361. Sur certaines équations différentielles du premier ordre. Vessiot. Compt. Rend. CXVI, 427.
362. Sur une classe d'équations différentiel les Vessiot. Compt. Rend. CXVI, 959.

363. Sur une classe de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Vessiot. Compt. Rend. CXVI, 1112.
364. Sur une équation différentielle du second ordre. G. Mittag-Leffler. Compt. Rend. CXVII, 92.
365. Sur l'intégration de l'équation différentielle $y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$. G. Mittag-Leffler. Acta Math. XVIII, 233.
366. Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 566.
367. Sur les équations du second ordre à points critiques fixes et sur la correspondance univoque entre deux surfaces. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVII, 611, 686.
368. Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. P. Vernier. Compt. Rend. CXVIII, 1317. — P. Painlevé ibid. CXIX, 37.
369. Sur les equations linéaires du second ordre renfermant un paramètre arbitraire. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII, 379.
370. Sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre et du genre zéro. Petrovitch. Compt. Rend. CXVIII, 1190.
371. Sur les équations du second degré dont l'intégrale générale est uniforme. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVII, 211.
372. Sur une expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique de la forme la plus générale. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVI, 243.
373. Sur une extension aux équations d'ordre quelconque d'une méthode de Riemann relative aux équations du second ordre. Delassus. Compt. Rend. CXVII, 510.
374. Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 362. — Em. Picard ibid. 365.
375. Sur les intégrales analytiques des équations de la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z),\ F(z) = \Sigma a_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k},\ i+k < n$$

Delassus. Compt. Rend. CXVIII, 968.
376. Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 88.
377. Sur les équations différentielles d'ordre superieur, dont l'integrale n'admet qu'un nombre donné de déterminations. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 173.
378. Sur l'intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant plusieurs fonctions inconnues. Riquier. Compt. Rend. CXIX, 324.
379. Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 491.
380. Sur l'équation $\Delta u = ke^u$. Em. Picard. Compt. Rend. CXVI, 454, 1015.
381. De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée. Em. Picard. Journ. Mathem. Série 4, IX, 273.
382. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. X. Stouff. Compt. Rend. CXVIII, 1320.
383. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. A. Petot. Compt. Rend. CXIX, 510.
384. Sur le problème de Pfaff. A. J. Stodolkievitz. Compt. Rend. CXIX, 489.
Vergl. Elasticität 393, 394. Elektricität 401. Mechanik. Oberflächen 571, 574, 603. Transformationsgruppen.

Differentialinvarianten.

385. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. Ar. Tresse. Acta Math. XVIII, 1.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 315.

Differentialquotient.

386. Sur les changements de variables. L. Lévy. N. ann. math. Série 3, XIII, 5.
387. Sur la théorie des formes différentielles quadratiques. Wlad. de Tannenberg. Compt. Rend. CXIX, 321.

Dreiecksgeometrie.

388. Règles d'analogie dans le triangle ou transformation continue et transformation analytique correspondante. E. Lemoine Compt. Rend. CXVI, 31.
389. Théorème sur les bissectrices. Rom. Blazeievski. N. ann. math. Série 3, XIII, 31.
390. Relations entre les distances d'un point du plan aux sommets d'un triangle. Rom Blazeievski. N. ann. math. Série 3, XIII, 28.
391. Sur trois droites se rencontrant en un même point du cercle circonscrit à un triangle. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 19. — H. Lez ibid. 20. — A. Droz-Farny ibid. 23.

E.

Elasticität.

392. Sur une simplification des formules de résistance vive des solides. J. Boussinesq. Compt. Rend. XVI, 1418.
393. Sur l'équation aux derivées partielles qui se présente dans la théorie de la vibration des membranes. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 502.
394. Sur l'équation des vibrations d'une membrane. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 447.
395. Sur les vibrations des corps élastiques isotropes. V. Volterra. Acta Math. XVIII, 161.

Elektricität.

396. Essai d'une nouvelle théorie de l'électrostatique. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 1286.
397. Force agissant à la surface de séparation de deux dielectriques. H. Pellat. Compt. Rend. CXIX, 675.
398. Sur la valeur de l'ohm théorique. A. Leduc. Compt. Rend. CXVIII, 1246.
399. Sur la capacité électrostatique d'une ligne parcourue par un courant. Vaschy. Compt. Rend. CXIX, 1198.
400. Sur la propagation de l'électricité. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVII, 1027.
401. Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité. Em. Picard. Compt. Rend. CXVIII, 16.
402. Sur la propagation du courant dans un cas particulier. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 227.
403. Sur la propagation des ondes électromagnétiques. Mascart. Compt. Rend. CXVIII, 277.
404. Sur la nature de la conductibilité électrique. Vaschy. Compt. Rend. CXVIII, 1324.
405. Sur la mesure de la puissance dans les courants polyphasés. Blondel. Compt. Rend. CXVI, 54.
406. Nouvelle méthode simplifiée pour le calcul des courants alternatifs polyphasés. A. Blondel. Compt. Rend. CXVIII, 404, 633.
407. Multiplication du nombre des périodes des courants sinusoïdaux. Dés. Korda. Compt. Rend. CXVI, 806.
408. Transformateur de courant monophasé en courants triphasés. Dés. Korda. Compt. Rend. CXIX, 61.
409. Sur les courants alternatifs et le pont de Wheatstone. H. Abraham. Compt. Rend. CXVIII, 1251.
410. Sur la forme générale de la loi du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope. E. Mercadier. Compt. Rend. CXVI, 26.
411. Sur les ondes électriques dans les fils; la force électrique dans le voisinage du conducteur. Birkeland. Compt. Rend. CXVI, 499.
412. Sur la nature de la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur. Kr. Birkeland et Ed. Sarasin. Compt. Rend. CXVII, 618. — H. Poincaré ibid. CXVII, 622.
413. Détermination de la forme des courants périodiques en fonction du temps au moyen de la méthode d'inscription électrochimique. P. Janet. Compt. Rend. CXIX, 58.
414. Sur l'équation des décharges. R. Swyngedauw. Compt. Rend. CXIX, 221.
415. Sur les interférences électriques produites dans une lame liquide. R. Colson. Compt. Rend. CXVI, 1052.
416. Sur les relations générales qui existent entre les coefficients des lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme. E. Mercadier. Compt. Rend. CXVI, 800.

417. Sur le calcul des coefficients de self-induction dans un cas particulier. A. Potier. Compt. Rend. CXVIII, 166.
418. Sur la moyenne distance géométrique des éléments d'un ensemble de surfaces et son application au calcul des coefficients d'induction. Ch. Eug. Guye. Compt. Rend. CXVIII, 1321.
419. Sur la théorie de la pyro-électricité et de la piézo-électricité. Lord Kelvin. Compt Rend. CXVII, 463.
Vergl. Magnetismus. Potential.

Ellipse.

420. Inscrire dans un triangle donné une ellipse dout la surface soit égale à celle d'un cercle donné. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 38.
421. Hyperboles passant chacune par quatre points donnés au moyen de deux diamètres quelconques conjugués d'une ellipse. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 6.
Vergl. Maxima und Minima 516. Normalen 564.

Elliptische Transcendenten.

422 Sur la réduction des intégrales elliptiques. J. C. Kluyver. Compt. Rend. CXVI, 48.
423. Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de deuxième espèce. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVIII, 1181.
424. Sur quatre solutions connexes du problème de la transformation relatif à la fonction elliptique de troisième espèce. F. de Salvert. Compt. Rend. CXVIII, 1403.
Vergl. Zahlentheorie 665.

F.

Formen.

425. Sur la composition des formes linéaires et les groupes à congruences. X. Stouff. Compt. Rend. CXIX, 993.

Functionen.

426. Théorie des fonctions algébriques d'une variable. K. Hensel. Acta Math. XVIII, 247.
427. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. J Hadamard. Journ. Mathem. Série 4, IX, 171.
428. Sur la partie entière de $(x^2-1)^n.\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right]$. O. Callandreau. N ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 50.
429. Théorèmes relatifs aux fonctions analytiques à n dimensions. G. Scheffers. Compt. Rend. CXVI, 1242.
430. Sur la généralisation des fonctions analytiques. G. Scheffers. Compt. Rend. CXVI, 1114.
431. Sur la représentation approchée des fonctions expérimentales entre des limites données. Vallier. Compt. Rend. CXVI, 712.
432. Nombre des valeurs différentes de $z=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ les lettres $x_1, x_2, \ldots x_n$ prenant respectivement $m_1, m_2, \ldots m_n$ valeurs. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 42.
433. Démonstration de la transcendance du nombre e. Ad. Hurwitz. Compt. Rend. CXVI, 788.
434. Sur la transcendance du nombre e. Gordan. Compt. Rend. CXVI, 1040.
435. Sur la fonction modulaire $\chi\omega$. A. Cayley. Compt Rend. CXVI, 1339.
436. Sur une classe de transcendantes nouvelles. Em. Picard. Compt. Rend. CXVII, 472. [Vergl. Nr. 352.]
437. Sur une classe de transcendantes nouvelles. Em. Picard. Acta Math. XVIII, 133.
438. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVIII, 845.
439. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Em. Borel. Compt. Rend. CXVIII, 340.
440. Sur les équations et les fonctions implicites. Pellet. Compt. Rend. CXVII, 719.
441. Sur les équations aux fonctions mêlées et un problème de lignes géodésiques. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVII, 683.

442. Sur les équations fonctionelles. Leau. Compt. Rend. CXIX, 901.
443. Sur les zéros de certaines fonctions discontinues. Principe de la méthode pour trouver les zéros de certaines fonctions. Desaint. Compt. Rend. CXIX, 364.
Vergl. Abel'sche Transcendenten. Additionstheorem. Bestimmte Integrale. Combinatorik 338. Cylinderfunctionen. Differentialgleichungen. Differentialinvarianten. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Reihen. Substitutionen. Transformationsgruppen.

G.

Geodäsie.

444. Sur la cause des variations périodiques des latitudes terrestres. H. Gyldén. Compt. Rend. CXVI, 476, 605.

Geometrie (höhere).

445. Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques. Simart. Compt. Rend. CXVI, 1047.
446. Sur les transformations birationelles des courbes algébriques. H. Poincaré. Comqt. Rend. CXVII, 18.
447. Sur le rapport conique et la relation conique. Mozat. Compt. Rend. CXVIII, 790.
448. Sur la possibilité de remplacer, par un problème déterminé, le problème indéterminé que comporte la généralisation du théorème de Pascal. P. Serret. Compt. Rend. CXIX, 454.
449. Sur une dégénerescence du groupe projectif général. F. Engel. Compt. Rend. CXVIII, 397.
450. Sur les figures affines. G. Tarry. N. ann. math. Série 3, XIII, 242.
451. Trouver une courbe qui représente les trois folioles du Trifolium pratense H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 58.
452. Sur quelques propriétés de cubiques unicursales. A. Astor. N. ann. math. Série 3, XIII, 184.
453. Sur quelques cubiques unicursales. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 384.
454. Application de la méthode de transformation par polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 300. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 377.]
455. Sur une génération des courbes planes unicursales du troisième et du quatrième ordre. And. Bienaymé. N. ann. math. Série 3, XIII, 144.
456. Étant donnés 7 points sur une droite et 7 plans dans l'espace, couper les plans par une transversale en 7 points homographiques aux points donnés. J. Franel. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 54.
457. Sur la représentations des courbes gauches algébriques et sur une formule d'Halphen. L. Autonne. Compt. Rend. CXIX, 845.
458. Sur certaines familles de cubiques gauches. Lelieuvre. Compt. Rend. CXVII, 537, 616.
459. Recherche des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. E. Carvallo. N. ann. math. Série 3, XIII, 429.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene. Analytische Geometrie des Raumes. Kreis 502, 503. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Geschichte der Mathematik.

460. Auguste Comte examinateur d'admission à l'École Polytechnique. P. Laffitte. N. ann. math. Série 3, XIII, 65, 113, 405, 462, 473.
461. Sur la vie et les travaux de Pierre-Ossian Bonnet (22/XII. 1819—22./VI. 1892). P. Appell. Compt. Rend. CXVII, 1014.
462. Sur les travaux de M. Kummer. Hermite. Compt. Rend. CXVI, 1163.

Gleichungen.

463. Sur une classe de polynomes décomposables en facteurs linéaires. Moutard. Compt. Rend. CXIX, 42.
464. Sur les équations et les fonctions implicites. A. Pellet. Compt. Rend. XVIII, 182.

465. Relations des polynomes $V_1, V_2, \ldots V_m$ de Sturm avec les racines de l'équation $V=0$. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 27.
466. Sur la résolution algébrique des équations. E. Jaggi. N. ann. math. Série 3, XIII, 126.
467. Sur les équations réciproques et les équations du quatrième degré. A. E. Pellet. N. ann. math. Série 3, XIII, 108.
468. Une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles, trouver le nombre précis de racines comprises entre deux limites données. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 42.
469. Sur la résolution des équations numériques au moyen des suites récurrentes. R. Perrin. Compt. Rend. CXIX, 990, 1257, 1190.
470. Sur une méthode nomographique appliquable à des équations pouvant contenir jusqu' à dix variables. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXVII, 216, 277.
471. Sur des abaques à 16 et 18 variables. A. Lafay. Compt. Rend. CXIX, 1195.
472. Sur l'élimination. Hadamard. Compt. Rend. CXIX, 995.
473. Sur la détermination du nombre des racines communes à un système d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction en ces points. W. Dyck. Compt. Rend. CXIX, 1254.

Vergl. Functionen 440, 441, 442. Kegelschnitte 495.

H.

Hydrodynamik.

474. Réduction de l'équation de continuité en Hydraulique à la forme

$$\frac{d\varrho}{dt} + v_1\frac{d\varrho}{ds} + \varrho\frac{dv_1}{ds} - 2\varrho v_1\frac{\delta' \alpha}{ds''} = 0.$$

P. E Touche. Compt. Rend. CXIX, 721.
475. Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide. H. Willotte. Journ. Math. Série 4, IX, 5. [Vergl. Bd. XXXVII, Nr. 403.]
476. Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. C. Maltézos. Compt. Rend. CXVII, 337.
477. Théorie des déversoirs. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVI, 1327, 1415, 1487. CXIX, 589, 618, 663, 707, 771.
478. Sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses à leur intérieur. Compt. Rend. CXVIII, 1031. — J. Boussinesq. ibid. 1239.
479. Sur l'équilibre des mers. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 948.
480. Variation du niveau de l'eau dans un bassin communiquant avec un port à marée. A. de Saint-Germain. Compt. Rend. CXIX, 673.
481. Sur le clapotis. E. Guyon. Compt. Rend. CXVII, 722.

Hyperbel.

482. Propriété de l'hyperbole équilatère. J. Réveille. N. ann. math. Série 3, XIII, 100.
483. Sur l'hyperbole équilatère et sur ses inverses. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII. 265.

Vergl. Ellipse 421.

Hyperboloid.

484. Sur l'hyperboloide à une nappe. Genty. N. ann. math. Série 3, XIII, 399.
485. Tétraèdre ayant pour hauteurs quatre génératrices d'un hyperboloïde. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 33. — Moret-Blanc ibid. 36.
486. Les plans qui découpent dans un cône du second degré des volumes limités de grandeur constante sont tangents à un hyperboloïde à deux nappes, asymptote à ce cône. P. Barbarin. N. ann. math. Série 3, XIII, 99.

K.

Kegelschnitte.

487. Construire une conique connaissant trois tangentes et une directrice H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 43.
488. Sur quelques théorèmes de la géométrie des coniques. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 218.
489. Sur un théorème de M. Faure. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 324.

490. Sur les points d'une conique situés sur un même cercle. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 386.
491. Courbes autopolaires. P. Appell. N. ann. math. Série 3, XIII, 206.
492. Corrélation entre les hexagones de Pascal et de Brianchon. P. Sondat. N. ann. math. Série 3, XIII, 121.
493. Formules relatives aux foyers des coniques. A. Tissot. N. ann. math. Série 3, XIII, 97.
494. Sur un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 24.
495. Intersection de deux coniques. Amigues. N. ann. math. Série 3, XIII, 81.
496. Des quatre coniques passant par un point quelconque P d'une conique S étant circonscrites à un triangle ABC et touchant S chacune dans un autre point que P. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 92.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

497. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. Padé. Compt. Rend. CXVIII, 848.
498. Sur une application des fractions continues. Stieltjes. Compt. Rend. CXVIII, 1315.
499. Recherches sur les fractions continues. Stieltjes. Compt. Rend. CXVIII, 1401. — H. Poincaré ibid. CXIX, 630.

Vergl. Reihen 627.

Kinematik.

500. Un théorème concernant des aires décrites dans le mouvement d'une figure plane. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVIII, 965.

Vergl. Mechanik 537, 550.

Kreis.

501. Rayons d'une suite de cercles consécutifs et somme de leurs aires. S. Hott. N. ann. math. Série 3, XIII, 488.
502. Des cercles ou des sphères dérivés d'une enveloppe, plane ou solide, de classe quelconque. P. Serret. Compt. Rend. CXVII, 400, 435, 480.
503. Sur la construction du cercle dérivé de 7 droites, ou défini par l'équation $0 = \Sigma^7{}_1 l_1 T^3{}_1 \equiv X^2 + Y^2 - R^2$. P. Serret. Compt. Rend. CXIX, 474, 493
504. Sur le problème du billard circulaire. Auric. N. ann. math. Série 3, XIII, 215

Krümmungslinien.

505. Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. Blutel. Compt. Rend. CXVI, 249.
506. Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes. P. Adam. Compt. Rend. CXVI, 1036.
507. Sur les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et isothermes. Th. Caronnet. Compt. Rend. CXVI, 1240.
508. Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales. Th. Caronnet. Compt. Rend. CXVII, 842.
509. Sur les lignes de courbure des sourfaces cerclées. Lelieuvre. Compt. Rend. CXVIII, 967.

Kugelfunctionen.

510. Sur la théorie des fonctions sphériques. E. Beltrami. Compt. Rend. CXVI, 181.
511. Sur la série de Laplace. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVIII, 497.

M.

Magnetismus.

512. Sur la relation qui existe entre les coefficients des formules de Coulomb, de Laplace et d'Ampère. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVII, 86, 150.
513. Sur les variations de l'effet Peltier produites par l'aimentation. L. Houllevigue. Compt. Rend. CXVIII, 629.
514. Problème général des transformateurs à circuit magnétique fermé. Dés. Korda. Compt. Rend. CXVIII, 864.

515. Sur l'hystérésis et les déformations permanentes. P. Duhem. Compt. Rend. CXVIII, 974.
Vergl. Elektricität. Potential.

Maxima und Minima.

516. Circonscrire à une ellipse le triangle équilatéral dont le côté soit: 1. un maximum 2. un minimum. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 45.
517. Entre tous les prismes de même base et de même hauteur c'est le prisme droit qui a la plus petite aire. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 32.
518. Minimum de matière pour construire un vase cylindrique droit de certaines propriétés données. H. Brocard. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 44.
519. Minimum du rapport du rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre au rayon de la sphère inscrite. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 25.
Vergl. Ellipse 420.

Mechanik.

520. Sur la dynamique du point. Andoyer. N. ann. math. Série 3 XIII, 52.
521. Sur les cas d'intégrabilité du mouvement d'un point dans un plan. Elliot. Compt. Rend. CXVI, 1117.
522. Sur un cas général où le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales uniformes. H. Gyldén. Compt. Rend. CXVI, 942, 1028.
523. Sur les équations de la Mécanique. Wlad. de Tannenberg. Compt. Rend. CXVIII, 1092; CXIX, 487. — R. Liouville ibid. CXIX, 367.
524. Condition pour que trois forces non situées deux à deux dans le même plan se réduisent à une seule force. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 41.
525. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. P. Appell. Compt. Rend. CXVI, 1483.
526. Sur la réduction du problème des tautochrones à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVI, 966.
527. Sur un théorème reliant la théorie de la synchronisation et celle des résonances. A. Cornu. Compt. Rend. CXVIII, 313.
528. Sur un classe de problèmes de Dynamique. P. Staeckel. Compt. Rend. CXVI, 485, 1284.
529. Sur une classe de problèmes de Dynamique. Goursat. Compt. Rend. CXVI, 1050.
530. Sur un thérème nouveau de Mécanique. N. Seiliger. Compt. Rend. CXVII, 578.
531. Généralisation de quelques théorèmes de Mécanique. A. Kotelnikoff. Compt. Rend. CXVIII, 129.
532. Sur le mouvement d'un corps solide. G. Koenigs. Compt. Rend. CXIX, 897.
533. Sur les mouvements des systèmes dout les trajectoires admettent une transformation infinitésimale. P. Painlevé. Compt. Rend. CXVI, 21.
534. Sur la transformation des équations canoniques du problème des trois corps. P. Vernier. Compt. Rend. CXIX, 451.
535. Sur le mouvement d'un solide pesant homogène de révolution fixé par un point de son axe et assujetti à s'appuyer sur un cercle fixe. A Astor. N. ann. math. Série 2, XIII, 442.
536. Sur le mouvement d'un système de forme variable. L. Picart. Compt. Rend. CXVIII, 733.
537. Sur un moyen d'obtenir un mouvement circulaire uniforme au moyen de deux mouvements vibratoires. Marc. Deprez. Compt. Rend. CXVIII, 451.
538. Le principe du travail maximum et l'entropie. Berthelot. Compt. Rend. CXVIII, 1378.
539. Sur le frottement. A. de Saint-Germain. N. ann. math. Série 3, XIII, 230.
540. Sur les mouvements de roulement. Hadamard. Compt. Rend. CXVIII, 911.
541. Théorie mathématique de l'indicateur de Watt. L. Lecornu. Compt. Rend. CXVIII, 1034.
542. Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. H. Resal. Compt. Rend. CXVII, 391.
543. Sur la stabilité de l'équilibre de l'axe de la toupie giroscopique. H. Resal. Compt. Rend. CXVII, 499.

544. Sur le joint Goubet et son application à l'hélice des navires. H. Resal. Compt. Rend. CXVII, 599.
545. Sur l'absorption de l'énergie par un fil élastique. Luc. de la Rive. Compt. Rend. CXVIII, 522.
546. Des mouvements de natation de la Raie. Marey. Compt. Rend. CXVI, 77.
547. Étude chronophotographique des différents genres de locomotion chez les animaux. Marey. Compt. Rend. CXVII, 355.
548. Sur la méthode chronostylographique et ses applications à l'étude de la transmission des ondes dans les tuyaux. A. Chauveau. Compt. Rend. CXVIII, 115.
549. Le mouvement des liquides étudié par la chronophotographie. Marey. Compt. Rend. CXVI, 913.
550. Sur un appareil rélatif à la question de la marche horizontale de l'homme. H. Resal. Compt. Rend. CXVIII, 620.
551. Les mouvements articulaires étudiés par la photographie. Marey. Compt. Rend. CXVIII, 1019.
552. Des mouvements que certains animaux exécutent pour retomber sur leurs pieds, lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé. Marey. Compt. Rend. CXIX, 714.
553. Théorie de la chutte du chat vivant comparée avec le théorème des aires. Guyon. Compt. Rend. CXIX, 717. – M. Lévy ibid 718. — Marc. Deprez ibid. 767. — P. Appell ibid. 770. — L. Lecornu ibid. 899.

Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Capillarität. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Nautik 555, 556. Optik. Pendel. Potential. Transformationsgruppen 641. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

554. Généralisation du théorème d'Eulcr relatif aux polyèdres. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVII, 144.

N.

Nautik.

555. Sur les calculs de stabilité des navires. E. Gouyou. Compt. Rend. CXVI, 496.
556. Sur le calcul de stabilité des navires. Ch. Doyère. Compt. Rend. CXVI, 1360.
557. Sur les termes d'ordre supérieur de la déviation des compas. E. Guyou. Compt. Rend. CXVI, 1357.
558. Nouvelles applications des Tables de latitudes croissantes à la navigation. E. Guyou. Compt. Rend. CXVII, 1059.
559. Détermination graphique du point à la mer. L. Favé et Rollet de l'Isle. Compt. Rend. CXVIII, 24.
560. Éphémérides graphiques donnant les coordonnées des astres pour les usages de la navigation. L. Favé. Compt. Rend. CXVIII, 1089.
561. Régulation des compas par des observations de force horizontale. E. Caspari. Compt. Rend. CXVIII, 27.
562. Azimut, latitude et longitude par des hanteurs égales, sans le secours du chronomètre. E. Caspari. Compt. Rend. CXVIII, 1028.

Normalen.

563. Sur les distances d'un point à des courbes sous des angles constants. M. d'Ocagne. N. ann. math. Série 3, XIII, 501.
564. Sur les quatre normales et les deux tangentes mènées d'un point donné à une ellipse. L. Bosi. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 10.

O.

Oberflächen.

565. Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXVI, 285.
566. Sur deux nombres invariants dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXIX, 1169.
567. Théorème sur les points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre. G. Koenigs. Compt. Rend. CXVI, 596.
568. Sur la correspondance par orthogonalité des éléments. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVI, 682.

569. Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces spirales. Alph. Demoulin. Compt. Rend. CXVIII, 387.
570. Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante. E. Waelsch. Compt. Rend. CXVI, 1435.
571. Sur une équation aux différences partielles du second ordre. J. Weingarten. Compt. Rend. CXVI, 493.
572. Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles. G. Humbert. Compt. Rend. CXVI, 1350.
573. Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. G. Humbert. Compt. Rend. CXVII, 361.
574. Théorie générale des surfaces hyperelliptiques. G. Humbert. Journ. Mathem. Série 4, IX, 29, 361.
575. Sur quelques surfaces avec plusieurs modes de génération. G. Scheffers. Compt. Rend. CXVI, 1352.
576. Quelques remarques sur les surfaces réglées et leur étude intrinsèque. E. Cesaro. N. ann. math. Série 3, XIII, 106. [Vergl. Bd. XXXIX, Nr. 316.]
577. Sur les droites qu'on peut peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre. E. G. N. ann. math. Série 3, XIII, 138.
578. Surface algébrique sur laquelle on ne peut tracer qu'une seule et unique circonférence. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 31.
579. Sur les surfaces admettant des cubiques gauches pour lignes asymptotiques. Blutel. Compt. Rend. CXVII, 722.
580. Sur les surfaces dout les plans principaux sout équidistants d'un point fixe, Guichard. Compt. Rend. CXVI, 487.
581. Sur les surfaces susceptibles d'engendrer par un déplacement hélicoïdal une famille de Lamé. Alb. Petot. Compt Rend. CXVIII, 1409.
582. Nouvel emploi du conoïde de Plücker. A. Mannheim. Compt. Rend. CXIX, 394.

Vergl. Differentialgleichungen 367. Krümmungslinien.

Oberflächen zweiter Ordnung.

583. Théorèmes sur les quadriques. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3. XIII, 378.
584. Sur les quadriques autopolaires. V. Hioux. N. ann. math. Série 3, XIII, 211.
585. Sur les quadriques inscrites dans la même développable. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 395.
586. Condition pour que deux quadriques aient une génératrice commune. C. Bourlet. N. ann. math. Série 3, XIII, 484.
587. Génération de quelques surfaces du second degré au moyen d'une sphère et d'une droite. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, 491. — Ancien élève ibid. 493.
588. Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dout les arêtes sout tangentes à une autre quadrique. H. Vogt. Compt. Rend. CXVIII, 395.
589. Discussion par la géométrie vectorielle d'une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné. Genty. N. ann. math. Série 3, XIII, 235.

Vergl. Hyperboloid.

Optik.

590. Sur des franges d'interférences semi-circulaires. G. Meslin. Compt. Rend. CXVI, 250, 379, 570. CXVII, 225. — A. Cornu ibid. CXVII, 228.
591. Achromatisme et chromatisme des franges d'interférence. J. Macé de Lépinay. Compt. Rend. CXVIII, 585, 856.
592. Sur les interférences à moyenne différence de marche. G. Meslin. Compt. Rend. CXIX, 214.
593. Études sur les réseaux diffringents. Anomalies focales. A. Cornu. Compt. Rend. CXVI, 1215, 1421.
594. Introduction naturelle de termes proportionnels aux déplacements de l'éther (ou termes de Briot) dans les équations de mouvement desondes lumineuses. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVII, 80.
595. Expression de la résistance opposée par chaque molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther ambiant. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXVII, 138.
596. Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. J. Boussines. Compt. Rend. CXVII, 193.

597. Sur la marche de la lumière à travers un système de lentilles sphériques. C. L. V. Charlier. Compt. Rend. CXVII, 580.
598. Sur la théorie de la photographie des couleurs simples et composées par la méthode interférentielle. G. Lippmann. Compt. Rend. CXVIII, 92.
599. L'objectif aplanétique symétrique. Ch. V. Zenger. Compt. Rend. CXVIII, 407.
600. Études sur les actions centrales. Lois générales relatives à l'effet des milieux. F. P. Le Roux. Compt. Rend. CXIX, 211.
601. De l'absorption de la lumière dans les milieux isotropes et cristallisés. G. Moreau. Compt. Rend. CXIX, 327.
602. De la périodicité des raies d'absorption des corps isotropes. G. Moreau. Compt. Rend. CXIX, 422.
603. Intégration des équations de la lumière dans les milieux transparents et isotropes. E. Carvallo. Compt. Rend. CXIX, 1003.

P.

Parabel.

604. Parabole enveloppe d'une corde de strophoide. E. N. Barisien. N. ann. math. Série 3, XIII, 8.
605. Sur quelques propriétés de la parabole et de ses inverses. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 281.
606. Propriétés de deux paraboles. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 308.
607. Propriétés de la parabole. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 316.
608. Remarques sur le théorème de Frégier. And. Cazamian. N. ann. math. Série 3, XIII, 322.
609. Sur une parabole intimement liée à une conique donnée et à un point donné de son plan. G. Leinekugel. N. ann. math. Série 3, XIII, 482.

Pendel.

610. Sur la pendule à tige variable. L. Lecornu. Compt. Rend. CXVIII, 132.
611. Sur le mouvement de deux points reliés par un ressort. L. Lecornu. Compt. Rend. CXVIII, 398.
612. Sur un système de deux pendules reliés par un fil élastique. Luc. de la Rive. Compt. Rend. CXVIII, 401.

Planimetrie.

613. Considérations sur la géométrographie. E. Lemoine. N. ann. math. Série 3, XIII, 155.
614. Sur trois droites serapportant à un quadrilatère donné et passant par un même point. Moret-Blanc. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 24.

Vergl. Dreiecksgeometrie. Kreis.

Potential.

615. Sur une propriété générale des champs admettant un potentiel. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 1244.
616. Propriété générale d'un champ quelconque n'admettant pas de potentiel. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 1355.
617. Sur un propriété générale des champs électriques et magnétiques. Vaschy. Compt. Rend. CXVI, 1437.
618. Calcul des forces auxquelles sont soumis les corps placés dans un champ électromagnétique. Vaschy. Compt. Rend. CXVII, 126.
619. Calcul des forces électromagnétiques suivant la théorie de Maxwell. Vaschy. Compt. Rend. CXVII, 1065.
620. Sur le mode de transformation du travail en énergie électrique. Vaschy. Compt. Rend. CXVIII, 1249.
621. Sur un theorème relatif aux fonctions harmoniques de plusieurs variables réelles. G. D. d'Arone. Compt. Rend. CXVIII, 342.

Vergl. Differentialgleichungen 380, 381. Elektricität. Magnetismus.

R.

Reihen.

622. Sur les caractères de convergence des séries. Hadamard. Compt. Rend. CXVII, 844.
623. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions croissantes. J. Hadamard. Acta Math. XVIII, 319, 421.

624. Sur la différentiation des séries trigonométriques. M. Lerch. Compt. Rend. CXIX, 725.
625. Sur le développement en série des fonctions implicites. Worontzoff N. ann. math. Série 3, XIII, 167.
626. Sur la possibilité de définir une fonction par une série entière divergente. H. Padé. Compt. Rend. CXVI, 686.
627. Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues. rationelles. H. Padé. Acta Math. XVIII, 97.
628. Généralisation de la série de Lagrange. E. Amigues. Compt. Rend. CXVI, 368, 429.
629. Sur une nouvelle méthode d'approximation. E. Jablonski. Compt. Rend. CXVI, 19.
630. Sur la sommation rapide de certaines séries peu convergentes (séries harmoniques alternées). A. Janet. Compt. Rend. CXVIII, 239.
Vergl. Astronomie 323, 324. Cylinderfunctionen. Gleichungen 469. Kugelfunctionen.

S.

Stereometrie.

631. Sur le produit d'asymétrie. Ph. A. Guye. Compt. Rend. CXVI, 1378, 1451.
Vergl. Mehrdimensionale Geometrie.

Substitutionen.

632. Sur les propriétés des groupes de substitution dout l'ordre est égal à un nombre donné. E. Maillet. Compt. Rend. XVIII, 1187.
633. Sur les groupes de substitutions isomorphes aux groupes symétriques ou alternés. Maillet. Compt. Rend. CXIX, 362.

T.

Transformationsgruppen.

634. Sur les lois de réciprocités et les sous-groupes de groupe arithmétique. X. Stouff. Compt. Rend. CXVI, 308.
635. Sur la structure des groupes simples finis et continus. Cartan. Compt. Rend. CXVI, 784.
636. Sur la structure des groupes finis et continus. Cartan. Compt. Rend CXVI, 962.
637. Sur la réduction de la structure d'un groupe à sa forme canonique. E. Cartan. Compt. Rend. CXIX, 639.
638. Sur un groupe simple à quatorze paramètres. F. Engel. Compt. Rend. CXVI, 786.
639. Sur une application de la théorie des groupes de Lie. Drach. Compt. Rend. CXVI, 1041.
640. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. J. Bendon. Compt. Rend. CXVIII, 1188.
641. Sur les problèmes de Dynamique dout les équations différentielles admettent une transformation infinitésimale. P. Stäckel. Compt. Rend. CXIX, 508, 723, 1189. - O. Staude ibid. 903.
642. Sur les transformations infinitésimales des trajectoires des systèmes. P. Painlevé. Compt. Rend. CXIX, 637.
643. Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires. Em. Picard. Compt. Rend. CXIX, 584.
Vergl. Differentialinvarianten. Functionen 438.

W.

Wärmelehre.

644. Sur l'équation de Van der Waals et la démonstration du théorème des états correspondants. G. Meslin. Compt. Rend. CXVI, 135.
645. Sur le troisième principe de l'énergétique. H. Le Chatelier. Compt. Rend. CXVI, 1504. CXVII, 513.
646. Sur le troisième principe de l'énergétique. W. Meyerhoffer. Compt. Rend. CXVII, 363.
647. Sur la théorie cinétique du gaz. H. Poincaré. Compt. Rend. CXVI, 1017, 1165.
648. Sur l'interprétation cinétique de la fonction de dissipation. Ladisl. Nathanson. Compt. Rend. CXVII, 539.

649. Commentaire aux principes de la Thermodynamique. P. Duhem. Journ. Mathem. Série 4, IX, 293. [Vergl. Bd. XXXVIII, Nr. 526.]
650. Sur la loi générale et les formules de l'écoulement de la vapeur d'eau saturée. H. Parenty. Compt. Rend. CXVI, 1120.
651. Thermodynamique des gaz; approximations composées de la loi de Joule et des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. J. Andrade. Compt. Rend. CXVIII, 64.
652. La loi de Joule et la loi de Mariotte dans les gaz réels. J. Andrade. Compt. Rend. CXVIII, 244.
653. Sur la pression intérieure dans les gaz. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVIII, 326.
654. Sur la pression interne dans les fluides et la forme de la fonction $\varphi(p\,v\,t)=0$. E. H. Amagat. Compt. Rend. CXVIII, 566.
655. Variation de la tension superficielle avec la température. H. Pellat. Compt. Rend. CXVIII, 1193.
656. Détermination expérimentale directe de la chaleur spécifique de vapeur saturée et de la chaleur de vaporisation interne. E. Mathias. Compt. Rend. CXIX, 849.

Vergl. Cylinderfunctionen.

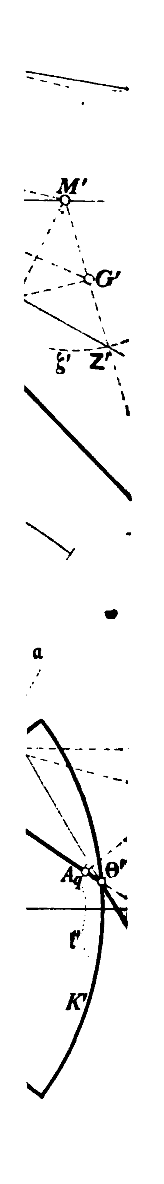
Wahrscheinlichkeitsrechnung.

657. Sur la théorie des caisses de pension. L. Lindelöf. Acta Math. XVIII, 89.
658. Sur l'application répétée du théorème de Bernoulli. J. Andrade. Compt. Rend. CXVI, 1281.
659. Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point. M. d'Ocagne. Compt. Rend. CXVIII, 517.
660. Problème de probabilité. Audibert. N. ann. math. Série 3, XIII, Exerc. 13.

Z.

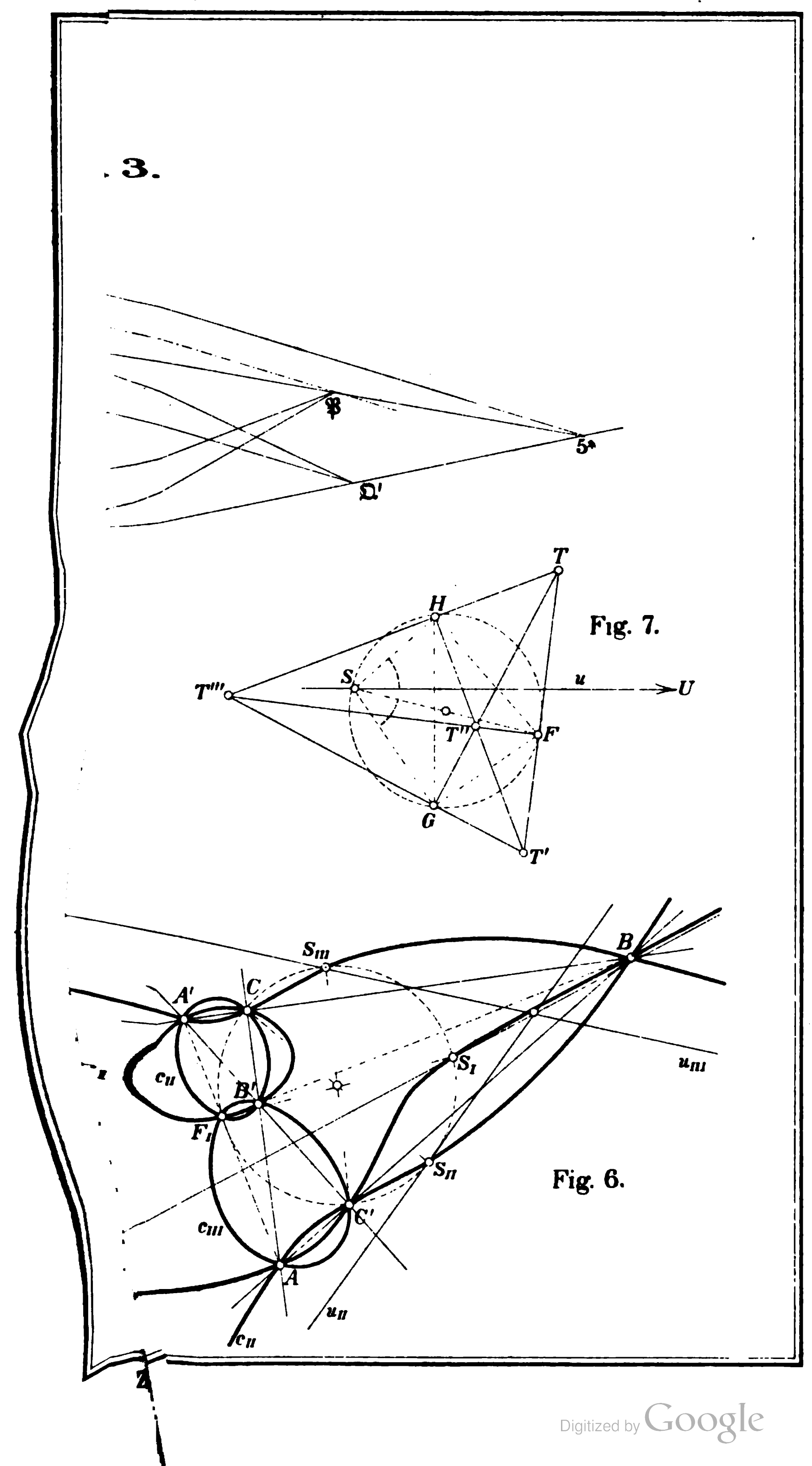
Zahlentheorie.

661. Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x. Cahen. Compt. Rend. CXVI, 85.
662. Sur le nombre allant indéfiniment croissant avec x des nombres premiers entre x et $(1+h)x$, quelque petite que soit la constante h. Cahen. Compt. Rend. CXVI, 490.
663. Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. H. v. Koch. Compt. Rend. CXVIII, 850.
664. Sur une formule empirique pour le $n^{\text{ième}}$ nombre premier donnée par Mr. Pervouchine. E. Cesàro. Compt. Rend. CXIX, 848.
665. L'expression du nombre des classes déduite de la transformation des fonctions elliptiques. P. de Seguier. Compt. Rend. CXVIII, 1407.
666. Sur les intégrales définies suivant les diviseurs. N. Bougaïeff. Compt. Rend. CXIX, 1259.
667. Nouveaux théorèmes d'arithmétique. P. Pepin. Compt. Rend. CXIX, 397.
668. Sur une erreur relevée dans la Théorie des nombres de Legendre. Dujardin. Compt. Rend. CXIX. 843.
669. Démonstration inexacte du théorème de Fermat sur l'impossibilité de $x^n+y^n=z^n$. G. Korneck. Compt. Rend. CXVIII, 841.


M'
G'
Z'
a
A
θ'
K'






3.
𝔓
5*
𝔇'
T
H
Fig. 7.
S
u
U
T'''
T''
F
G
T'
B
Sııı
C
A'
uııı
Sı
cıı
B'
Fı
Sıı
Fig. 6.
C'
cııı
A
uıı
cıı



Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

Supplement zum vierzigsten Jahrgang.

Der Supplemente zwölftes.

Zugleich der

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik

siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1895.

Abhandlungen

zur

Geschichte der Mathematik.

Siebentes Heft.

Mit einer lithogr. Tafel und 16 Figuren im Text.

Inhalt:



Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1895.

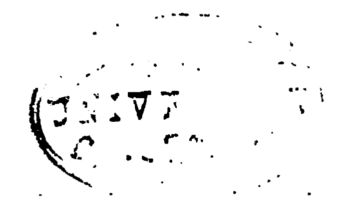
PTOLEMÄUS DE ANALEMMATE.

VON

J. L. HEIBERG

IN KOPENHAGEN.

MIT 10 TEXTFIGUREN.



Dass der bekannte Mailänder Palimpsest Ambros. L 99 sup. saec. VII u. a. auch Ueberreste des sonst verlorenen griechischen Textes von Ptolemäus' Schrift *Περὶ ἀναλήμματος* enthält, habe ich in dieser Zeitschrift (Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik V S. 4 Anm. ** Schluss) mitgetheilt. Während eines längeren Aufenthalts in Mailand habe ich jetzt das meiste von diesen Bruchstücken entziffert, soweit es mir ohne Reagentien möglich war, und lege hier meine Lesung vor, ohne vorläufig auf die vielen Fragen einzugehen, wozu das recht schwierige Schriftchen Anlass giebt; zu einem Verständniss im allgemeinen reicht der Commentar von Commandinus aus (Claudii Ptolemaei liber de analemmate a Federico Commandino Urbinate instauratus et commentariis illustratus, qui nunc primum eius opera e tenebris in lucem prodit. Ejusdem Federici Commandini liber de Horologiorum descriptione. Romae MDLXII. Apud Paulum Manutium Aldi f., 4to); vgl. auch Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne II S. 458 ff.

Ueber die Art der Herausgabe bemerke ich nur folgendes. Die unsicheren, nur mit Wahrscheinlichkeit zu erkennenden Buchstaben sind in ( ) eingeschlossen. Wo absolut nichts zu lesen war, habe ich mit Hülfe der lateinischen Uebersetzung den Text restituirt; meine Ergänzungen sind in 〈 〉 gesetzt; dabei ist von einer Zeile von 32 bis 36 Buchstaben ausgegangen. Wo die Ergänzung mir unsicher schien, habe ich den Defect durch Punkte angedeutet; die Zahl der fehlenden Buchstaben lässt sich nach der angegebenen Mittelzahl ungefähr berechnen. | bedeutet Schluss der Zeile in der Handschrift, ‖ Schluss der Seite; die Seitenzahlen der Handschrift sind am Rande angegeben; auf die Seite kommen 28—29 Zeilen.

Dem griechischen Text gegenüber (wo er fehlt, allein) gebe ich die lateinische Uebersetzung Wilhelms von Moerbek nach cod. Ottobon. lat. 1850 saec. XIII fol. 55—57 (nach der modernen Zählung der Blätter fol. 62—64) nach einer Photographie. In der angeführten Abhandlung habe ich S. 8 ff. nachgewiesen, dass wir in dieser Handschrift die eigenhändige Originalübersetzung Wilhelms vor uns haben, eine Auffassung, die auch durch dieses Stück ihre Bestätigung findet; ich habe deshalb alles so gegeben, wie es in der Handschrift steht, bis auf einige orthographische Kleinigkeiten; nur habe ich natürlich die vielen Compendien aufgelöst. Die Figuren sind

nach denen der Handschrift bis auf die Buchstaben calquirt. Dem Wilhelm lag eine griechische Handschrift vor, wie die Randbemerkungen zeigen, ohne Zweifel die in dieser Zeitschrift Hist. Abtheilung XXXVII S. 97 nachgewiesene (in der Bibliothek des Papstes von 1311 nr. 608).

Nach dieser Handschrift hat Commandinus die Uebersetzung herausgegeben (Abhandl. z. Gesch. d. Math. V S. 4 Anm. **), aber stark daran corrigirt, wie er selbst in seiner Vorrede sagt (locos ... deprauatos, quantum coniectura sum assecutus, restitui ac correxi; deinde quaecunque deerant, iis suppleui, quae cum antecedentibus Ptolemaei sententiis consentire iudicaui. quamuis nihil pro certo affirmauerim etc.); die Aenderungen gehen meist darauf hinaus, das mittelalterliche Latein des Uebersetzers etwas classischer zuzustutzen, was zuweilen nicht ohne missverständliche Aenderung des Sinnes abgeht. Jedenfalls haben diese Aenderungen für unsere Zwecke keinen Werth; ich habe sie daher nicht aufgeführt, von einigen wirklichen Emendationen abgesehen, die zur Erleichterung des Verständnisses in den Anmerkungen erwähnt sind. Ich mache besonders darauf aufmerksam, dass die Tabelle am Schluss, so wie sie hier nach der Handschrift gegeben ist (an den vier leeren Stellen 2, 3, 4, 5 ist natürlich $^2/_3 = 40'$ einzusetzen; *Γο* kommt für $^2/_3$ in den Handschriften der Syntaxis oft vor; es ist eine Verstümmelung von *Γβ* $= \gamma^{\beta}$), dem richtigen bedeutend näher kommt (vgl. Delambre II S. 471).

Zum Schluss schalte ich noch eine Beschreibung des palimpsesten Theils des Ambrosianus L 99 sup. ein.

Die obere Schrift ist aus dem VIII. Jahrhundert, die untere aus dem VII.; sie ist sehr schwer lesbar, wo die obere Schrift mit ihr zusammenfällt, viel besser geht es, wo diese zwischen den ausradirten Zeilen steht. Angelo Mai hat mit seiner Galläpfeltinctur grossen Schaden angerichtet; sie ist jetzt dunkelbraun geworden und hat auch die gegenüberstehenden Seiten überklekst. Die rescribirten Seiten sind:

113—114 (114 nicht beschrieben), veröffentlicht von Belger Hermes XVI S. 261 ff., verbessert von Cantor-Wachsmuth ebend. S. 637 ff. und von mir in dieser Zeitschrift XXVIII S. 121 ff., wo sie dem Anthemius vindicirt werden. Eine Nachvergleichung hat folgendes ergeben: S. 113, 23 *προυδεδει|γμένον* d. i. *προϋποδεδειγμένον*. 28 sicher: *οἱ μὲν οὖν* (Compendium) *παλαιοί*, darauf *δ..λαβον*, also *δ⟨ιέ⟩λαβον*. 31 ist zwischen dem unsicheren *ἐν τῷ* und dem ganz klaren *πρὸς* noch ein *Γ'* (*γὰρ*) zu erkennen, also vielleicht: *τοῦτο δὲ ψεῦδος Ἀπολλώνιος μάλα δεόν* | *⟨τως λέγει⟩· (ἐν τῷ γὰρ) πρὸς τοὺς κατοπτρικοὺς κτλ.*, was bei den vielen Compendien zur Buchstabenzahl stimmt. S. 114, 23 ist zwischen

den sicheren Worten *οὖσα* und *δὲ τοῦ* nur für 4 Buchstaben Raum; *αἵ* ist nothwendig, mein Supplement *ὑπόκειται* also kaum richtig, wenn nicht *υ'κ^τ* geschrieben werden konnte; das *Δ* bei Belger habe ich nicht gesehen. 24 steht *τῆς ηζεθ καὶ τῆς ε̄γ̄ γ^ω*, also *τῆς ηζ εὐθείας καὶ τῆς ηγ γωνία* ohne *περιφερείας*. 25 ist *εὐθείας* nicht *ευ^θ*, sondern *ε^υ* geschrieben. 29 ist *περιενεχθέν* deutlich zu lesen.

117—118 unten herausgegeben (*περὶ ἀναλήμματος*).

119—120 ebenfalls; 119 fast unlesbar wie 118 gegen Ende.

123, fast unlesbar, weil die Schrift von S. 124 stark durchgeschlagen hat. Am Anfang lese ich: *ειργασμενο(ς οια) ε' ρ ⁒* [1]) *ως ο ε̄γ̄ κιων* ⫪ *τ*[2]) *α(ι) κιο|να ο α' ϡ*[3]) *ρ̄γ̄ κυβος* ⫪ *τ' α' ϡ*[4]) *ν̄ι̅ κυβον*⁒ *η ρ̄γ̄* ⫪ *τ̄* | . . *φανερον* . . . *ϛ*[5]) *και ως ο εγ κιων* ⫪ *τ' α̅ι̅ κιονα* | . . . . ⫪ . . . . . ⫪ . . . *τον αυτον τω δοθς*[6]) | . . . . | *τον τω δο*[7]). *ως δε οι ρ̄η̄ α̅ι̅ κιονες προς αλληλους* | . . . *και οι ν̄α̅* . . . . | Folgt Fig. 10. Zu ⁒ am Rande: ⁒ *ως δε ο α' τῆς ρ̄γ̄ κυβος προς τ' α' της ν̄ι̅ κ^υ*. Wie dieser Satz mit S. 124 in Verbindung gesetzt war, ist mir unklar.

124, nicht rescribirt, = Wattenbach, Scripturae Graecae specimina[2] tab. VIII.

129—130, s. unten (*περὶ ἀναλήμματος*).

139—140 ebenso.

143—144 ebenso.

157—158 ebenso.

189—190 (das Blatt ist umzukehren), fast ganz unlesbar, namentlich 189. Auf S. 190 lese ich:

. . . . *τινα τροπον επεσκεπται ον* . . . . . | . . . . *τας τε καταβατικας και αντι* . . . . | . . . *σκιους*; nach der Mitte: . . . *του τε μεσημβρινου και του* . . . . . | *νου ουν οτι* . . . . | Schluss: . . . *του κατα κορυφην επι τελ* . . | — was dem Ptolemäus ähnlich sieht, doch finde ich in der Uebersetzung keine entsprechende Stelle. Sollte sie am Ende unvollständig sein, wie Delambre vermuthete?

195—196 (umzukehren), 195 unlesbar, auf 196: . . . *τουτεστιν εως αν η ακτις συμπεση* | *τη κοινη αυτων τομη τουτου δε γινομ⟨ενου⟩* . . . . *ενδοτερον γιγνε⟨ται⟩* — Ptolemäus?

197—198, 198 unlesbar, 197 Anfang: *ε' ϡ ν̄δ̄ =' εφ* . . . . . *⟨β⟩αρυ και παλιν κ'* . . . | *μ̄ξ̄* . . . *τα των* . . . . . . | *λαβοντες και δια τ(ων)*

---

1) d. i. *ἐκ(ε)ὶ οὖν ἐστιν*. 2) *πρὸς τὸν*. 3) *ἀπὸ τῆς*. 4) *πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς*. 5) *ἔσται*. 6) *δοθέντι*. 7) *δοθέντι*.

.... γενομεν̂ ση^μ | .... κανονιω δι αυ | .... α γνωμων | . δε η δ . του ημικυ(λ) . η γδ .... | ... ποιας δε λου .... | . λομεθα δε .....; etwas weiter unten | λομεθα δια....

235—236, 235 unlesbar, 236 Anfang: θω ε .... | ..... ημερα του ηλιου με ...... | ρον τμημα του οριζοντος ετι δε ...... τες | του εαξ λαμβανομεν .... |; weiter unten: οι μεν γαρ .... | und | φερωμεν ... . | το νω .... | — Ptolemäus?

241—242, 242 unlesbar, 241: ...... ας | .... εν | .... απεχει... .... τερον ε(μ) | τη .... (ενπ) α|ροδω ...... του ισημε|ρινου .... α εμαυτο(υ) |; weiter unten: ⟨π⟩αροδους και τα επι | — Ptolemäus?

249—250, 249: ... αμφοτερων των πλευρων ..... | ... λλη ... ου και του φεροντος συνκε | κ ... μεν ..... εν μονω τω φεροντι προς τα | του μεσημβρινου κατα τα εξαρματα των | πολων παραφορας απαρεγκλιτων | — Ptolemäus?

251—252, 251: εντομας ο τε πολευων και ο ζωδιακος ωστε | προς ορθας τ ακριβως ειναι και μιαν επιφα|νειαν ποιειν των τε κυρτων εμμερει και των | κοιλων επιφανειων τη αυτη μεν ... | — Ptolemäus?

Aus den bezeichneten Seiten ist vielleicht mehr herauszubringen.

Der grosse Unterschied in der Verwendung der Compendien, indem im Ptolemäus (sowie S. 190, 196, 236, 241, 249, 251, die dadurch ebenso wie durch den Inhalt ihre Zugehörigkeit beweisen) fast nur der ν-Strich am Schluss der Zeile zur Verwendung kommt, während im „Anthemius" (S. 113—14, 123—24, 197) allerlei Compendien besonders zahlreich sind, erklärt sich wohl nur so, dass der spätere Schreiber zwei verschiedene Handschriften zerschnitt und verwendete. Dass man also im VIII. Jahrh. zwei solche alten Handschriften griechischer Mechanik und Astronomie in Italien besass und für werthlos hielt, ist eine interessante Thatsache.

Claudii Ptolemei liber de analemmate incipit.

Consideranti mihi, o Syre, angulorum acceptorum in locum gnomonicum quod rationale et quod non habitum quidem virorum illorum in lineis accidit admirari etiam in hiis et ualde acceptare, non coattendere autem ubique, et eam que secundum naturam in metodis consequentiam, ipsarum rerum non solum clamantium, quod et naturali theorie aliqua coassumptione magis mathematica et mathematice magis naturali, nullatenus exprobrauimus; non enim licitum est quod tale uiro amanti addiscere pure, sed obseruare, ut non propter dictam cogitationem unumquemque tractatuum ali-

qualiter imperfectiorem accidat fieri. qve itaque certitudinaliter deprehensa sunt michi[1]) secundum expositum locum, misi tibi consideraturo summatim, si quid tibi uidemur ad intellectum coauxisse et ad rationabilitatem suppositionum et ad promptitudinem usus eius qui per[2])

Qvoniam igitur eas que secundum unamquamque molem dimensiones consequens est determinatas esse et positione et multitudine sicut et magnitudine, declinationum autem que ad rectos angulos sole hunc habent modum; omnes enim alie et indeterminate secundum speciem et infinite secundum numerum; consequtum est tres solas esse tales secundum unamquamque molem dimensiones, quoniam et solas tres rectas ad rectos angulos inuicem constitui possibile est, plures autem hiis est impossibile; propter quod quidem et in spera sole tres diametri construuntur ad rectos angulos inuicem, et maximi circuli soli tres in recto angulo faciunt declinationes ad inuicem acceptorum in spera mundi, et uno quidem ipsorum intellecto secundum distinguentem quod sub terra emisperium ab eo quod super terram, uocatum autem orizontem, secundo autem penes distinguentem orientale emisperium ab occidentali, uocatum autem meridianum, reliquus et tertius erit penes separantem boreale emisperium ab eo quod ad meridiem, uocatum autem secundum verticem. et dictarum autem diametrorum communis quidem orizontis et meridiani uocatur meridiana, communis autem sectio meridiani et eius qui secundum verticem uocatur gnomon, communis autem sectio eius qui secundum verticem et orizontis uocetur equinoctialis, quoniam et ipsius equinoctialis ad ipsos fit communis sectio. simul translatis itaque cum sole hiis circulis circa manentes communes sectiones ut circa axes duas quidem possibile est intelligere lationes orizontis quidem circa equinoctialem diametrum ut ad id quod super terram et sub terra et circa meridionalem ut ad orientem et occasum, meridiani autem circa meridionalem diametrum ut ad ortus et occasus et circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem, eius autem qui secundum verticem circa diametrum gnomonis ut ad aquilonem et meridiem et circa equinoctialem ut ad id quod super terram et sub terra. sed quoniam non est possibile eundem simul duabus ferri lationibus, conuenientiorem et priorem duarum dictarum assignandum unicuique, hoc est orizonti quidem eam que circa equinoctialem diametrum, ut rursum determinet positionem ad id quod sub terra et super terram, meridiano autem eam que circa meridianum, ut notet distinctionem que ad ortum et occasum, ei autem qui secundum verticem eam que circa gnomonem, ut insinuet transitum ad aquilonem et

1) Hier durchstrichen: misi tibi. 2) Folgt eine Lücke, am Rande: ἀναλήμματ°.



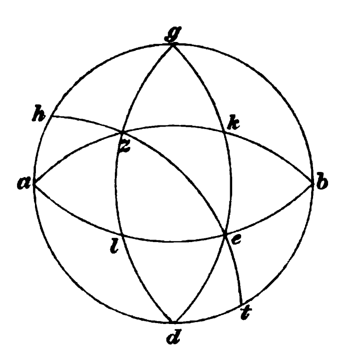
meridiem. facit autem orizontis quidem latio circulum, quem uocamus ektimoron, id est sex partium, quia altitudinem usque ad sextam horam manifestat, latio autem meridiani circulum, quem uocamus horarium, quia longitudini que secundum unamquamque horam comprogreditur, latio autem eius qui secundum verticem circulum, quem uocamus katauaticum, id est descensiuum, quia notificat descensionem ab altissimo ad humillimum. rursum unusquisque dictorum circulorum in coexaltatione cum solari radio super terram facit duas declinationes, quibus datis et positio radii determinatur, quoniam una ad tale non sufficit, harum autem alteram quidem a rectis contentam, scilicet a delata et manente, hoc est a radio et a diametro, circa quam fertur, alteram autem ab ipsis planis[1]) similiter a moto et a manente, ita ut duorum circulorum utriusque una sola declinationum data determinetur et positio radii. et eorum quidem qui ab[2]) ektimoro circulo fiunt angulorum consistentem quidem apud radium et apud diametrum equinoctialem non uidemus ab antiquis acceptum in locum gnomonicum, eum autem, qui ab ipsius declinatione ad orizontem fit, uocant ektimoron. factorum autem a circulo horario duorum angulorum eum quidem, qui apud radium et apud diametrum equinoctialem consistit, uocant horarium, eum autem qui ab ipsius declinatione ad meridianum in plano eius qui secundum verticem. factorum autem a circulo descensiuo duorum angulorum hic quidem apud radium et apud gnomonem consistit iterum[3]), hic autem ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem; utuntur autem non hiis, sed pro angulo quidem, qui a gnomone et a radio continetur, utuntur deficiente ad unum rectum et uocant ipsum descensiuum, pro angulo autem, qui ab ipsius declinatione ad eum qui secundum verticem continetur, utuntur eo, qui constituitur a declinatione ipsius ad meridianum, vocant autem et hunc antiskion, id est contraumbralem. sextum autem angulum inserunt pro relicto eum, qui fit ab equinoctiali diametro et a communi sectione circuli horarii et equinoctialis, quem uocant in equinoctialis plano, et quidem equinoctiali non in omni climate eandem seruante positionem aliter passus est et orizon et meridianus et qui secundum verticem.

Ut autem sub uisu nobis magis cadat consequentia angulorum et quod supponitur, sit meridianus quidem circulus qui *abgd*, recti autem super ipsum et orientales semicirculi orizontis quidem qui *aeb*, eius autem qui secundum verticem qui *ged*, et supposita positione radii alicuius penes *z* describantur per ipsum trium circulorum orientales semicirculi circumdelati cum radio circa proprias diametros, ipsius quidem orizontis *aeb* facti ektimori

---

1) Hier similiter getilgt. 2) ex ausgelöscht. 3) Unsicher.

semicirculus *hzet* circa diametrum que apud *e* et per oppositum sibi diametraliter, ipsius autem meridiani *agb* facti horarii semicirculus *azkb* circa diametrum que per *a* et *b*, ipsius autem *ged* qui secundum verticem facti descensiui semicirculus *gzd* circa diametrum que per *g* et *d*. et accipiantur differentie angulorum in periferiis propriorum circulorum subtensis unicuique propter simpliciorem ostensionem. angulis quidem itaque, quos dicebamus constitui a radio et ab axe, periferie subtenduntur que *ze* ektimori periferia et que *za* horarii et que *zg* descensiui, angulis autem, qui fiunt a declinationibus planorum manentis circuli et transcidentis ipsum subtenduntur que *ah* meridiani periferia continens declinationem orizontis et ektimori et que *gk* eius qui secundum verticem periferia continens declinationem meridiani et horarii et que *el* orizontis periferia continens declinationem eius qui secundum verticem et descensiui.



Huius itaque consequentie subicientis angulosque et periferias conuenientes nature circulorum unam secundum unumquemque manentium et motorum antiqui ipsam quidem *ez* ektimori praetermiserunt, ut diximus, ponentes pro ipsa, quem uocant in equinoctialis plano, ipsam autem *az* seruant et uocant proprie horariam, pro ipsa autem *zl* assumpserunt[1]) nominantes ipsam descensiuam et rursum ipsam quidem *ah* seruant et uocant ektimoron, similiter autem et ipsam *gk* uocantes ipsam in plano eius qui secundum verticem, pro ipsa autem *el* assumunt ipsam *al* uocantes ipsam antiskion id est contraumbralem. differentia quidem igitur rationabilitatis penes id, quod supponitur, ad eos qui ante nos manifesta.

Qvoniam autem omnis angulus facit aliquas magnitudines ex utraque parte declinationis et quandoque quidem equales, ut in positione recta, quandoque autem inequales, ut in reliquis, necessarium utique erit et in angulis expositis aut periferiis condeterminari principium secundum unamquamque speciem, a quo acceptio et contrarietates declinationum earum que ad ortus uel occasus et earum que ad aquilonem uel meridiem. proposito igitur nobis existente acceptiones et expositiones et appellationes periferiarum facere secundum ordinem a ratione productum consequens erit et suppositionibus determinatio propria secundum unamquamque speciem. nominationes enim facimus ab ipsis circulis, quorum sunt periferie, et uocamus eas quidem que in motis ektimoriales et horarias et descensiuas,

1) Hier können (am Schluss der Zeile) noch zwei Buchstaben haben stehen sollen; vielleicht ist am Rande etwas verwischt. Zu lesen: autem *zg* assumpserunt *zl*.

eas autem que in manentibus similiter meridionales et secundum verticem et orizontes. et in magnitudinibus semper eligimus acutum angulum consistentium ex utraque parte, si non sint recti, et principia acceptionum facimus earum quidem que in circulis motis ab altero polorum circulationis, ad quam declinatio, hoc est in hiis quidem que ipsius ektimori[1]) a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem ab occidentali, in hiis autem que horarii a termino diametri meridiani, quando quidem positio radii fuerit borealior circulo qui secundum verticem ab arctico, quando autem australior, a meridiano, quod et ipsum oportet obseruare, quoniam non eandem habet determinationem; in hiis uero que descensiui solum a termino gnomonis qui super terram. earum autem que in circulis manentibus ab altero termino tanquam communi sectione uniuscuiusque et suppositi plani, ad quem faciens angulum declinatio, hoc est in hiis quidem que meridiani a[2]) termino recte meridiane radio quidem existente borealiori quam circulus qui secundum verticem ab arctico, australiori autem a meridiano; et hoc enim rursum oportebit determinare; in hiis que eius qui secundum verticem a termino qui super terram gnomonis solum, in hiis autem que orizontis a termino diametri equinoctialis ante mediationem quidem celi ab orientali, post mediationem autem celi ab occidentali vel borealiori quidem existente radio quam circulus qui secundum verticem ut ad aquilonem, australiori autem ut ad meridiem; quod et ipsum oportebat[3]) obseruare, et quia uniuersaliter eas que ex utraque parte positiones earum, que in ortibus uel occasibus determinantur, dico autem earum que horarii et earum que descensiui et earum que eius qui secundum verticem, mediatio celi simpliciter designat, earum autem que versus aquilonem aut meridiem, dico autem earum que descensiui rursum et earum que ektimori et earum que meridiani et earum que orizontis, positio radii ex utraque parte circuli qui secundum verticem, et has ipsas non habentes unum et eundem terminum.

Premissis itaque hiis exponemus instrumentales acceptiones secundum unamquamque speciem subiacentium nobis angulorum exempli gratia, ut promptam habeamus methodum, que erit in .[4]) prius autem[5]) secundum se superueniemus super anguli[1]) praetermissi ab antiquis, quem nos uocamus ektimorum, ac-

119 (fast ganz unlesbar)
τ⟨ή⟩(ν) τῆς παραλελειμμένης τοῖς πα-
120 λαιοῖςγωνίας,[1])|⟨ἣν⟩(ἡ)μ(εῖς)καλοῦμεν

1) Hier scheint ein *i* ausradirt. 2) ab die Hds. 3) Aus oportet corrigirt. 4) Lücke freigelassen, am Rande: *αναλημματε*. 5) Ein *δε* ist im Ambros. S. 119 am Anfang der Zeile sichtbar.

1) *γωνιᾶ*.

1) Folgt eine Rasur von 1 Buchstaben.

ἐκτήμορον, λῆψιν[1] ⟨ὀργ⟩αν⟨ι⟩ | κ⟨ήν⟩, ⟨ἐπει⟩ δὴ καὶ τὴν ἀπόδειξιν[2] ταύτης ἀναγκαῖ|ον ἂν εἴη συνάψα(ι) τ⟨οῖς⟩[3]) ἄλλως ἐκείνοις ἐ(φ)ω|δευμέν⟨οις⟩.

Ὅτι μὲν οὖν ἐν ταῖς ἰσημε|ρίαις αἱ ἐπιζητούμεναι γωνίαι αἰεὶ αἱ αὐταὶ | (γ)ί(γ)νονται ταῖς ἐν τῷ τοῦ ἰσημερινοῦ ἐπιπέ|δῳ, δῆλον αὐτόθεν· ἐφαρμόζει γὰρ αὐτῷ[4] τό|τε δι' ὅλης τῆς ἐπιφορᾶς καὶ ὁ ἐκτήμορος κύκλος ἴσας[5] δὲ[6] ἀλλήλαις ποιοῦντι τάς τε καθ' ἑ|κάστην ἰσημερίαν ὡριαίαν περιφέρειαν ⟨ἐκ⟩ πεντεκαίδεκα χρόνων συνισταμένα(ς καὶ) | τὰς ἀκολούθους αὐταῖς γωνίας ἐκτημόρια πε|ριεχούσας μιᾶς ὀρθῆς.

Ἕνεκεν δὲ τῶν λοιπῶν[7] | μηνιαίων ἔστω μεσημβρινὸς κύκλος ὁ αβγδ, | ἐν ᾧ ὁρίζοντος μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς | δὲ αὐτῇ καὶ κατὰ τὸν γνώμονα ἡ γδ, καὶ κέν|τρον μὲν τῆς ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἑνὸς δὲ | τῶν βορειοτέρων[8] τοῦ μεσημβρινοῦ μηνι|αίων παραλλήλων ἡ ζηθ διάμετρος, ἐφ' ἧς ἀ|νατολικὸν ἡμικύκλιον ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ | νοείσθω[9] τὸ ζκθ, καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ζθ|ἡ κη, ὥστε τὸ ζκ τμῆμα τοῦ παραλλήλου[10] ποιεῖν | ὑπὲρ γῆς, καὶ ἀποληφθείσης[11] τῆς κλ περιφερεί|ας ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν (ζ)θ ἡ λμ, | καὶ κέντρῳ τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μλ εἰ|λήφθω σημεῖον ἐ⟨πὶ⟩ (τ)οῦ μεσημβρινοῦ τὸ ξ|,

ceptionem instrumentalem, quoniam et demonstrationem huius necessarium utique erit coniungere hiis, que ab illis aliter tractata[1] sunt. quod quidem igitur in equinoctiis anguli inquisiti semper iidem fiant hiis qui in plano equinoctialis, palam ex se; congruit enim ipsi quod per totam circulationem et circulus ektimorus facienti equales inuicem periferias que secundum unamquamque equinoctialem horam ex 15 gradibus consistentes et angulos ipsi consequentes continentes ektimoria, id est sextas partes unius recti.

Gratia autem reliquorum mensilium esto meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diametrus qui *ab*, ad angulos autem rectos ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, unius autem parallelorum mensilium magis borealium quam equinoctialis diametrus sit que *zht*, super quam orientalis semicirculus in eodem plano intelligatur qui *zkt*, et ducatur ad rectos angulos ipsi *zt* que *kh*, ita ut *zk* portio parallelli sit super terram, et absumpta periferia *kl* ducatur perpendicularis ab *l* super *zt* que *lm*, et centro quidem *m*, distantia autem que *ml* accipiatur signum in

1) ληψειν. 2) αποδιξιν. 3) των? 4) αυτων? 5) ισαις. 6) Zu tilgen? 7) λοιπῶ. 8) βορειωτερων. 9) νοεισθαι. 10) παραλλον. 11) απολειφθισης.

1) trasctata.

καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ[1]) ελ καὶ ἡ μν καὶ ἡ εξ | καὶ ἡ μξ; ἀνήχθω τε τῇ
139 εν πρὸς ὀρθὰς ἡ εο. ‖ λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν (ο)εξ[2]) γωνία ἴση ἐστὶν τῇ γωνίᾳ[3]) | τῇ ζητουμένῃ. νοείσθω γὰρ ἐπεστραμμένον ¦ τὸ ζλθ ἡμικύκλιον ἐπὶ τὴν οἰκείαν θέσιν |, τουτέστιν τὴν ὀρθὴν πρὸς τὸν τοῦ μεσημβρι|νοῦ ἐπίπεδον, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ ε ὀρθὴ πρὸς | τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀντὶ τῆς ἰσημερινῆς διαμέ|τρου ἡ επ. ὅτι μὲν οὖν ὀρθῆς οὔσης καὶ τῆς λμ|(π)ρὸς τὸν μεσημβριν(ὸ)ν αἱ εν καὶ μλ καὶ επ ⟨εὐθεῖαι⟩ | ⟨εἰσιν⟩ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ⟨ὀρθῷ⟩ (π)ρ(ὸ)ς τὸ τοῦ (αβγδ) | ἐπίπεδον,[4]) δῆλον. ⟨ὁμοίως⟩ δέ, ὅτι καὶ ἡ εν[5]) κ(ο)ι¦νὴ τομή ἐστιν τοῦ ἐκτημόρου κύκλου καὶ | τοῦ ἰσημερινοῦ, ἡ δὲ λε ἐπ' εὐθείας τῇ ἡλια|κῇ ἀκτῖνι,[6]) ἡ δὲ ἐπιζητουμένη γωνία, πε|ριεχομένη δὲ ὑπὸ τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς ἰσημε|ρινῆς διαμέτρου ἡ ὑπὸ λεπ. δεικτέον (δέ,[7]) ὅ|τι) ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ξεο γωνία (τῇ ὑπὸ) ⟨λεπ⟩. | ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ελ τῇ ⟨ε⟩ξ, ⟨ἡ⟩ δὲ ⟨μλ τῇ | μξ⟩, κοινὴ δὲ ἡ εμ, κ⟨αὶ⟩ . . . .,[8]) ⟨ἡ ὑπὸ | μελ⟩ τῇ ὑπὸ μεξ[9]) ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ μεπ | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν μεο,[10]) ἐπεὶ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν εμλ· | καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν λεπ λοιπῇ τῇ ὑπὸ μεξ, | τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ξεο, ἴση ἐστίν· ὅπερ | ἔ(δ)⟨ει δεῖξαι⟩.[11])

β. Ἑξῆς δὲ καὶ τὰς κοινὰς ¦ αὐτῶν λήψεις ἐκθησό¦μεθα τὰς γινομένας[12]) ¦

meridiano, quod sit *x*, et copulentur que *el*, *emn* et *ex*[1]) et *mx*, ducatur autem ipsi *en* ad rectos angulos que *eo*. dico, quod angulus qui sub *xeo* est equalis quesito. intelligatur enim semicirculus *zlt* conuersus ad propriam positionem, hoc est rectam ad planum meridiani, et producatur ab *e* recta ad idem planum pro equinoctiali diametro que *ep*. quod quidem igitur et ipsa *lm* existente recta ad meridianum que *en* et *ml* et *ep* recte sunt in uno plano recto ad *abgd*, palam. similiter autem quod[2]) et que quidem *en* est communis sectio circuli[3]) ektimori et meridiani, que autem *el* in recta ad solarem radium, quesitus autem angulus, contentus autem a radio et a diametro equinoctiali qui sub *lep*. demonstrandum igitur, quod angulus qui sub *xeo* est equalis ei qui sub *lep*. quoniam enim equalis est[4]) que quidem *el* ipsi *ex*, qve autem *ml* ipsi *mx*, communis autem que *em*, et angulus ergo qui sub *mel* est equalis ei qui sub *mex*. rectus autem qui sub *mep* et qui sub *meo*, quoniam et qui sub *eml*; et reliquus ergo qui sub *lep* reliquo ei qui sub *mex*, hoc est ei qui sub *xeo*, equalis est; quod quidem oportebat demonstrare.

Consequenter autem et communes ipsorum acceptiones exponemus, que

---

1) αι. 2) Oder εξο. 3) γ̃ (mit ω). 4) επιπεδω. 5) Lies ἡ μὲν εν. 6) ακτειvη. 7) δε unsicher; lies δή. 8) Undeutliche Spuren, etwa λιπ.(ιαν) . . . . ξ. 9) μξ(ε). 10) μεξ. 11) Hier Fig. 2 (t = ϑ). 12) γενομενας.

1) So, am Rande: *tz*. 2) Uebergeschrieben. 3) Folgt ex getilgt. 4) ei̥.

140 χωρὶς ἐπί τε τοῦ ἰση ‖ μερινοῦ καὶ πάλιν ἐπί τινος τῶν βορειοτέρων | ἢ νοτιωτέρων αὐτοῦ[1]) παραλλήλων. ἔστω (τοίνυν) | μεσημβρι(ν)ὸς κύκλος ὁ αβγδ, ἐν ᾧ ὁρίζοντο(ς) | μὲν διάμετρος ἡ αβ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῇ καὶ | κατὰ τὸν γνώμονα ἡ ⟨γδ⟩ καὶ κέντρον (τῆς) | ἡλιακῆς σφαίρας τὸ ε, ἡ δὲ τοῦ (κλίμ)⟨ατος⟩ | περιφέρεια ἡ γζ, καὶ διήχθω πρότερον | ἰσημερινὴ διάμετρος ἡ ζεη, ἐφ' ἧς τὸ ⟨ζθη⟩ | ἡμικύκλιον (κεί)σθω μὲν ἐν τῷ τοῦ μεσημ|βρινοῦ ἐπιπέδῳ, νοείσθω δὲ ἐν τῷ πρὸς ἀ|νατολὰς ἡμισφαιρίῳ, γραφέτω τε ὁ ἥλιος | πρὸς αἴσθησιν ἐν τῇ μιᾷ περιπολήσει τούτων[2]) | τε καὶ τῶν ἄλλων μηνιαίων (ἕκασ)τον, καὶ ἀνα-|χθείσης (τ)ῆς ε⟨θ⟩ καθέτου πρὸς τὴν ζη, ὥστε (τὸ) ζ(θ) | τεταρτημόριον ποιεῖν ὑπὲρ γῆ(ν). ἀπειλήφθ(ω)|(ἡ) θ(κ) περιφέρεια δοθεισῶν ὡρῶν, καὶ προ|κείσθω τὰς ἐν τῇ θέσει ταύτῃ γωνίας λαβεῖν.[3]) | ἤχθωσαν μὲν δὴ κάθετοι ἀπὸ μὲν τοῦ κ ἐπὶ|τὴν ζη ἡ κλ, ἀπὸ δὲ τοῦ λ ἐπὶ μὲν τὴν ε(α) | ἡ μλν, ἐπὶ[4]) δὲ τὴν εγ ἡ ξλο,[5]) καὶ τῇ (λ)κ ἴσαι | κείσθωσαν ἥ τε ξπ καὶ ἡ ρμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν[6]) | ἡ εκ καὶ ἡ εν καὶ ἡ εο[7]) καὶ ἔτι ἡ επσ καὶ ε(ρτ). | ὅτι μὲν οὖν (ν)οτιωτέρα ἐστὶν ἡ ἀκ(τ)ὶς τοῦ | κατὰ κορυφὴν κύκλον

1) νοτειοτερων ων. 2) τουτῶ. 3) λαβεῖ. 4) επει. 5) ξολ. 6) επεζευχθωσᾱ. 7) εθ?

fiunt seorsum super equinoctialem et rursum super aliquem boraliorem aut australiorem ipso parallelorum mensilium. sit igitur meridianus circulus qui *abgd*, in quo orizontis quidem diameter qui *ab*, ad rectos autem ipsi et secundum gnomonem que *gd* et centrum quidem solaris spere *e*, climatis autem periferia que *gz*, et producatur prius equinoctialis diameter que *zeh*, super quam semicirculus *zth* iaceat quidem in plano meridiani, intelligatur autem in emisperio ad orientem, describaturque sol ad sensum in una circumuolutione horum et aliorum mensilium parallelorum,[1]) et producta que *et* perpendiculari ad *zh*, ita ut quod *zt* tetartimorion, id est quarta pars, sit supra terram. absumatur que *tk* periferia datarum horarum, et intendatur angulos qui in hac positione accipere. ducantur itaque perpendiculares a *k* quidem super *zh* que *ek*, ab *l* autem super *eh* que *mln*, super *eg* autem que *xlo*, et ipsi *lk* equales iaceant que *xp* et que *rm*, et copulentur que *ek* et *en* et *eo* et adhuc que *eps* et *erc*. quod quidem igitur australior est radius circulo qui secundum verticem per

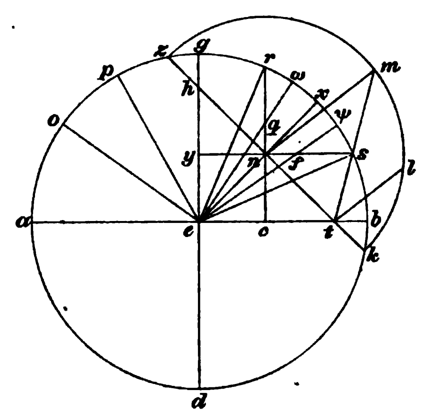
1) Hierzu am Rande: ἐκαϛ.



δι' ὅλης τῆς ὑπὲρ γῆν[1]) | περιφορᾶς ἐπί τε τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τῶν[2]) | νοτιωτέρων[3]) αὐτοῦ παραλλήλων διὰ τὸ | τὴν κλίσιν τῆς σφαίρας ἐν τῇ καθ' ἡμᾶς | οἰκουμένῃ τετράφθαι πρὸς μεσημβρίαν, | καὶ δεῖ τὰς προσνεύσεις ἀκολούθους αὐτῆς ‖

totam circulationem supra terram in equinoctiali et in parallelis borealioribus[1]) ipso, quia inclinatio spere[2]) in habitata secundum nos versa est ad meridiem, et oportet adnuitiones consequentes positioni ipsius determinare, manifestum.

continet autem angulus qui sub *ekl*, hoc est qui sub *tek*, angulum[1]) circuli ektimori, qui sit idem, ut diximus, hic ei qui in plano equinoctialis, angulus autem qui sub *aen* eum qui horarii, qui autem sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *aez* eum qui meridiani, qui autem sub *gec* eum qui orizontis.



Exponatur itaque rursum qui *abgd* meridianus cum diametris *ab* et *gd*, et protrahantur in ipso diametri parallelorum mensilium borealiorum equinoctiali *zhtk*, super quam similiter describatur semicirculus orientalis qui *zlk*, et ad rectos angulos ipsi *zk* ducatur que *tl*, ita ut *zl* portio paralleli sit super terram. absumpta autem *lm* periferia datarum horarum ducatur ab *m* perpendicularis super *zt* que *mn* ipso *n* faciente uidelicet positionem radii borealiorem quidem circulo qui secundum verticem, quando fuerit super *ht*, australiorem autem, quando fuerit super *zh*. protrahatur etiam rursum que *enx*, et recta ad ipsam erigatur que *eo*. accipiantur igitur in meridiano signa tria, centro quidem *n*, distantia autem *mn* quod *p*, centro autem *t*, distantia uero *tm* quod *r*, centro etiam *h*, distantia autem *hm* quod .[2]) deinde productis *rnc* et *sny* — ipse enim sunt per *n* accepte perpendiculares ad *eb* et *eg* — absumantur in ipsis similiter equales ipsi *mn* que *ynf* et *cnq*, et copulentur que *ep* et *er* et *es* et *et* et adhuc que *efψ* et que *eqω*. continet itaque et hic angulus quidem qui sub *peo* angulum circuli ektimori, qvi autem sub *ber* eum qui horarii, qvi uero sub *geo* eum qui descensiui, et rursum qui quidem sub *bex* eum qui meridiani, qvi autem sub *geψ* eum qui eius qui secundum verticem,

1) γῇ. 2) τῶ. 3) νοτ(ει)οτερων (muss heissen: βορειοτέρων).

1) Am Rande: australioribus in greco. 2) ſpe.

1) Hier getilgt: qui. 2) Folgt eine kleine Lücke, am Rande: ςψ.



qvi vero sub *geω* eum qui orizontis, angulo qui sub *tmn* faciente eum qui in plano equinoctialis.

Instrumentales quidem igitur acceptiones hunc continent modum assumpta simili consequentia in omnibus positionibus; in expositione autem quantitatum consistentium secundum unumquodque clima et signum et gradum sufficient quidem in ipsis solis periferiis subtendentibus angulos facere mensurationes, ut promptas ipsas habeamus in numeris et non

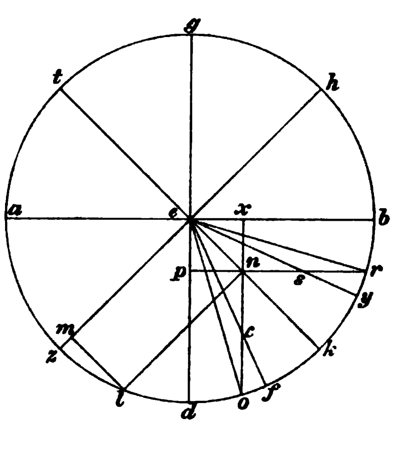
157 καταγραφὰς διωρισμένας τῇδε καθάπαξ | ἀναγκα(ζ)όμεθ⟨α⟩ ⟨πραγματεύσασθαι⟩ ἀπὸ τοῦ ἀ|ναλήμματος τὰς ⟨ἐπιζητου⟩μένας γωνίας | τῶν εὐθειῶν σχεδὸν πάν⟨τῃ ....⟩ (ι)νομένων,[1]) | ἀλλ' ἐφ' .... ἑνί τινι τεταρτη-|μορίῳ κύκλου διῃρημένῳ εἰς τὰ τῆς (μι)ᾶς | ⟨ὀρθῆς μοίρας⟩ τὰ(ς) ἐνενήκοντα τὸ ἴσον ἐνγρά|φοντες ἢ περιγράφοντες ὁμόκεντρον τῷ | δεδομένῳ πρὸς τὴν κατασκευὴν καὶ λαμβά|νοντ(ες) ἀπὸ τοῦ διῃρημένου τὰς τὸν οἰκεῖον | ἀριθμὸν τῶν ... ορισμ .... ⟨με⟩ | ταφέρομεν[2]) ἐπὶ τὸ ἴσον αὐ⟨τῷ τεταρτημόρι⟩|ον καὶ διὰ τῶν λαμβαν⟨ομένων περάτων⟩ | καὶ τοῦ κοινοῦ κέντρου τῶν κύκλων ἄγοντες | εὐθείας εὑρίσκομεν τὰς τῶν δεδομένων | μειζόνων ἢ ἐλαττόν⟨ων⟩ κύκλων γωνίας τε | καὶ περιφερείας. ἡ δὲ τοιαύτη λῆψις[3]) ὑ|πάρχ(ο)ι (μὲν)[4]) ἂν καὶ διὰ τῶν γραμμῶν ἐπὶ | τὸ ἀκριβέστατον τοῖς προαιρουμένοις, γένοι|το δ' ἂν εὐποριστοτέρα καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ ἀνα-|λήμματος, κἂν μὴ ἀπαράλλακτο(ς) τῇ ⟨διὰ⟩ | γραμμικ⟨ῶν ἀποδείξεων⟩ .... | .... ⟨πρὸς ἣν τὸ χρη⟩στικὸν (τ)⟨έ⟩|⟨λος⟩ ἀνάγεται ⟨τῆς⟩ προκειμένης πραγματεί|ας. ὃν

1) ινομενῶ. 2) ταφερωμεν. 3) ληψεις. 4) η μεν?

descriptiones determinatas scilicet secundum semel cogimur negotiari per[1]) inquisitos angulos rectarum fere ubique confusarum, sed in unaquaque oportunitatum una quadam[2]) quarta parte circuli diuisa in unius recti portiones 90 equale inscribentes et circumscribentes concentricum cum dato ad[3]) et accipientes a diuiso distantias continentes numerum conuenientium graduum transferimus ad equalem sibi quartam partem et per deprehensos terminos et per commune centrum circulorum producentes rectas inueniamus angulos et periferias in datis circulis maioribus uel minoribus. talis autem acceptio exstabit quidem utique et per lineas ad certissimum uolentibus, fiet autem utique facilius acquisibilis et per ipsum[4]) , et si non sit eque inuiciabilis[5]) ei que per lineares demonstrationes, tamen usque ad examinationem que ad sensum, ad quam reducitur finis usualis suppositi negotii. qvo autem modo uterque processuum ad promptissimum nobis accipietur, ostendemus in parte summatim premissa consideratione que per numeros ita se habente.

1) Lücke, am Rande: αναλημματ°. 2) d aus l. 3) Lücke, am Rande: κατασκε υHν φμ. 4) Lücke, am Rande: αναλημματ°. 5) Am Rande: ἀπαραλ λακτ°.

δὲ τρόπον ἑκατέρα τῶν ἐφόδων ἐπὶ|τὸ προχειρότατον ἡμῖν ἐκληφθήσεται, δεί-| ξομεν ἐν μέρει κεφαλαιωδῶς προτάξαν-| τες τὴν διὰ τῶν γραμμῶν ἐπίσκεψιν ἔχου(σ)|⟨αν οὕτως . κείσθω⟩ ὁ αβγδ
158 μεσημβρινὸς περὶ ‖ κέντρον τὸ ε, ἐν ῳ̄ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλή|λαις τῆς κοινῆς τομῆς ⟨αὐτοῦ⟩ καὶ τοῦ ὁρίζον-| τος ἡ αβ, ⟨τοῦ δὲ γνώμονος ἡ γδ, ἔστω τε δοθὲν τὸ ἔ⟩|ξαρμα τ⟨οῦ πόλου καὶ περιεχέσθω ὑπὸ τῆς αζ⟩ περιφε-ρε⟨ίας, καὶ ἤχθω ἄξων μὲν ὁ ζεη, ἰσημερινὴ⟩ | (δ)ὲ (πρό)⟨τερον⟩ διά-μετρο⟨ς ἡ θεκ, καὶ ἀπειλή⟩φ⟨θω⟩ | δο-θεῖσα περιφέρεια ⟨ἡ ζλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἤχθωσαν⟩ | κάθετοι ἐπὶ μὲν τὴν εζ ἡ (μλ), ἐπὶ δὲ τὴν ⟨εκ ἡ λν⟩, | ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ ν ἐπὶ μὲν τὴν (εβ) ἡ ξν⟨ο⟩, | ἐπὶ δὲ τὴν εδ ἡ πνρ. ἐπεὶ[1]) ⟨τοί⟩νυ⟨ν⟩ δέδοται ἡ αζ | περιφέρεια, τουτέστιν ἡ (δ)κ, δοθεῖσα ἔσται | καὶ ἡ ὑπὸ τῶν πεν[2]) γωνία. ὀρθὴ δὲ (ἡ) πρὸς τῷ π· | δέδοται ἄρα καὶ ⟨ὁ τῆς εν ὑποτεινούσης λόγος⟩ | πρὸς ἑκατέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, τουτέστιν | τὰς (ε)π καὶ πν καὶ τὰς ⟨ἴσας αὐταῖς τὰς νξ καὶ εξ⟩. | καὶ πάλιν ἐπεὶ[3]) δέδοται ἡ λ⟨ζ⟩ περιφέρε⟨ια, τεταρ⟩ | τημορίου[4]) δέ ἐστιν ⟨ἡ κζ, ὥστε καὶ τὴν⟩ | λοιπὴν τὴ⟨ν⟩ κλ δεδόσθαι,



Exponatur meridianus qui *abgd* circa centrum *e*, in quo diametri ad rectos angulos inuicem, communis quidem sectionis ipsius et orizontis que *ab*, gnomonis autem que *gd*, sitque data eleuatio poli et contineatur a periferia *az*, et protrahatur axis quidem qui *zeh*, equinoctialis autem prius diameter que *tek*, et absumatur data periferia que *zl*, et ab *l* ducantur perpendiculares super *ez* quidem que *lm*, super *ek* autem que *ln*, similiter autem et ab *n* super *eb* quidem que *xno*, super *ed* autem que *pnr*. quoniam igitur data est periferia *az*, hoc est que *dk*, datus[1]) erit et angulus qui sub *pen*. rectus autem qui apud *p*; data est ergo et ipsius *en* subtense proportio ad utramque earum que circa rectum, hoc est ad ipsas *ep* et *pn* et ad equales ipsis scilicet *nx* et *ex*. rursum quoniam data est que *lz* periferia, qvarte autem partis est que *kz*, quare et reliqua que *kl* data est, subtenditur autem duple ipsius *lz* periferie dupla ipsius *lm*

1) επι. 2) Corrigirt aus πνε. 3) επι. 4) Hier folgt ὀρθή (also getilgt).

1) data, aber in datus corrigirt.

ὑπο(τεί)ν(ει) ⟨δὲ⟩ τὴν μὲν | διπλῆν τῆς ζλ περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς ⟨λμ⟩ | εὐθείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς λκ περιφερείας | ⟨ἡ⟩ διπλ⟨ῆ τῆς λν⟩ εὐθείας, δοθήσεται καὶ ὁ λόγος | ἑκατέρας τῶν λμ καὶ ⟨λν⟩ πρὸς τὴν τοῦ μεσ⟨ημ⟩ | βρινοῦ διάμετρον. (ὥσ)τε καὶ ὁ τῆς εν, ⟨ἥ ἐστιν ἴση⟩ | τῇ λμ, καὶ ὁ τῶν τοῦ επ ⟨νξ τετραγώνου[1]) πλευρῶν⟩. | ἀπειλήφθωσαν δὴ τῇ λν ἴσαι ἥ (τε) π(σ)[2]) καὶ ⟨ἡ ξτ⟩, καὶ διήχθωσαν (α)ἱ εο καὶ ε(ρ)[3]) καὶ εσυ καὶ ετφ|. ἡ μὲν τοίνυν ζλ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ | τοῦ ἑκτημορίου καὶ ἔτι τῇ ἐν τῷ τοῦ | ἰσημερι⟨νο⟩ῦ ἐπιπέδῳ αὐτ(όθεν) δέδοται. ||

recte, duple autem ipsius *lk* periferie dupla ipsius *ln* recte, data erit et proportio utraque ipsarum *lm* et *ln* ad diametrum meridiani. quare et proportio ipsius *en*, que est equalis ipsi *lm*, et proportio ipsarum *ep*, *nx* laterum tetragoni. sumantur itaque ipsi *ln* equales que *ps* et que *xc*, et protrahantur que *oe* et *er* et *esy* et *ecf*. qve quidem igitur *zl* periferia existens equalis ei que circuli ektimori et adhuc ei que in plano equinoctialis ex se data est.

143 ⟨ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ εξο ὀρθο⟩γωνίου τριγώνου | δέδοται ἡ ⟨εξ καὶ ἡ ξο⟩, καὶ ἡ ⟨εο⟩ ὑποτείνουσα[4]) δοθήσε(ται) | ⟨καὶ ἡ ὑπὸ οεξ γωνία. ὥστε⟩ καὶ ἡ βο[5]) περιφέρει|(α) περιέχουσα ⟨τὴν τοῦ ὡριαίου κύ⟩κλου. ὁμοίως | ⟨δὲ ἐπεὶ καὶ τοῦ επρ ὀρθογωνίου⟩ δέδοται ἥ τε επ | καὶ ἡ ⟨πρ⟩[6]), δοθήσεται καὶ ἥ τε ⟨ερ⟩ ὑπο⟨τείνουσα καὶ⟩ | ⟨ἡ ὑπὸ ερπ γωνία καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ⟩ (π)ερ αὐτή τε καὶ | ἡ δρ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ καταβατι|κοῦ. πάλιν ἡ μὲν ηκ[7]) περιφέρεια ποιοῦσα τὴν | τοῦ μεσημβρινοῦ αὐτόθεν δέδοται. ἐπεὶ δὲ καὶ | τοῦ π⟨εσ⟩ ὀρθογωνίου δέδοται ἥ τε επ καὶ ἡ π(σ), | δοθήσεται καὶ ἥ τε εσ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ | ⟨πσε γωνί⟩α αὐτή τε καὶ ἡ (δ)υ περιφέρεια ἴση οὖ|⟨σα τῇ⟩ (τοῦ) κατὰ κορυφήν. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ[8]) καὶ τοῦ | (τ)ξ(ε)

quoniam et ipsius *exo* rectanguli trigoni data est que *ex* et que *xo*, et que *eo* subtendens dabitur et angulus qui sub *eox* et reliquus qui sub *oex*. quare et que *bo* periferia continens eum qui circuli horarii. similiter autem quoniam et ipsius *epr* rectanguli data est que *ep* et que *pr*, et que *er* subtendens dabitur et angulus qui sub *erp*[1]) et reliquus qui sub *per*, simul cum ipso et que *dr* periferia existens equalis ei que circuli descensiui. rursum que quidem *hk* periferia faciens eum qui meridiani ex se data est. quoniam et ipsius *eps* rectanguli que *ep* et que *ps*, dabitur et que *es* subtensa et angulus qui sub *pse*[2]) ipseque et que *dy* periferia existens equalis ei que circuli qui secundum verticem. similiter autem

1) Die Spuren führen eher auf κυκλον. 2) πε? 3) εκ? 4) υποτινουσα. 5) αο? 6) Hier scheint Raum für mehr Buchstaben zu sein. 7) ακ? 8) επι.

1) *eprp*. 2) Hier fehlt: et reliquus *pes*.

ὀρθογωνίου δέδο⟨ται ἥ τε⟩ εξ καὶ ἡ ξ(τ), δοθή|σεται καὶ ἥ τε ε(τ) ὑποτείνουσα καὶ ἡ ὑπὸ τεξ | γωνία, (τουτέσ)τιν ἡ ὑπὸ τῶν δε(τ)[1]) αὐτή τε καὶ ἡ | (δ)φ περιφέρεια ἴση οὖσα τῇ τοῦ ὁρίζοντος.» —

quoniam et ipsius *exc* rectanguli data est que *ex* et que *xc*, dabitur et subtensa que *ec* et angulus qui sub *cex*,[1]) hoc est qui sub *dec* ipseque et que *df* periferia existens equalis ei que orizontis.

ε̄. *κ(αὶ) τῶν ἄλλων δὲ μη|νιαίων*[2]) *ἕνεκεν ἐκκεί|(σ)θω*[3]) *ὁ αβ(γδ) μεσημβρι|νὸς μετὰ τῶν πρὸς ὀρθὰς | ἀλλήλα(ι)ς διαμέτρων | καὶ τοῦ εζ ἄξονος, καὶ δι|ήχθω τινὸς*[4]) *τῶν νοτιω|τέρων τοῦ ἰσημερινοῦ | μηνιαίων παραλλήλων*[5]) *| διάμετρος ἡ ηθκ, (ἐ)φ' ἧς | ⟨τὸ⟩ πρὸς ἀνατολὰς νοούμενον ἡμικύκλιον γεγρά-* 144 *φθω*[6]) *τὸ ηλκ, καὶ προσεκβεβλήσθω ὁ εζλ ἄξων | διχοτομῶν δηλονότι καὶ τὴν ηθκ διάμε|τρον κατὰ τὸ (θ) ⟨καὶ τὸ ηκ ἡμι⟩κύκλιον κατὰ τὸ | ⟨λ, διήχθω δὲ καὶ ἡ μν εὐθεῖα ἐπὶ τὴν*

Et aliorum autem mensilium gratia exponatur qui *abgd* meridianus cum diametris ad rectos inuicem et cum axe *ez*, et producatur unius rursum australiorum equinoctiali mensilium parallelorum diameter que *htk*, super quam ad orientem intellectus semicirculus describatur qui *hlk*, et usque ad ipsum educatur axis *ezl* in duo equa uidelicet secans ipsam *htk* diametrum penes *t* et semicirculum *hk* penes *l*. producatur autem et que *mn* recta super *ht* determinans *hn*[2])

1) *δεζ*? 2) Hier Fig. 5, die Buchstaben *σ* und *υ* nicht erkennbar, *λ* und *ζ* unsicher. 3) *εκκη⟨σ⟩θω*? 4) *τινος* übergeschrieben, im Text *εως*, vielleicht *τέως τινός*. 5) *παραλληλῶ*. 6) Am oberen Rand steht hier ein Scholion:
σ εαν γ́ προσεκβληθη επ εὐ^θ η . ε εως τ^ς π'φεριας τ̆ κ̆ κ ε'ζευ . . . . . . | ηκ εὐ^θ τις ορθου^ω γ γινεται Δ . . . κιως η . . . . ηκη . . . . τ^ς εγγυτ . . . . | ημισια δε η ηθ της ηκ ημισ . . . . . η γε . . . . νης.

1) Zu lesen: *ecx*. 2) Darauf getilgt: s (der Uebersetzer wollte anfangs segmentum).

ηϑ⟩ (διορί)|ζουσα τὸ ην ὑπὲρ γῆν τ⟨μῆμα τοῦ ἡμικυκλίου⟩ | ἀπὸ τοῦ ὑπὸ γῆν, καὶ ληφϑείσης τῆς νξ περι|φερείας ⟨δοϑ⟩εισῶν ὡρῶν ⟨ἤχϑω⟩ ἀπὸ τοῦ ξ κά|ϑετος (ἐ)πὶ τὴν ⟨η⟩μ ἡ ξο, καὶ διὰ τοῦ ο (δι)ήχϑω|σαν κάϑετ⟨ο⟩ι πρὸς μὲν τὴν (αε) ἡ πορ, πρὸς δὲ | τὴν γε ἡ σοτ. ἐπεὶ τοίνυν δέδοται ἡ .. τοῦ | μεσημβρινοῦ περιφέρεια, τὴν δὲ λείπουσ⟨αν⟩ | εἰς τὸ ἡμικύκλιον ὑποτείνει[1]) (ἡ διπ)λῆ τῆς | εϑ εὐ⟨ϑε⟩ίας, δεδομένος ⟨ἔσται ὁ τῶν ηϑκ καὶ εϑ λό⟩|⟨γος πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ μεσημβρινοῦ. ὁμοίως⟩ | ⟨ἐπεὶ δο⟩ϑεῖσα . . . . | . . . . τε . . . . | . . . . ὥστε | δοϑήσεται καὶ ὁ τῆς εϑ λόγος πρὸς ἑκατέραν τῶν[2]) | εμ καὶ μϑ καὶ ἔτι ὁ τῆς ηκ διαμέτρου πρὸς ἑκάσ|την αὐτῶν. ἀλλὰ ἡ τῆς μϑ εὐϑείας διπλῆ ὑπο|τείνει[3]) τὴν τῆς λν περιφερείας διπλῆν. ὥστε | καὶ ἥ τε λν περιφέρεια ⟨δοϑήσεται καὶ ἡ λοιπὴ⟩ | ⟨εἰς τὸ τεταρτημόριον ἡ ν⟩ξ ⟨η. δέδο⟩(ται) δὲ καὶ ⟨ἡ | ν⟩ξ· δ⟨οϑήσεται ἄρα ἥ τ⟩ε ⟨λ⟩ξ καὶ ἡ ξ⟨η. ὑποτείνει | δὲ τὴν⟩ μὲν διπλῆν τῆς (η)ξ[4]) περιφερείας | ἡ διπλῆ τῆς (ξο) εὐϑείας, τὴν δὲ διπλῆν τῆς ⟨ξλ⟩ | περιφερείας ἡ διπλῆ τῆς οϑ εὐϑείας. ὥστε δε|δομένος ἔσται καὶ ὁ τῶν ξο καὶ ο⟨ϑ⟩ λόγος πρὸς | τὴν ηκ διάμετρον, διὰ τοῦτ⟨ο δὲ καὶ πρὸς τὴν τοῦ⟩ ||

1) υποτινει. 2) τῶ. 3) υποτινει. 4) νεξ?

portionem semicirculi super terram ab ea que sub terra, et accepta ipsa nx periferia datarum horarum ducatur ab x perpendicularis super hm que xo, et per o producantur perpendiculares super ae quidem que por, super ge autem que soc. quoniam igitur data est zl[1]) meridiani periferia, residue autem in semicirculum subtenditur .dupla ipsius et recte, data erit proportio ipsius htk et proportio ipsius et ad diametrum meridiani. similiter quoniam data est que az periferia eleuationis, datus erit et ipsius met trigoni rectanguli angulus qui sub met. qvare data erit proportio ipsius et ad utramque ipsarum em et mt et adhuc proportio ipsius ek[2]) diametri ad unamquamque ipsarum. sed ipsius mt recte dupla subtenditur duple ipsius ln periferie. qvare et que ln periferia data erit et residua in quartam partem que nxh. data est autem et que nx. data ergo erit et que lx et que xh. subtenditur autem duple quidem ipsius nx[3]) periferie dupla ipsius xo recte, duple autem ipsius xa[4]) periferie dupla ipsius ht[5]) recte. qvare data erit ipsarum xo et ot proportio ad diametrum hk, propter hoc autem et ad eam que

1) Zu lesen hzk (Commandinus). 2) Lies hk, wie im Griechischen. 3) Lies hx (Command.). 4) Lies xl (lx Command.). 5) Lies ot, wie im Griechischen. Dass die Buchstaben hier verkehrt sind, ist durch ein ! am Rande (zu 2) 4) 5)) angedeutet.

meridiani. quoniam autem et ipsius tm data est proportio, data erit et proportio ipsius mo. et est, ut que em ad mo, ita que tm ad mp et que et ad op; equiangula enim sunt trigona emt et opm. data ergo erit et ipsarum mp et op proportio ad diametrum meridiani. propter hoc autem et proportio ipsius es et proportio ipsius emp totius, hoc est ipsius os. hiis igitur demonstratis sumatur centro o et distantia ox signum in meridiano scilicet g,[1]) et absumantur rursum ipsi ox equales que pq et que sf,[2]) et copulentur que ey et er et et et xm et adhuc que eo et $ef\psi$ et $eq\omega$. quoniam igitur in praecedentibus angulus qui sub eoy demonstratus est esse rectus, data est autem et que ey subtensa existens ex centro meridiani et que oy existens equalis ipsi ox, data erit et angulus qui sub eyo continens eum qui circuli ektimori. similiter autem quoniam et rectanguli xmo data est que xo et que om, data erit et que mx subtensa et angulus qui sub mxo faciens eum qui in plano equinoctialis. rursum quoniam ipsius epr rectanguli date sunt que ep et pr, data erit et que er subtensa et angulus qui sub per et que gr[3]) periferia. rursum quoniam ipsius esc rectanguli date sunt que es et que ec subtensa, data erit et angulus qui sub ces et que cg[4]) periferia descensiui. consequenter autem quoniam et ipsius eop rectanguli date sunt que op et que ep, data erit et que eo subtensa et angulus qui sub oep faciens meridiani periferiam. rursum quoniam ipsius sfe rectanguli date sunt que es et que sf, data erit et que ef subtensa et adhuc angulus qui sub sef et que $g\psi$ periferia eius qui secundum verticem. restat autem, quoniam et ipsius epq rectanguli date sunt que ep et que pq, data erit et que eq subtensa et[5]) adhuc angulus qui sub epq,[6]) hoc est qui sub qeg et[7]) que $g\omega$ periferia orizontis.

Qve quidem igitur per lineas acceptiones angulorum et subtensarum ipsis periferiarum sic utique nobis ad manum fient. in hiis autem que negociantur ex ipso[8]) maxime utique facile acquisibilis fiet expositionum unaqueque hoc modo. predemonstratur quidem igitur, quoniam eorum que inscribuntur in[9]) haec quidem in omni climate seruantur eadem, alia autem variantur; in hiis quidem igitur, que seruantur,

129 ἀρκεσθησόμεθα τῷ τε μεσημβρινῷ κύκλῳ | καὶ τῇ τοῦ ἰσημερινοῦ διαμέτρῳ καὶ ταῖς ἑ|τέραις μ(ό)ναις τῶν μηνιαίων παραλλήλων | σὺν τοῖς περιγραφομένοις αὐταῖς ἡμικυκλί|οις, τὴν	contenti erimus meridiano circulo et diametro equinoctialis et alteris solis mensilium parallelorum cum circumscriptis ipsorum semicirculis ipsam tamen tropicorum et eam que men-

1) Lies y. 2) Vor sf getilgt f (f). 3) Wohl zu lesen ar (Command.). 4) Am Rande: ǵs in greco, also gc. 5) Darauf getilgt ah. 6) Lies eqp (Command.). 7) Darauf getilgt: perifer. 8) Lücke, am Rande: αναληματ(τος). 9) Lücke, am Rande: αναλημμ. .

μέντοι τῶν τροπικῶν καὶ τὴν τοῦ | μετὰ τὸν ἰσημερινὸν μηνιαίου κατατάσσον|(τε)ς ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν πόλον, τὴν δὲ[1]) μετὰ τὸν | τροπικὸν ὡς πρὸς τὸν ἀντικείμενον πόλον, | ἵνα μὴ πλησίον (ο)ὖσ(α) τῆς τοῦ τροπικοῦ συν|χ(ύ)νῃ[2]) τὰς ἐπὶ[3]) τε αὐτῶν καὶ τῶν περιγραφο|μένων αὐτ(οῖ)ς ἡμικυκλίων σημειώσεις[4])· διὸ | καὶ τυμπανοειδεῖ χρησόμεθα τῷ δεξομένῳ[5]) | ⟨τὴν⟩ καταγραφὴν[6]) ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ἐπιστρε|φομένου τοῦ τυμπάνου ⟨τ⟩ὰ⟨ς⟩ (εἰ)ρημένας τῶν[7]) | ⟨μηνιαίων διαμέτρους⟩ μετὰ τῶν ἡμικυκλί|ων καὶ ⟨ταῖς⟩ (τῶν) κατὰ διάμετρον θέσ(ε)⟨σιν⟩ | ἐφαρμόζειν δύνασθαι. ἐπὶ δὲ τῶν καθ' ἕκαστον κλίμα προτεθὲν[8]) τασσομένων μόναις πάλιν[9]) | ἀρκεσθησόμεθα δυσὶ διαμέτροις τῇ τε κατὰ | τὴν (κοινὴν) τομὴν τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ | ⟨ὁρίζοντος καὶ τῇ⟩ κατὰ τὸν γνώμονα, χρησόμε(θ)α δὲ (καὶ) πλατ(ύ)μματι λεπτοτέρῳ πάνυ καὶ | ἀκριβῶς ὀρθογωνίῳ μὴ ἐλάττους ἔχοντι τὰς | περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου | (τ)οῦ μεσημβρινοῦ ἕνεκεν τοῦ τά τε (ἄ)λλα ση|μεῖα καὶ τὰς καθέτους δι' αὐτοῦ ῥαδίως λαμ|βάνειν τῆς μὲν ἑτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν | πλ(ε)υρῶν[10]) ἐφαρμοζομένης τῇ εὐθείᾳ[11]), πρὸς | ἣν ἡ κάθετος, τῆς δὲ
130 ἑτέρας προσαγομένη⟨ς⟩ ‖ τῷ σημείῳ, δι' οὗ ⟨ἡ⟩ κάθετος. καὶ ὅλως δὲ ποιησό|μεθα τὰς λήψεις τῶν ἐπὶ τοῦ

---

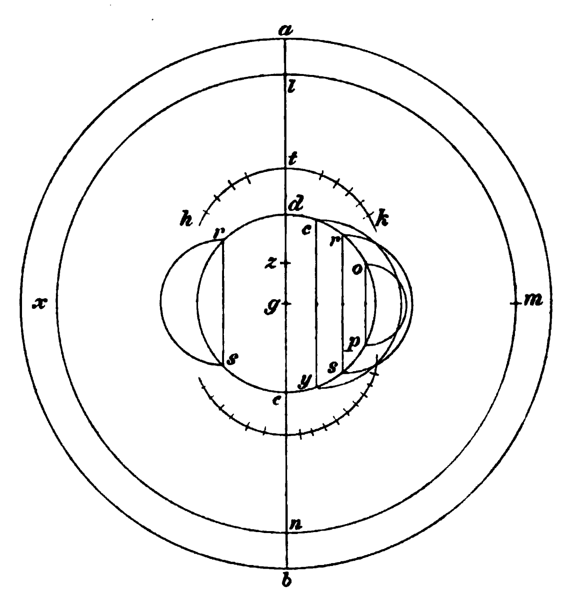
1) Lies δὲ τοῦ μετά. 2) συν-|χ(υ)ν(αι)η. 3) επει. 4) σημιωσις. 5) δεξαμενω? 6) καταγραφεν? 7) τῶ. 8) (προ)θεν. 9) παλῑ. 10) πλευραν. 11) της ευθειας.

silis post equinoctialem ordinantes ut ad eundem polum, eam autem que eius qui post tropicum[1]) ut ad oppositum polum, ne existens tropicum prope[2]) confundat eas[3]) que[3]) in[3]) ipsis[3]) notas semicirculorum ipsis circumscriptorum; propter quod et utemur tympanoydali plano suscepturo descriptionem ad hoc quod verso tympano dicte mensilium diametri cum semicirculis possint adaptari et positionibus eorum que ex opposito uel secundum diametrum. in hiis autem, que secundum unumquodque clima ordinantur, rursum contenti erimus solis duabus diametris, ea uidelicet que secundum communem sectionem meridiani et orizontis et ea que secundum gnomonem, utemur autem et quodam lato subtili ualde et examinate rectangulo non habente eas que circa rectum latus minores quam ea que ex centro meridiani gratia sumendi alia signa et perpendiculares per ipsum de facili[4]) altera quidem earum que circa rectum latus adaptata recte ad quam perpendicularis, altera autem adducta ad signum per quod perpendicularis. et totaliter autem faciemus acceptiones earum que in meridiano periferiarum per solum cancrum et per latum illud rectangulum nusquam conscribentes[5]) alteram rectam pre-

---

1) tropicōs. 2) Vor tropicum getilgt post, am Rande: cum tropicis. 3) Diese vier Worte am Rande. 4) Corrigirt aus facile. 5) Am Rande: πρ̊πϒγραφοντ ...

μεσημβρινοῦ περιφε|ρειῶν[1]) διὰ μόνου τοῦ τε καρκίνου καὶ τοῦ ὀρθο|γωνίου πλατύσματος μηδαμῆ προσπαραγρά-| φοντες ἑτέραν εὐθε(ῖα)ν τῶν προειρημένων, | ἀλλὰ γυμνὴν τηροῦντες τὴν καταγραφὴν | εἰς τὸ εὔληπτον τῶν ἐφεξῆς τῶν πρώτων | ὑ(πὸ) χ(εῖρ)α, καθ' ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, (εἰς τὴν) |



ἐκ⟨θεσιν μετα⟩φ⟨ερομένων⟩. ἐκ(κ)είσθω γὰρ (αὐ)|τῆς π⟨αραδείξ⟩εως ἕνε(κεν) τὸ τυμπανοειδὲς | ἐπίπεδον περὶ διάμετρον (τὴν) (α)β καὶ κέντρον[2]) | τὸ γ, καὶ τῆς αγ τρίτου μέρους ἔγγιστα πρὸς τῷ | α ληφθέντος ὡς κατὰ τὸ δ κέντρῳ τῷ γ | καὶ δια-

1) (περι)| φε|ριων. 2) κεντρō.

dictarum, sed nudam seruantes descriptionem ad facilitatem acceptionis eorum que deinceps primis[1]) secundum modum, quem diximus in expositione, translatis. exponantur enim ipsius ostensionis gratia planum tympanoydale circa diametrum *ab* et centrum *g*, et ipsius *ag* tertia parte proxime versus *a* accepta ut penes *d* centro *g* distantia autem *gd* describatur[2]) qui *de*[3]) meridianus circulus ipsa *dge* diametro secundum eam que equinoctialis intellecta. deinde et ipsius *gd* tertia parte proxime versus *g* accepta ut penes *z* centro *z* distantia autem *gd* describatur circuli equalis meridiano quarta pars secta in duo equa ab *ag* que *htk* et diuidatur in 90 portiones equales diligenter. nichil autem prohibet et super alias partes diametri idem facere gratia conuersionis tympani. similiter autem et centro *g* distantia autem ea que a *g* ad sectionem in duo proxime ipsius *at* circulum describimus ut eum qui per quartas *l m n x*, quarum unam diuidentes similiter in 90 portiones

1) Lücke, am Rande: υποκειμα. 2) Darauf getilgt: circuli equalis meridiano quarta pars. 3) Lücke, am Rande: αναλημματ... Auf Fig. 7 steht im inneren Kreis links: in greco hic erat iste semicirculus qui non ex alia parte (nml. der Halbkreis auf *rs*).

στήματι τῷ γδ γεγράφθω (ἐπὶ) τοῦ ἀνα|λήμματος μεσημβρινὸς κύκ(λος) ⟨ὁ δε τῆς δγε | διαμέτρου κατὰ τὴν τοῦ ἰσημερινοῦ νοου⟩|μένης. ἔπειτα καὶ ⟨τῆς γδ τοῦ⟩ τρίτου μέρους | ἔγγιστα πρὸς τῷ γ ληφθέντος ὡς κατὰ τ⟨ὸ⟩[1]) (ζ)[2]) | κέντρῳ κῷ ζ διαστήματι δὲ[3]) τῷ γδ γεγράφθω | τοῦ ἴσου[4]) τῷ μεσημβρινῷ κύκλου[5]) τεταρτη|μόριον[6]) διχοτομούμεν⟨ον⟩[7]) ὑπὸ ⟨τῆς αγ τὸ⟩ | ηθκ καὶ διῃρήσθω εἰς ἴσα⟨ς⟩ τὰ⟨ς⟩ ⟨ϙ μο⟩ί⟨ρας⟩[8]) ἀκρι|βῶς. οὐδὲν δὲ ⟨κωλύει καὶ κατὰ⟩ τὰ ἕτερα (μέ)|ρη τῆς διαμέτρου τὸ αὐτὸ ποιεῖν ἕνεκεν τῆς | τοῦ τυμπάνου ἐπιστροφῆς. ὁμοίως δὲ καὶ κέν|τρῳ[9]) τῷ γ διαστήματι δὲ τῷ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ | τὴν διχοτομίαν ἔγγιστα τῆς αθ κύκλου | γράψομεν ὡς τὸν διὰ τῶν ⟨λ μ⟩ ν ξ τεταρτη⟨μο⟩-|ρίων, ὧν τὸ ἓν διελόντες ὁμοίως εἰς

117 τὰ⟨ς⟩[10]) ‖ ⟨ϙ⟩ μοί(ρας καὶ) (ἐκ)βάλλοντες ἐν αὐτῷ[11]) τὰς καθ' ἕ|καστ(ο) ⟨ν κ⟩λίμα διαστάσει(ς) τῶν τοῦ ἐξάρματος | ⟨μοιρῶν κ⟩α⟨τα⟩γράψομεν τὰς ἴσας καὶ ἐπὶ τῶν | λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων ἀρχόμενοι μὲν |[12]) ἀπὸ τῶν λ μ ν ξ τομῶν, ἐκβάλλοντες δὲ ὡς ἐπ|ὶ τὰ δεξιὰ τῶν πρὸς ἀνατολὰς ἡμικυκλίων ὑπο|κειμένων αἰεὶ γεγράφθαι πρὸς ἡμᾶς. περιέ|χει[13]) δὲ τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου, ὅπου (μὲν ἡ με)γίστη | ἡμέρα καὶ νὺξ ὡρῶν ἐστιν ῑγ, μοίρας ἔγγιστα ῑς γ̂ | ιβ, ὅπου δὲ ῑγ ∟ ὡρῶν,

1) Nach τ Raum für drei Buchstaben. 2) Eher ξ. 3) Fehlt. 4) τω ισω. 5) κυκλω. 6) τεταρτημοριω. 7) Eher διχοτομουμενη⟨ν⟩. 8) Eher ... ιαια. 9) κε̄|τρω. 10) Wie es scheint, Raum für mehr Buchstaben. 11) αυτου. 12) με. 13) Das dritte ε scheint corrigirt.

et excipientes in ipsa eas que secundum unumquodque clima distantias partium eleuationis asscribemus equales et in reliquis tribus quartis incipientes quidem a sectionibus *l m n x*, educentes autem ut ad dextram eorum qui ad orientem semicirculorum, qui[1]) supponuntur semper descripti esse ad nos. continet autem eleuatio poli, ubi quidem maxima dies et nox est horarum 13, partes proxime 16 tertiam et duodecimam, ubi autem est horarum 13 et s[2]), partes 23 dimidiam et tertiam, ubi autem horarum 14, partes 36, ubi uero est horarum 14 et dimidie, partes 43 et quartam, at ubi est horarum 15, partes[3]) , ubi autem est horarum 15 et dimidie, partes 45, ubi uero est horarum 16, partes 48 et dimidiam et decimam. copulabimus autem et diametros dictorum mensilium accipientes proprias ipsorum distantias ab equinoctiali in ipsa meridiani periferia uniuscuiusque diuisionis equalis ipsorum quarte. distat enim et que quidem tropici et secundum *op* ab equinoctiali partes proxime 23 dimidiam et tertiam, que autem continui tropico mensilis et secundum *rs* partes 20 et dimidiam, qve autem continui et secundum *cy* partes 13 et tertiam. circumscribimus

1) Hier getilgt: sub. 2) D. i. $^1/_2$. 3) Lücke offen gelassen.

μ̊ κγ L' γ', ὅπου δὲ ιδ ὡρῶν, | μ̊ λ[1]) ⟨κ⟩α⟨ι⟩ γ̂, ὅπου δὲ ιδ L' ὡρῶν, μ̊ λ⟨ϛ⟩, ὅπου δὲ ιε ὡ|ρῶν, μ̊ μ γ̂ δ' ι', ὅπου δὲ ιε L[2]) ὡρῶν, μ̊ με, ὅπου δὲ | ιϛ ὡρῶν, μ̊ μη L'[3]). ἐπιζεύξωμεν δ(ὲ) καὶ τὰς τῶν[4]) | εἰρημένων μηνιαίων διαμέτρους λαβόντες | αὐτῶν τὰς οἰκείας διαστάσεις ἀπὸ τῆς ἰσημε|ρινῆς ἐπὶ τῆς τοῦ μεσημβρινοῦ περιφερείας ἑκάστης ἴσον ⟨αὐτῶν⟩[5]) τεταρτημορίου διαιρέσε|ως. ἀπέχει γὰρ καὶ (ἡ) μὲν τοῦ τροπικοῦ κύκλου | κατὰ τὴν οπ τῆς ἰσημερινῆς μ̊ ἔγγιστα κγ ⟨L' γ'⟩, | ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς τῷ τροπικῷ ⟨μηνιαίου κατὰ⟩ | τὴν ρσ μ̊ κ L', ἡ δὲ τοῦ συνεχοῦς . . . . | κατὰ τὴν συ μ̊ ι(γ) Γο[6]). (π)εριγράφ⟨ομεν οὖν⟩ καὶ τὸ | ἐφ' ἑκάστ(ης) αὐτῶν ἡμικύκλιον, καὶ ταῦτα | μὲν μετὰ τῶν οἰκείων διαμέτρων ἐάσο|μεν[7]) καθ' αὐτά, τοῦ δὲ μεσημβρινοῦ τῶν[8]) περὶ τὴν | τοῦ ἰσημερινοῦ διάμετρον ⟨ἡμικυκλίων ἑκά-|τερον διελόντες εἰς ἴσας ὡριαίους διαστά|σεις ιβ σημειώσομεν κ⟩ατατομάς. ⟨ὁ⟩μ⟨οί⟩(ω)ς (δ)ὲ ⟨καὶ⟩ | ⟨τὰς ἐπὶ τῆς δγε γ⟩ινομένας ὑπ⟨ὸ τῶν ἐπ' 118 αὐτὴν⟩ ‖ καθέτων ἀφ' ἑκάστης τῶν ὡριαί⟨ων κατατομ⟩|ῶν, ἐπειδήπερ ταῦτα ⟨τηρεῖται⟩ κατὰ ⟨πάσας⟩ | τὰς ἐγκλίσεις. χαλκ⟨οῦ τοίνυν ὄντος ἢ ψη⟩-|φ⟨ί⟩(ν)ου τοῦ τυμπάνου οὐ⟨δεμιῶν ἔτι δεήσει⟩ | ἀ⟨πο⟩χαρά⟨ξ⟩εω⟨ν τού-⟩των μὲν ⟨ὑπαρχόντων⟩ . . . . . | . . . . τῶν κατ⟨ὰ κλίμα⟩ . . . .

itaque et semicirculum qui in unaquaque harum et hos quidem cum propriis diametris sinemus secundum se, meridiani autem eorum qui circa equinoctialem[1]) diametrum semicirculorum utrumque diuidentes in equales horarias distantias 12 signabimus sectiones. similiter autem et eas, que super *dge* fiunt a perpendicularibus ad ipsam ab unaquaque diuisionum horariarum[2]), quoniam quidem hec seruantur secundum omnes declinationes. tympano quidem igitur existente ereo uel[3]) nulla iam opus erit deletione caracterum[4]) hiis quidem existentibus in superlinitionibus eorum, que secundum clima ordinantur, ut duabus diametris et horariis diuisionibus. ligneo autem existente superliniendum[5]) nigro quidem colore alias omnes, rubeo autem meridianum et diametrum equinoctialis cum signis, et super totum tympanum cera consimiliter speris, ut non simul cum variandis superliniantur, que debent remanere.

---

1) Corrigirt. 2) ϛ? 3) Vielleicht μη L'⟨ι'⟩. 4) τῶ 5) Die ersten beiden Buchstaben vielleicht λα, jedoch sehr unsicher. 6) D. i. $^2/_3$. 7) εασωμεν. 8) Scheint gefehlt zu haben.

1) Darauf getilgt: circulum. 2) horar.iūriarum. 3) Lücke, am Rande: ψηφιν. 4) Hierzu am Rande: αποχαράξε. 5) Lücke, am Rande: ί αποχαράξεις.

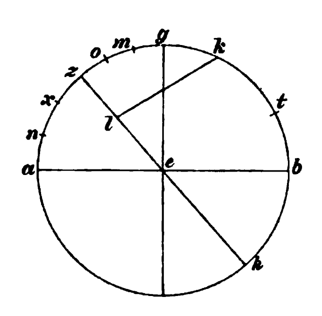
.........[1]) ⟨τὰς ἀποχαρά⟩|ξε(ις) μέ-
λανι ⟨μὲν⟩ .... ⟨ἐρυ⟩|θρῷ δὲ
τὴν[2]) τοῦ μεσημβ⟨ρινοῦ καὶ τοῦ ἰση-
μερι⟩ | ⟨ν⟩οῦ διάμετρ⟨ον⟩ ....
.... ⟨ὅλον⟩τὸ τύμπανον κηρῷ
.... |[3])

Hiis autem suppositis facile in promptu nobis erit acceptionum unaqueque, si prius quidem ordine assequentes radici supposite eleuationis diametros copulauerimus orizontisque et gnomonis, deinde tropici semicirculi sectionem distinguentem quod supra terram ab eo quod sub terra et utrarumque harum portionum in sex equalia diuisiones acceperimus et in propria ipsius diametro factas a diuisionibus super ipsam perpendiculares. hiis enim solis contenti procedemus secundum modum ostendendum. primas quidem igitur rursum eas que ektimori circuli secundum quamlibet horam periferias, has quidem ex portione super terram consistentes proprii signi ea que mensilis positione, has autem ex ea que sub terra eius quod ex opposito sibi. deinde eas que horarii omnium horarum, postea eas que descensiui et rursum conuenienter eas que meridiani seorsum. deinde eas que eius qui secundum verticem, post quas eas que orizontis, et ultimas, si uoluerimus, eas que in plano equinoctiali. post hoc autem acceptas quidem designationes liniemus.[1]) similia autem faciemus in reliquis duobus mensilibus utroque in parte et similiter in equinoctiali. deinde et priores diametros simul ablinientes copulabimus eas que consequentis climatis et eodem ordine utentes pertransibimus omnes suppositas differentias. ceterum autem gratia modi acceptionis periferiarum subtensarum angulis exponatur meridianus qui in[2]) et sit *abgd* circa centrum *e*, et copulentur per regulam examinate rectam que quidem *ab* diameter secundum communem sectionem ipsius et orizontis, qve autem *gd* secundum gnomonem. subiaceatque prius que *zeh* diameter equinoctialis, et sit que quidem in duo equa sectio semicirculi *zth* penes *t*, qve autem super terram quarta *zt*, horariarum autem que in ipso sectionum una quidem que penes *k*, et[3]) quod a perpendiculari per ipsum[4]) ad *ze* fit in ipsa signum, sit *l*;

1) Hier scheint ein Stück im Griechischen gefehlt zu haben. 2) *τον*. 3) Der Rest der Seite unlesbar; hier stand Fig. 7, deren Buchstaben aber nicht zu erkennen sind.

1) ab̥liniemus, am Rande: *απαλει!ψομ*. 2) Lücke, am Rande: *αναλημματ*. 3) Getilgt: signum. 4) Ueber ipsum: scilicet *k*.

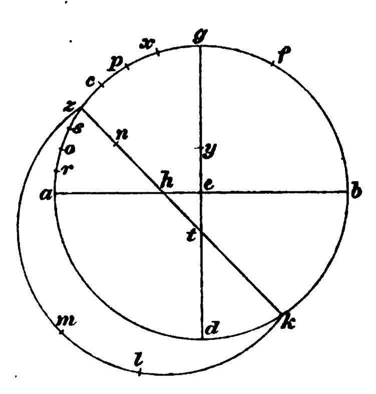
hec enim[1]   a principio accepta. eam quidem igitur que ektimori periferiam ex se ostendit que *tk*, super quam statuentes cancrum et postponentes super diuisam quartam exponemus gradus contentos a distantia. continet autem semper tot, quot multitudo subpositarum ab ortu horarum, tempora equinoctialia, eadem existens ei que in plano equinoctialis. eam autem que horarii accipiemus adducentes lati illius rectanguli alterum laterum ad signum *l*, ita ut reliquum adaptetur diametro orizontis *ab*, et secetur[2]) meridianus ab eo quod[3]) apud *l* latere penes *m*; qve enim *am* periferia faciet dictam. similiter autem, si unum laterum adduxerimus ad *l*, ita ut alterum adaptetur diametro gnomonis *gd*, et secetur meridianus ab eo quod apud *l* latere penes *n*, que *gn* periferia faciet eam que descensiui. rursum autem que quidem *az* ex se facit eam que meridiani. si autem statuerimus cancrum super signa *k* et *l* et unum lati illius laterum apposuerimus ad *l* altero adaptato ipsi *ge*, deinde alterum quidem terminum cancri apposuerimus ei que secus[4]) rectum angulum portioni ipsius *ge*, alterum autem apposuerimus lateri quod apud *l*, et manente ipso conuerterimus idem latus counitum similiter ipsi apud centrum *e*, ita ut secetur meridianus ab ipso[5]) ut penes *x*, que *gx* periferia faciet eam que eius qui secundum verticem. similiter autem, si unum laterum apposuerimus ad *l* altero adaptato ipsi *ae* et cancri[6]) eandem ipsi *kl* distensionem habentis[7]) alterum quidem terminum apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius *ae*, alterum autem applicuerimus ei quod apud *l* lateri, deinde hoc manente conuerterimus rursum idem latus seruata coniunctione super centrum *e*, ita ut secet meridianum ut penes *o*, que *go* periferia faciet eam que orizontis. et in hiis quidem periferiis et in omnibus semper[8]) intelligendum, ut non idem repetamus, quod distensiones ipsarum[9]) simul cum acceptione per cancrum transferentes super diuisam quartam deprehense[10]) ab ipsis gradus debemus exponere.



Rursum supponatur alicuius aliorum mensilium parallelorum diameter et sit que *zhtk*, super quam orientalis semicirculus qui *zlk*, et centro quidem *t* distantia autem *ta* accipiatur signum in semicirculo *zlk* quod *l*,

1) Lücke, am Rande: εχ'εν! (d. i. ἔχομεν). 2) Darauf getilgt: qui a. 3) Corrigirt aus qui. 4) sec^ɔ, davor getilgt: a. 5) Am Rande hierzu: latere scilicet. 6) Aus cancer, am Rande: cancri. 7) Aus habentes, am Rande: tis. 8) sīp^r. 9) Getilgt: cum. 10) Fehler für deprehensos.

in quo distinguitur quod quidem *zl* super terram semicirculi et quod *lk* sub terra. àccipitur autem signum *l* per platinam[1]) rectangulam, si angulus adductus fuerit ad *h*, ita ut alterum laterum adaptetur ipsi *zk*.[2]) secundum quod enim reliquum[3]) secat semicirculum, erit determinatum signum, quoniam quidem que ab *h*[4]) ipsi *hk*[5]) perpendicularis producta fit sectio planorum orizontis et circuli mensilis. diuidatur itaque portionum utraque in 6 equalia, et signatis ipsis accipiantur per appositionem[6]) platine rectangule et signa super *zk* facta a perpendicularibus ad ipsam ab acceptis diuisionibus in semicirculo. sit autem una earum que super terram que penes *m* et quod eiusdem ordinis cum ipso signum eorum que super *zh* quod *n*. centro quidem itaque ipso *n* et distantia *nm* accepto secundum meridianum signo *x* et latere[7]) adducto ad signa *e* et *h*, ita ut secet meridianum penes *o*, que quidem *zo* periferia faciet residuam in quarta periferie ektimori, que autem ab *x* super sectionem alterius[8]) ipsius[9]) et meridiani ipsam que ektimori. consequenter autem centro *h* et distantia *hm* accepto secundum meridianum signo *p* que *ap* periferia faciet eam que horarii. similiter autem centro *t* et distantia *tm* accepto secundum meridianum signo *r* que *gr* periferia faciet eam que descensiui. rursum que quidem *ao* periferia faciet eam que meridiani. si autem unum laterum[10])



apposuerimus ipsi *n* reliquo adaptato ipsi *ge*, et cancri[11]) distensionem habentis[12]) equalem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus[13]) ei que penes angulum rectum portioni ipsius *ge*, alterum autem apposuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus latus quod ad ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum penes *s*, que *gs* periferia faciet[14]) eam que eius qui secundum verticem. similiter autem rursum, si unum laterum apposuerimus ipsi *n* altero adaptato ipsi *ae* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem apposuerimus ei que secus rectum angulum portioni ipsius *ae*, alterum

---

1) Am Rande: πλατυσματ̊. 2) Bei dieser Zeile am Rande: ɦo. Ꞁa. 3) Hierzu am Rande: 'scilicet latus. 4) Hierzu am Rande: ⸗uel *n*. 5) Bei dieser Zeile am Rande: *l*. 6) Darauf: p̣. 7) Lücke, am Rande: πλατυσματ̊. 8) Uebergeschrieben: scilicet lateris. 9) Lücke, am Rande: πλατυσματ̊. 10) Lücke, am Rande: πλατυσ. 11) -i corrigirt aus o. 12) -is corrigirt aus e. 13) Darauf getilgt: portioni; ei ist übergeschrieben. 14) -t corrigirt.

autem applicuerimus ei quod apud *n* lateri, deinde hoc manente conuerterimus id quod apud *n* rursum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum penes *c*, que *cg* periferia faciet eam que orizontis. ceterum autem, si ipsam *mn* ponentes equalem ipsi *ey* apposuerimus ipsi *y* rectum angulum uno[1]) laterum adaptato ipsi *ey* et cancri distensionem habentis eandem ipsi *nm* alterum quidem terminum apposuerimus penes *y*, alterum autem applicuerimus recto angulo ad latus *cg* et manente hoc rursum conuerterimus latus quod apud id ipsum seruata ipsorum coniunctione ad centrum *e*, ita ut secet meridianum secundum *f*, que *gf* periferia faciet eam que in plano equinoctialis.

Nunc autem, si diameter *zk* ad sinistras nostri partes positionem habens sit unius parallelorum mensilium australiorum equinoctiali, transuerso tympano ad positionem ex opposito et que *zk* et qui super ipsam semicirculus secus dextras nostri partes erunt in situ eodem cum mensili parallelo descripto per opposita signa, borealiora autem equinoctiali, et que quidem *kl* portio erit super terram, qve autem *zl* sub terra. qvare[2]) nos facientes eadem ostensis in diuisionibus portionis *kl* inueniamus et eas que in oppositis signis consistentes periferias. nam secundum quidem eam que in hyemali diametrum accepta ipsa *zk* quod quidem *zg* faciet eas que a principio capricorni fiunt super terram angulorum periferias, quod autem *dk*[3]) eas que a principio cancri. secundum eam autem que mensilis consequentis hyemali tropico diametrum supposita ipsa *zk* semicirculus quidem *zl* faciet eas que a principio sagittarii et aquarii consistentes super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio geminorum et leonis. secundum eam autem que mensilis contigui equinoctiali diametrum accepta ipsa *zk* qui quidem *zl* semicirculus faciet eas que in principio scorpionis et piscium factas super terram periferias, qvi autem *lk* eas que in principio tauri et virginis. eas enim que in principio arietis et libre existentes easdem in una quacunque quartarum equinoctialis demonstratas esse accidit.

Et angulos uero ab antiquis determinatos, quoscunque non eodem modo nobiscum exposuerunt, ab hiis in promptu licebit transumere. eum quidem enim qui circuli ektimori secundum nos, ut diximus, non assumpserunt, aliorum autem qui quidem horarius et qui in plano circuli qui secundum verticem et qui in plano equinoctialis iidem sunt hiis qui apud nos, qvi autem ab ipsis uocatur ektimorus, est isdem cum apud nos meridiano, reliquorum autem descensiuum quidem facit residuus[4]) ad unum rectum eius qui apud nos descensiui, eum autem qui antiskius, id est

1) Corrigirt aus uni. 2) Am Rande: vel ut. 3) Am Rande: ḷ'kç in greco. Lies *lk*. 4) Am Rande: deficiens.



contraumbralis, rursum residuus[1]) ad unum rectum eius qui apud nos orizontis. quod autem distracto[2]) quidem plano equinoctialis accipitur, et per tale palam fit. ostendit quidem enim et hoc eam que circuli horarii positionem. hanc autem continet proprie que eius qui secundum verticem per polos horarii descriptorum[3]) et uno existente eorum qui a principio necessarie suppositorum trium circulorum seruantium ubique ad inuicem positionem ad rectos angulos, propter quod et ektimori quidem periferia, pro qua eam que equinoctialis assumpserunt, non solum cum ea que horarii ostendit positionem radii, set et cum ea que meridiani, qve autem equinoctialis cum sola ea que horarii et non adhuc neque cum ea que meridiani neque cum aliqua alia reliquarum. hoc autem quia neque secundum proprietatem ferentium radium comprehendit semper utique[4]) aut solum equinoctiis neque secundum proprietatem manentium eandem ubique seruat positionem ad reliquos non delatorum. exposuimus autem et non consistentes quantitates secundum illum, quem ostendimus, modum consequentium rationabilitati periferiarum.[5]) in subiectis autem[6]) septem parallelis et secundum unumquodque principium signorum et horarum in canonibus continentibus pertractatum a nobis ordinem in omnibus adiectionibus[7]) ad promptitudinem earum que in declinationibus acceptionum. adhuc autem quoniam periferias quidem in meridiano circulo determinatas prompte faciunt manifestas orientaliores ipso et occidentaliores positiones horarum[8]) eas autem que in circulo qui secundum verticem borealiores ipso et australiores casus radiorum, in quibus[9]) consequentiam diximus oportere coexquirere, asscripsimus singulis horarum signa, per que eam que ad borealia circuli[10]) qui secundum verticem et rursum ad australia radii positionem licebit considerare aliqualiter a conuenientibus hiis que predeterminata sunt principium facientes[11]) adiacentium quantitatum expressiones.[12]) promptum autem adhuc et coniugationes, a quibus positio radii determinatur[13]), sex numero esse accidit, tres quidem ab hiis que ad inuicem[14]) delatorum trium circulorum ektimorique ad horarium et ektimori ad descensiuum, tres autem eas que ab unoquoque delatorum cum eo, qui inclinationem ipsius continet, manentium, ektimori quidem ad meridianum, horarii autem ad eum qui secundum verticem, descensiui autem ad orizontem. habent autem et canones ita.

---

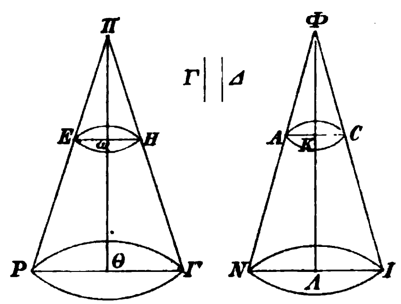
1) Am Rande: uel deficiens. 2) Folgt: p. 3) Am Rande: / 'ti. 4) Am Rande: /. Der Uebersetzer hat gelesen ἂν ἤ für ἀλλ' ἤ. 5) Am Rande: /. 6) a̤ṳ̄t̤, also getilgt. 7) Am Rande: επιβολα(ις). 8) Am Rande: των ϱων. 9) Darauf q∂'. 10) Hier am Rande: /. 11) Lücke, am Rande: faciamus. 12) Am Rande: εκβολ˘. 13) Sehr unsicher; vielleicht eher: datur. 14) Folgt: feren, getilgt.

Cancri principium horarum 13.

	Hore		ektimori	horarie	descensiue	meridiane	secundum verticem	orizontis
	orizontis		24 15	65 5	90 0	0 0	90 0	24 15
bo	1	11	25 15	69 15	75[1] 10	35 15	74 50	20[2]
bo	2	10	31 20	73 0	60 55	59 5	60 0	18 50
bo	3	9	46 50	76[3]	46 6	72 10	45 5	17 15
bo	4	8	60 10	79 10	31[4]	78 30	30 10	18[5]
bo	5	7	75 0	81 20	17 30	81 30	15 10	27 0
bo	meridies		90 0	82 35	7 25	82 35	0 0	90 0

1) ϙϥ; 7 ist sonst ʌ geschrieben. 2) ′ und am Rande: Γ́o. 3) Ebenso. 4) Ebenso. 5) Ebenso. Am unteren Rande steht noch ꟻ und fm̄ puto (d. i. wohl: finem puto oder finitum puto). Γo ist $^2/_3$.

Fig. 10.
(S. oben S. 5, zu S. 123 der Hds.)



EIN BEITRAG

ZUR

GESCHICHTE DER ALGEBRA IN DEUTSCHLAND

IM FÜNFZEHNTEN JAHRHUNDERT.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Die von GERHARDT in den Monatsberichten der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*) behandelte Handschrift der königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München No. 14908 dürfte für die Geschichte der deutschen Algebra bei weitem wichtiger sein, als es aus der Abhandlung GERHARDTS hervorzugehen scheint. Einestheils ist die Beschreibung, welche er von ihr giebt, nichts weniger als ausreichend, und darin liegt jedenfalls anderntheils der Grund, weshalb sehr wichtige und das Können des Verfassers in helles Licht stellende Stücke des Manuscriptes von ihm übersehen und deshalb auch noch nicht einmal erwähnt sind.

Die Handschrift enthält nämlich aufser dem Bruchstück einer Algebra in deutscher Sprache, welches GERHARDT hat abdrucken lassen, zunächst (freilich räumlich davon getrennt, aber auf dasselbe Bezug nehmend) eine ganze Reihe zu demselben gehörige Beispiele in lateinischer Sprache, dann aber, nur vier Seiten hinter demselben, eine vollständige Abhandlung über den nämlichen Gegenstand auch in deutscher Sprache, welche durch ihre ganze Fassung zeigt, dafs sie nach einer italienischen Vorlage gearbeitet sein mufs, während das von GERHARDT herausgegebene Bruchstück aus dem Lateinischen geflossen zu sein scheint.

Der Titel dieser Abhandlung: „*Regule delacose secundum 6 capitula*“ und die in ihr benutzten Namen für die Zahl, die Unbekannte und deren Potenzen ergeben den Ursprung unzweifelhaft. *Numerus, cosa, censo, censo di censo, cubo di cubo* sind Worte, welche nur aus dem Italienischen stammen können. Der unbekannte Verfasser — auch der Schreiber ist ein anderer als der der Algebra GERHARDTS — übersetzt *numerus* durch *zal, cosa* durch *ding* und benutzt für letzteres die auch sonst in späterer Zeit bekannte Abkürzung ∂. *Censo* behält er bei. Noch eine Abkürzung ist vorhanden für multiplicieren: *af*. Sie ist aus der gewöhnlichern: *Maf* zusammengezogen und wird auch in den lateinischen Theilen der Handschrift, und zwar überall für jede Form des Wortes benutzt. Im Abdrucke ist dieselbe aufgelöst worden.

Weil wir im Deutschen *das Ding* sagen, heifst es bei unserem Verfasser meistens auch *das cosa*; + heifst ihm *mer*, — *mynder*, an einigen Stellen auch mit *minus* untermischt. Zwei Zahlen multiplicieren heifst: *af 6 wider 8,* dividieren heifst stets *tailen,* der Divisor steht dabei immer an letzter Stelle, z. B.: *tail* 6 *in* $\frac{25}{144}$, wo das Resultat $\frac{6 \cdot 144}{25}$ wird.

*) Jahrgang 1870, S. 141 u. ff.

Von der nämlichen Hand geschrieben befinden sich noch zwei Abhandlungen über den doppelten falschen Ansatz in der Handschrift. Da die *Regula falsi* jedenfalls der Algebra angehört, und die Beispiele, welche behandelt werden, geschichtliches Interesse besitzen, so lasse ich dieselben im Folgenden ebenfalls abdrucken.

Alle übrigen Stücke, welche durchweg datiert sind, sind sämmtlich von ein und demselben Schreiber, von welchem überhaupt eine ganze Reihe Münchener Manuscripte herrühren. Derselbe nennt sich auf Blatt 220′ *Frater Fridericus ordinis S. Benedicti professus Monasterii St. Emmerami Ratisponensis.* Seine Thätigkeit an der fraglichen Handschrift erstreckte sich von 1455 bis 1464

Der nachfolgende Abdruck enthält der Reihe nach Folgendes:

1. *De dubio proposito per posicionem duarum falsitatum veritatem indagare* (Bltt. 40′—47),
2. *Regula falsarum posicionum declaranda per 12 regulas sive questiones* (Bltt. 47′—54),
3. Die Gerhardt'sche Algebra (Bltt. 133′—134′),
4. *Regula delacose secundum 6 capitula* (Bltt. 136—146′),
5. Beispiele zu der Gerhardt'schen Algebra in lateinischer Sprache (Bltt. 146′—153),
6. *De regulis per algebram etc^a ut supra dictum est* (Bltt. 153—154′).
7. Beispiele zu den *Regule delacose* (Bltt. 154′—157),
8. Zwei Beispiele zur 5. und 6. Regel der Gerhardt'schen Algebra (Bltt. 134′),
9. Desgleichen zu den *Regule delacose* (Bltt. 504),
10. Weitere Beispiele mit No. 6 zusammenhängend (Bltt. 90—90′).

Nöthige Erläuterungen in textlicher Hinsicht sowohl, als in geschichtlicher gebe ich als Fufsnoten des Textes.

Gelegentlich hier nur noch eine Notiz, welche auf die Quellen der Geometrie Bradwardins Bezug hat, zugleich aber auch die dem Frater Fridericus zugänglichen Schriften klarstellen dürfte:

„*Hoc opus geometricum continet fere omnes demonstrationes geometricas,*
„*quas adducit philosophus gracia exempli vel in loyca, vel physica, et est*
„*collectum ex libris Euclidis, Campani, Archymedy (!), Theodosy, Jordani*
„*et ex libro, qui intulatur ysoperimetrorum. 1456 Fr.*“

Die letzte Schrift ist natürlich diejenige, welche Cantor*) als wahrscheinliche Quelle bezeichnete.

Thorn, 29. Oktober 1894. **M. Curtze.**

---

*) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II, S. 105.

I.

40′ | DE DUBIO PROPOSITO PER POSICIONEM DUARUM FALSITATUM VERITATEM INDAGARE.

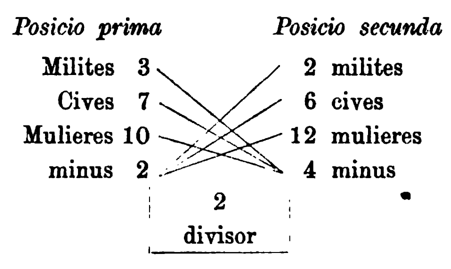
Regula falsi dicitur ista, que consistit in posicione duorum numerorum falsorum ad inveniendum veritatem hoc modo. *Ponam casus, quod sint* 5 *20 persone in una cecha, inter quos sunt milites, cives et mulieres, et omnes habent solvere 20 ₰ hoc modo: miles dabit 2 ₰, civis 1 ₰, et mulier $\frac{1}{2}$ ₰.* Si hoc vis scire et suum simile, pone duas falsas posiciones, et si in qualibet aliquid superfluit, tunc subtrahe numerum superfluum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si vero in qualibet posicione aliquid defe- 10 cerit, fac similiter subtrahendo minorem defectum a maiore, et quod remanet erit divisor. Si autem in una posicione aliquid superfluerit et in altera posicione defecerit, tunc defectus unius posicionis debet addi ad 41 superfluum alterius posicionis, et productum erit divisor. Et conformiter | agendum est in multiplicacione posicionis cuiuslibet per alterius defectum 15 vel abundanciam, ita videlicet, quod sicut divisor invenitur per addicionem, ita debet addi, quod venit ex multiplicacione unius per defectum alterius et per abundanciam seu superfluum alterius, quod idem est. Sed quando divisor invenitur per subtractionem, tunc debet eciam subtrahi, quod venit ex multiplicacione unius per alterius defectum vel superfluum. Item caven- 20 dum est in predicta regula, ne superfluum vel defectus sunt numeri equales ita, quod unus delet alium facta subtractione unius ab alio. Item cavendum est, ne post subtractionem unius ab alio remaneat unitas pro divisore,

---

5—7. Aus dieser Stelle geht wohl unzweideutig hervor, dass die Ableitung des Ausdrucks *Regula coeci* von *Zeche* die richtige ist. Die hier vorliegende Aufgabe ist genau in derselben Form schon recht alt. In einer Handschrift aus dem 13. Jahrhundert wird dafür die gereimte Auflösung gegeben: *„In medio tetras, externis octo locentur“ (Clm. 14684, Blt. 30a)*, welche mit der Auflösung unserer Abhandlung übereinstimmt. Es ist von gewisser Wichtigkeit, dass man auch Aufgaben der unbestimmten, sogenannten Diophantischen Algebra durch die *Regula falsi* zu lösen wusste. Leonardo Pisano hatte sie als Mischungsrechnungen behandelt (siehe Cantor, Vorlesungen II, S. 18). 22 bis S. 36 Z. 2. Diese Beschränkung ist in der zweiten Abhandlung über denselben Gegenstand nicht gemacht. Sie ist offenbar auch überflüssig.

vel eciam pro defectu vel superfluo, quia unitas multiplicando vel dividendo numerum minime variat. Et in proposito sit hoc exemplum prime regule.

Ponatur una falsa posicio, videlicet quod sunt tres milites | 7 cives 41′ et 10 mulieres, qui sunt persone 20, sed numerus denariorum, quem dant
5 simul, est 18, et sic deficiunt 2 a 20. Proponatur secundo, quod sunt 2 milites, 6 cives et 12 mulieres, que sunt 20 persone, sed numerus denariorum, quem dant, sunt 16, et sic deficiunt 4 ₰. Modo subtrahe 2, que defecerunt primo, a 4, que nunc deficiunt, et remanent 2, qui est divisor communis. Postea sic operabis: Multiplica primo 3 per 4 in
10 modum crucis, facit 12; multiplica iterum per modum crucis 2 per 2, et erunt 4, que subtrahe a 12, manentibus 8, que divide per divisorem communem, scilicet 2, exibunt 4 milites. Simili modo multiplica 7 per 4, fit 28; deinde 6 per 2 multiplica, facit 12, que subtrahe ab 28, remanent 16, que divide per divisorem, exibunt 8 cives. Ulterius multiplica 10
15 per 4, fit 40, similiter multiplica 12 per 2, exibunt | 24, que subtrahe a 40, 42 remanent 16, que divide per 2, et habebis 8 mulieres. Et habebis 4 milites, qui dant 8 ₰, et 8 cives, qui dant 8 ₰, et 8 mulieres, qui dant 4 ₰, et habebis 20 persone, que dant 20 ₰.



Eciam sunt 3 milites, 11 cives, 6 mulieres. | 42′

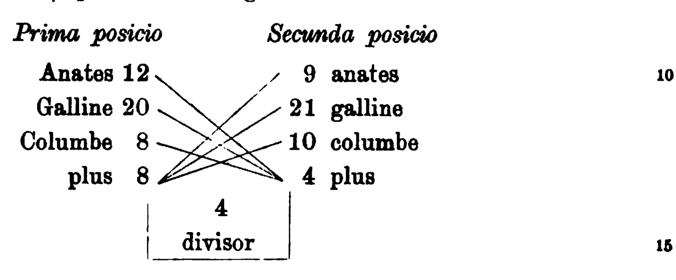
Exemplum secunde partis regule. Quidam emit pro 40 gl 40 volucres de triplice genere, anates, quarum una est vendita pro 2 gl, gallinas, quarum una est vendita pro 1 gl, columbas, quarum una vendita pro $\frac{1}{2}$ gl.
30 *Queritur, quot anates etc*[a].

Fac duas posiciones. Primo pone 12 anates, 20 gallinas, 8 columbas, que sunt 40 aves, et valent 48 gl. Sic sunt in superfluo 8 gl. Iterum pone secundo aliam certam eciam falsam posicionem, scilicet 9 anates, 12 gallinas, 10 columbas, que sunt 40 aves, sed valent 44 gl, et sic excedit
35 in 4 gl. Subtrahe ergo 4 ab 8, manent 4, qui est divisor communis.

---

26. Der Verfasser oder der Schreiber weiss also, dass es für die Aufgabe mehr als eine Lösung giebt. Die allgemeine Lösung heisst: n Soldaten, $20-3n$ Bürger, $2n$ Frauen; die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 3; 4$.

Postea multiplica 12 per 4 per modum crucis, facit 48; deinde iterum per modum crucis 9 per 8, facit 72, a quibus subtrahe 48, et remanent 24, que divide per 4, et habebis 6 anates. Postea multiplica 4 per 20, facit 80;
43 similiter 21 per 8 | facit 168, a quibus subtrahe 80, et remanent 88, que divide per 4, exibunt 22 galline. Similiter multiplica 8 per 4, facit 32, 5
et multiplica 8 per 10, exibunt 80, a quibus subtrahe 32, et remanent 48, que divide per 4, exibunt 12 columbae, et sic habes 6 anates, 22 gallinas, 12 columbas: 40 aves, que valent 40 gl.



10

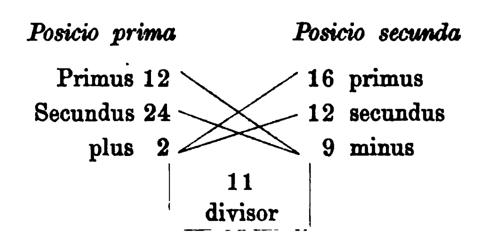
15

43′ Eciam sunt 12 anates, 4 galline, 24 columbe. |

Exemplum tercie partis regule. *Sunt duo socii volentes emere duos equos: Primus 1 equum pro 20 fl, secundus pro 25 fl. Et dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ tue pecunie, tunc ego solvam equum precise pro 20 fl. Sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$ tue pecunie, et ego solvam 25 fl precise.* 20 *Volo nunc scire, quot habuit quilibet.*

Pono primo unam posicionem falsam, videlicet, quod primus habeat 12 fl, secundus 24. Modo dicit primus secundo: da mihi $\frac{1}{3}$ de tua pecunia, videlicet 24, et est 8, ad meas et facit 20 fl; sed secundus dicit primo: da mihi $\frac{1}{4}$ de tua pecunia, scilicet de 12, et constat, quod sunt 3. Adde 25
3 ad 24 fient 27, que 27 excedunt 25 in 2. Secundo pone, quod primus habeat 16 et secundus 12, tunc deficiunt 9 fl. Modo regula dicit, quando in una posicione est superabundancia et in altera defectus, debent simul
44 addi, et aggrega|tum ex eis est divisor communis. Adde ergo 2 ad 9, fient 11. Postea multiplica in modum crucis 9 per 12, fient 108; simi- 30
liter 2 per 16, fient 32, que adde ad 108 fient 140, que si diviseris per 11 exibunt $12\frac{8}{11}$ fl, que est summa primi, quem habuit. Similiter multiplica 9 per 24, exibunt 216, et 2 per 12, fiunt 24; que adde ad invicem, fient 240. Que si diviseris per 11, exibunt $21\frac{9}{11}$ fl, summa secundi.

16. Auch hier kennt der Verfasser mehr als eine Lösung. Allgemein erhält man n Enten, $40-3n$ Hühner, $2n$ Tauben. Die speciellen Lösungen ergeben sich für $n = 6$; 12.



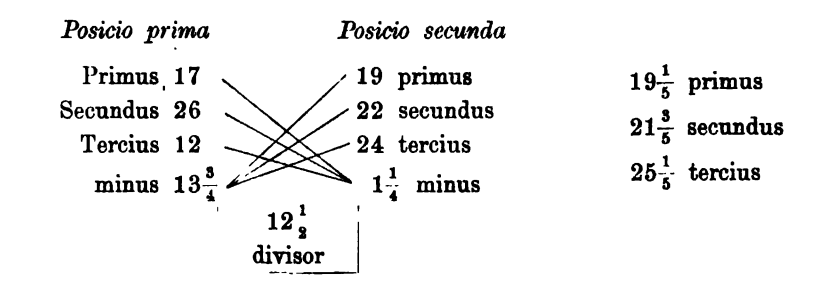
|*Item sunt tres socii A, B, C empturi nisum pro 34 ₰, et dicit A ad* 44'
B, C: quilibet vestrum det medietatem suorum denariorum, et ego meos omnes do, et exolvamus nisum. Dicit B ad A, C: non sic, sed uterque vestrum 10 *det mihi terciam partem suorum denariorum, et ego meos omnes, exsolvamus nisum. Tercius dicit ad A, B: non ita, sed ego do omnes meos denarios, et quilibet vestrum quartam partem suorum, et presuppono quod quilibet vestrum donat. Queritur quod quilibet habuerit.*

Prima posicio	*Secunda posicio*	
A. 20	12 A	A. 10
B. 27	23 B	B. 22
C. 1	21 C	C. 26
minus $21\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{4}$ minus.	
multiplicator	multiplicator	

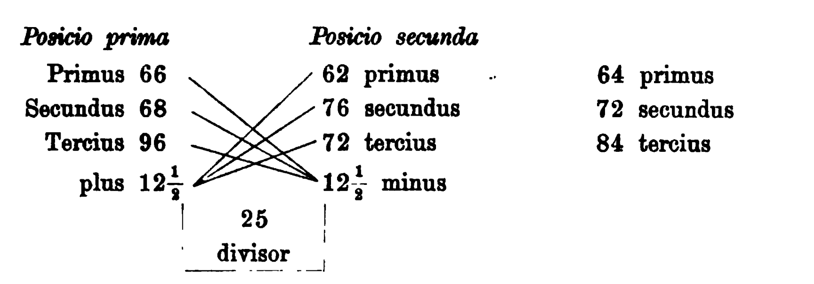
17
divisor

|*Item sunt tres socii empturi equum pro 30 fl. Dicit primus ad secundum: da $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos et comparabo equum pro 30 fl. Dicit secundus ad tercium: da $\frac{1}{3}$. Dicit tercius ad primum: da $\frac{1}{4}$ etc^a^. Queritur quot.* 45

25 Pone sic:



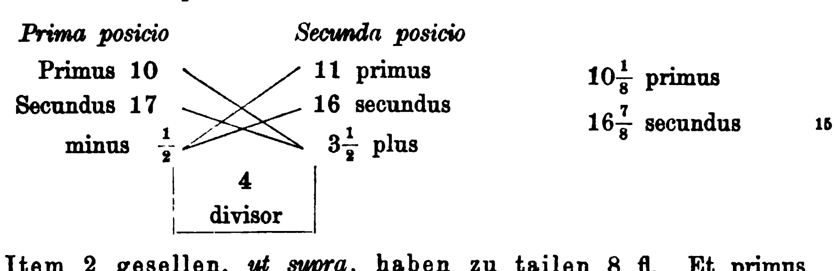
|*Item si equus emitur pro 100 fl,* pone duas posiciones falsas illo modo 45



5

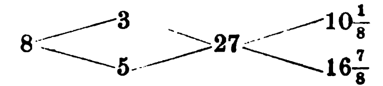
Item 2 gesellen haben 27 fl, ainer hat mer dan der ander. Nu wen der mit der maisten summ des andern summ duplirt, vnd auch der ander des ersten duplirt, so haben sy das gelt 10
46 gleich | tailt. *Queritur quot quilibet habuerit.*

Pone sic duas posiciones falsas:



15

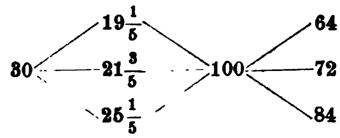
Item 2 gesellen, *ut supra,* haben zu tailen 8 fl. Et primus habet 3, secundus 5. vnd dy vil sein finstu cursoris. Sprich. 20



46' |Item einer hat gelt pay im, vnd wil t'uch kauffen, vnd wen

---

8. Wie so häufig in dem Manuscripte wechselt auch hier unvermittelt die Sprache aus dem Lateinischen ins Deutsche. An andern Stellen geht die Sprachmengerei so weit, dass man sich unwillkürlich an Luca Paciulo und dessen ähnliche Sprachmischung erinnert sieht. 19—22. Diese *cursorische* Methode, die auch eine Art unbestimmter Aufgaben enthält, hätte sehr gut auch für die beiden vorhergehenden Exempel benutzt werden können. Ihr Ansatz würde nach der Art der Handschrift so ausgesehen haben:



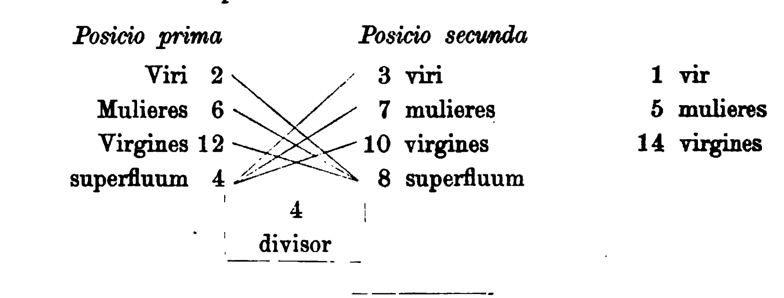
23 bis S. 40 Z. 5. Diese Zeilen sind offenbar nur aus Unachtsamkeit des Abschreibers hier hineingerathen. Der Preis ist entweder Fl. $3x - 4$ oder $2x + 10$, wenn die Ellenzahl x gesetzt ist, daher ist $x = 4 + 10$. Dann folgt aber aus $3x - 4$ der Werth der Ellen gleich 38 Fl.

er 3 fl gibt umb 1 ellen, so mangelt er 4 fl an zalen, vnd wen er 2 fl gibt pro 1 ellen, so pleiben jm 10 fl v̈ber. Queritur wie uil hat er gelts pey jm gehabt, vnd wie uil ellen er hat kauft?

Machs also. Addir 4 vnd 10, facit 14 ellen. Nu multiplicir 14 mit 3, 5 sunt 42, davon subtrahir 4, pleibt 38 fl, et factum est.

Item 20 persone, viri, mulieres et virgines, dividere debent 20 ob, et vir capit 3 ob, mulier 2 ob, virgo 1 hallensem. Queritur, quot.

Pone sic duas posiciones falsas: 47



II.

|REGULA FALSARUM POSICIONUM DECLARANDA PER 12 REGULAS SIVE QUESTIONES. 47'

Propositis duobus numeris falsis examinatisque secundum casus propositi 20 exigentiam, tunc si uterque deficiat vel excedat, subtrahatur brevior numerus excessus sive defectus a maiori, et habebitur divisor; deinde multiplica primum numerum falsum per mendacium secundi, similiter secundum numerum falsum per mendacium primi. Horum productorum minus a maiore dematur, residuum vero per partitorem parciatur, et patebit numerus verus. 25 Si vero unus deficiat et alius excedat, iungantur simul numeri excessus et defectus pro divisore. Facta eciam multiplicatione, ut supra, iungantur in unum producta, et parciatur per partitorem, et habebitur numerus verus.

Pro eius exemplari declaracione aliquas ponam questiones propter eius variam applicacionem ad diversos casus.

30 *Prima questio.*

Quidam habet laboratores et pecunias eis distribuendas, quarum si cuilibet daret 7 solidos, retineretur 30 solidos. Proponit ergo cuilibet dare 9 solidos.

6—15. Hier ist die gefundene Lösung die einzig mögliche. Die allgemeine Lösung: $3n - 2$ Männer, $10 - 5n$ Frauen, $12 + 2n$ Jungfrauen hat nur für $n = 1$ positive Werthe. 30 bis S. 41 Z. 16. Die Aufgabe ist analog der oben ohne *posicio falsa* gelösten.

et tali casu deficiunt ei 30 solidi: queritur, quot fuerunt laboratores et quot habuerit solidos.

Coniectatur primo fuisse 20 laboratores, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, erunt 140 solidi; retinuit 30 in tali distribucione, oportebat ergo ipsum habere 170 solidos. De quibus si cuilibet vellet dare 9 solidos, fient 180 solidos. Debuerint namque in tali distribucione provenire 200 solidi, de quibus deficiunt | 20. Primus ergo numerus, scilicet 20, deficit in 20.

Coniectatur ergo laboratores fuisse 40, quorum cuilibet si dederit 7 solidos, fierent 280, et quia retinuit in tali distributione 30, oportuerit ipsum habere 310 solidos. De quibus si vellet dare cuilibet 9, fierent 360; debuerint namque in tali distribucione provenire 340, que supergrediuntur in 20. Secundus ergo numerus, scilicet 40, excedit in 20

20 minus 20 |
40 plus 20 | 40 divisor.

Modo iuxta regulam operare, et est numerus laboratorum scilicet 30; habuit ergo 240 solidos, ut patet practicanti.

Secunda questio.

Quidam convenit quendam ad laborandum per 40 dies continuos tali foedere, quod quolibet die, quo laboraret, daret ei 7 denarios, et quolibet die, quo non laboraret, restitueret 5 denarios. Hic enim mercenarius pacto inito primitus diligenter laboravit, et paulatim post distentavit taliter, quod tempore completo nihil mercedis obtinuit. Queritur, quot diebus laboravit, quo scito scietur eciam tempus, quo vacavit.

Coniectatur ipsum laborasse 30 diebus, quibus lucratus fuisset 210 ₰. Vacasset ergo 10 diebus, quibus restituisset 50 ₰, et sic obtinuit adhuc 160 ₰, in quibus 160 primus numerus, scilicet 30, excedit.

Coniectatur ergo ipsum laborasse 25 diebus, quibus lucratus fuisset 175 ₰. Vacasset igitur 15 diebus, pro quibus restituisset 75, et sic adhuc obtineret 100 ₰, in quibus 100 secundus numerus, scilicet 25, excedit.

30 plus 160 |
25 plus 100 | 60 divisor.

| Modo iuxta regulam operando patet, quod laboraverat 16 diebus et $\frac{2}{3}$; vacaverat ergo 23 diebus et $\frac{1}{3}$, et lucratus fuit 116 ₰ et $\frac{2}{3}$, et tantum eciam obtinuit ipsum restituere etc*.

17 u. ff. Diese Aufgabe war eine sehr beliebte unter den Rechenlehrern; wir werden ihr später bei den Beispielen zur Algebra wieder begegnen.

Tercia questio.

Quidam peciit a socio suo, quot haberet denarios, et respondit: Si haberem adhuc tantum, quantum habeo, et dimidietatem sui, pro dimidietate tantum in tercia et quarta partibus tantum et obolum sive dimidium denarium, haberem 200 ₰. Queritur, quot habuit denarios.

Coniectatur ipsum habuisse 60 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum scilicet 60, et $\frac{1}{2}$, scilicet 30, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, scilicet 20 et 15 et 1 dimidium ₰ habuisset 185 et $\frac{1}{2}$; deficit ergo primus numerus scilicet 60, in 14 et $\frac{1}{2}$.

Coniectatur secundo ipsum habuisse 12 ₰. Si ergo habuisset adhuc tantum et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ tanti et obolum, habuisset $37\frac{1}{2}$ ₰. Deficit ergo secundus numerus, scilicet 12, in $162\frac{1}{2}$.

60	minus	$14\frac{1}{2}$	148 divisor.
12	minus	$162\frac{1}{2}$	

Modo iuxta regulam operando patet, quod habuit 64 ₰ cum $\frac{26}{37}$, ut late examinanti clarescet casum.

Quarta questio.

Quidam venit ad portum navi onerata sua 60 pipis vini. Tenebatur solvere tributum certum theolenario, qui cum non habuisset pecunias, dedit theolenario pipam vini, et ipse restituit ei 30 solidos. De post venit | alter ad eundum portum navi sua onerata 200 pipis, qui similiter debebat tributum solvere theolenario. Hic cum venisset, pecunia ei deficiebat, dedit eciam pipam vini et 20 solidos, et satis fecerant ambo theolenario. Queritur de precio pipe vini.

Coniectatur primo ipsam valuisse 40 solidos. Primus ergo qui dedit pipam valoris 40 solidorum et recepit 30 solidos, solvit 10 solidos pro suis 60 pipis. Inquire ergo secundum regulam proporcionum: si 60 pipe solvant 10, quantum debeant solvere 200? | 60 10 / 200 . | Patet, quod 33 solidos et $\frac{1}{3}$ solidi. Secundus enim dedit pipam valentem 40 solidos et cum hoc 20 solidos, supergreditur ergo numerum solvendum 26 et $\frac{2}{3}$, qui est excessus primi numeri, scilicet 40.

Coniectatur igitur secundo, pipam valuisse 50 solidos. Primus igitur, qui dedit 1 pipam et recepit 30 solidos, solvit 20 solidos, oportet ergo

16 u. ff. Auch diese Aufgabe kommt in etwas anderer Fassung später wieder.

secundus $66\frac{2}{3}$ solvere iuxta regulam proportionum. Qui secundus dedit pipam valoris 50 solidorum et cum hoc 20 solidos; solvit nimis 3 et $\frac{1}{3}$.

40	plus	$26\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$ divisor.
50	plus	$3\frac{1}{3}$	

Modo operando iuxta regulam patet valor pipe scilicet 51 solidorum 5
49' et $\frac{3}{7}$ solidi, ut patet clare practicanti. |

Quinta questio.

Sunt duo, quorum primus dicit secundo, ut det secundus primo 1, et erit ei equalis; dicit secundus: non sic, sed da mihi 1 de tuis, et ero tibi millecuplus. Queritur, quantum habet quilibet. 10

Coniectatur primo primum habere 2. Oportet ergo secundus habere 4, de quibus dabit primo unum, et erunt equales in ternario. Si ergo primus de suis 2 dederat 1 secundo, retinebit 1, et sic secundus haberet 5, et quia secundus diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 1000, a quibus distat sive defecit in 995 pro defectu primi, scilicet 2. 15

Coniectatur secundo primum habere 3. Oportet ergo habere secundum 5, qui cum daret primo 1, haberent aquale, scilicet 4. Si ergo primus daret secundo 1, retineret primus 2, et secundus haberet 6. Qui cum diceret esse millecuplus ad primum, oportet ipsum habere 2000, a quibus distat in 1994 pro defectu secundi, scilicet 3. 20

2	minus	995	999 divisor.
3	minus	1994	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit unum et $\frac{4}{999}$; oportet ergo habere secundum 3 et $\frac{4}{999}$, ut patet intuenti clare.

Ad idem. 25

Sunt 3, quorum primus dicit secundo, ut det ei unum, et erit primus secundo equalis. Dicit secundus tercio, ut tercius det ei unum de suis, et
50 *erit ei duplus. Dicit tercius primo, ut det ei unum, et erit tercius* | *primo triplus. Queritur, quantum habeat quilibet.*

Coniectatur primo primum habere 3, oportet ergo secundum habere 5, 30
qui cum dedit primo unum, erunt equales. Secundo habente 5 oportet tercium habere 4, qui cum dederit secundo 1, erit secundus duplus ad

7 u. ff. Ebenso findet sich diese Aufgabe wörtlich wieder als Beispiel zu den Regeln der Algebra.



tertium. Tercio ergo habente 4 et petente 1 a primo, retinebit primus 2, et haberet tercius 5, qui iuxta casum deberet habere triplum, scilicet 6, a quibus deficiet in uno.

Coniectatur aliter primum habere 5 et secundum habere 7, et oportet
5 nunc tercium habere 5. Qui si dederit secundo unum, tunc esset ei secundus duplus. Si ergo tercius petit a primo 1, retinebit primus 4, et tercius habebit 6, et deberet esse triplum, scilicet 12, a quibus deficiunt 6.

3 minus 1	5 divisor.
5 minus 6	

10 Modo iuxta regulam operando oportet sic, quod primus habuit 2 et $\frac{3}{5}$, oportet ergo secundum habere 4 et $\frac{3}{5}$, et tercium 3 et $\frac{4}{5}$, ut patet practicanti.

Iste enim est modus examinandi tales casus, si eciam essent 4, aut 5, aut plures; eciam si in alia proporcione et numeris variarent casus.

15 *Sexta questio.*

Quidam emit 3 pannos precio 30 regalium et 7 solidorum; regale enim valet 30 solidos. Quorum pannorum secundus fuit | emptus precio duplo 50' *supra primum et cum hoc 5 solidis ultra. Tercius vero fuit emptus precio triplo super primos duos et cum 11 solidis ultra. Queritur de valore sive*
20 *precio cuiuslibet.*

Coniectatur fieri emptum primum 5 regalibus, fuit ergo secundus pannus emptus 10 regalibus 5 solidis, et tercius 45 regalibus et 26 solidis, qui valores seorsum collecti faciunt 61 regalia 1 solidum, qui excedunt numerum propositum in 30 regalibus et 24 solidis.

25 Coniectatur secundo primum pannum fuisse emptum 2 regalibus. Fuisset ergo secundus pannus emptus 4 regalibus 5 solidis, et tercius 18 regalibus 26 solidis. Qui valores collecti faciunt 24 regalia 31 solidos, qui deficiunt a numero proposito in 5 regalibus et 6 solidis.

5 plus $30\frac{24}{30}$	36 divisor.
2 minus $5\frac{6}{30}$	

30

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus pannus valet 2 regalia 13 solidos; valuit ergo secundus 5 regalia et 1 solidum; oportuit ergo, quod tercius valuit 22 regalia et 23 solidos, ut patet intuenti.

Questio septima.

Tres emerunt navem 100 scutis, quorum primus petivit $\frac{1}{2}$ a secundo et cum suis pecuniis solveret navem, scilicet 100 scuta. Dixit secundus tercio, ut tercius daret secundo $\frac{1}{3}$, et secundus cum suis pecuniis additis 51 *solveret 100 scuta. Dixit tercius | primo, ut ei daret $\frac{1}{4}$ de pecuniis suis, et* 5 *ipse cum suis pecuniis adiunctis solveret. Queritur quantum quilibet, vel quantum primus habuit, quia scito uno, ita et alii scientur.*

Coniectatur primum habere 60; oportet ergo secundum habere 80, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100 scuta. Et secundo habente 80 oportet tercium habere 60, quia secundus cum $\frac{1}{3}$ tercii solveret 100. Et tercio 10 habente 60 et petente $\frac{1}{4}$ a primo solveret 75, et sic primus numerus scilicet 60 deficit in 25 minus.

Coniectatur secundo primum habere 68; oportet ergo habere secundum 64, cum cuius $\frac{1}{2}$ primus solveret 100. Secundo igitur habente 64 oportet tercium habere 108, cum cuius $\frac{1}{3}$ secundus eciam solveret 100. Tercio 15 vero habente 108 et capiente $\frac{1}{4}$ a primo solveret ipse 125, et sic excedit in 25.

60 minus 25	50 divisor.
68 plus 25	

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habuit 64; oportet 20 ergo secundum habere 72 et tercium 84, ut patet etc[a].

Ad idem.

Sunt 2, quorum primus petit a secundo $\frac{2}{3}$ suarum pecuniarum, et primus emet pannum 40 solidorum. Petit secundus a primo $\frac{3}{7}$ suarum pecuniarum, et ipse secundus emet et solvet pannum 40 solidorum. Queritur, 25 *quantum habet quilibet.*

Conietatur primo primum habere 14; oportet ergo secundum habere 39, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 26, primus solveret 40. Habente igitur secundo 39 et capiente $\frac{3}{7}$ de primo, scilicet 6, solveret 45, et sic excedit in 5.

Coniectatur secundo primum habere 21; oportet ergo secundum habere 28 30 cum $\frac{1}{2}$, cum cuius $\frac{2}{3}$, scilicet 19, primus solveret 40. Habente igitur secundo 51′ $28\frac{1}{2}$ et capiente | $\frac{3}{7}$ a primo, scilicet 9, solveret $37\frac{1}{2}$, et sic deficit in $2\frac{1}{2}$.

2—21. Mit verändertem Wortlaut die Aufgabe, welche S. 38 Z. 22 bis S. 39 Z. 7 abgehandelt wird. Das Resultat ist natürlich beide Male das nämliche.

14 plus 5 | 21 minus $2\frac{1}{2}$ | $7\frac{1}{2}$ divisor.

Modo iuxta regulam operando patet, quod primus habet 18 et $\frac{2}{3}$; oportet ergo secundum habere 32 directe.

5 *Octava questio.*

Quidam habens pecuniam dixit primo sociorum suorum, ut daret ei tantum, sicud esset $\frac{2}{3}$ illius, quod habuerit, et ei redderet 7. Consequenter ivit ad secundum, cui dixit, ut daret ei tantum sicud (!) essent $\frac{3}{4}$ suarum pecuniarum, et ei redderet 11. Consequenter ivit ad tercium. dixit ei, ut daret sibi tantum, 10 *quantum haberet, et redderet ipsi 10. Consequenter ivit ad quartum, cui dixit, da mihi duplum ad id, quod habeo, et eius $\frac{2}{5}$, et reddam tibi 200, et finaliter nihil obtinuit. Queritur quantum habuit primus.*

Coniectàtur primo ipsum habuisse 33, cuius $\frac{2}{3}$ si secundus ei dedisset, scilicet 22, habuisset 55, de quibus ipsi primo restituisset 7, detinuisset 48. 15 Cum quibus venisset ad secundum, qui illius $\frac{3}{4}$, scilicet 36, ei dedisset; et ei restituisset 11 et obtinuisset 73. Cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum; et restituerat ei 10 | obtinuit ergo 136. Cum quibus 136 52 venit ad quartum, qui dedit ei duplum illius et $\frac{2}{5}$ eiusdem, cui cum restituisset 200, retinuit adhuc $262\frac{2}{5}$.

20 Coniectatur secundo ipsum habuisse 45, cuius $\frac{2}{3}$, scilicit 30, ei dedit secundus, et ipse secundo restituit 7, obtinuit ergo 68; cum quibus venit ad tercium, qui ei dedit $\frac{3}{4}$ de 68, scilicet 51, et ipse restituerat 11, obtinuit ergo 108; cum quibus venit ad tercium, qui dedit ei tantum, et restituit ei 10, obtinuit ergo 206; cum quibus venit ad quartum, qui dedit ei 25 duplum illius et eciam eius $\frac{2}{5}$, cui cum restituisset 200, obtinuit adhuc 500 et $\frac{2}{5}$.

33 plus $262\frac{2}{5}$ | 45 plus $500\frac{2}{5}$ | 238 divisor.

Modo iuxta regulam operando patet, quod habet primus 19 et $\frac{458}{595}$; 30 cum ad secundum venisset habuit 25 et $\frac{565}{595}$. Ad tercium dum venisset, habuit 34 et $\frac{245}{595}$. Ad quartum autem cum venisset, habuit 58 et $\frac{490}{595}$, que cum expedivisset, optinuit 200, ut patet clare casum examinanti.

Nona questio.

Septem ova demptis 2 denariis sunt empta pro 5 ₰ et uno ovo: queritur quanti precii est ovum.

Coniectatur primo ipsum valere 5 ₰; valerent 7 35, preter 2 denariis essent 33 ₰, qui deberent tantum esse 5 ₰ et unum ovum talis precii, scilicet 5 ₰ |, scilicet 10, qui excedit primus numerus in 23.

Coniectatur secundo 1 ovum valere 4 ₰; valerent ergo 7 28, preter 2 ₰ essent 26, qui esse debent tantum, quantum 5 ₰ et unum ovum eiusdem dem precii aut valoris, scilicet 4 ₰, et sic essent 9 ₰, qui excedit secundus numerus, scilicet falsus, scilicet 4 in 17.

5 plus 23 | 6 divisor.
4 plus 17 |

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus valoris ovi, scilicet 1 denarii et $\frac{1}{6}$ denarii. Ad probandum dic: 1 ovum constat $\frac{7}{6}$, quot 7 ova? facit 8 ₰ $\frac{1}{6}$. Depone 2 ₰, remanebit $6\frac{1}{6}$, et hoc est 5 ₰ et 1 ovum, quia 1 ovum constat $1\frac{1}{6}$ ₰.

Ad idem.

4 ova demptis 2 denariis emuntur pro 7 ₰ et ovo, queritur quantum precium est.

Omnino iuxta regulam operando patet, quod ovum valet 3 ₰

4 plus 3 | 3 divisor.
5 plus 6 |

Questio decima.

Quidam transiens vicum peciit a quodam, quot essent hore. Cui respondebat: quia dies est 12 horarum artificialium et sunt $\frac{2}{3}$ preteriti et $\frac{3}{4}$ futuri simul iuncte. Et verum dixit. Queritur, quot fuerunt hore.

Coniectatur 12 fuisse horas, cuius $\frac{2}{3}$ sunt 8, et $\frac{3}{4}$ sunt 9, usque ad complementum 12 horarum sunt 3, qui simul iuncte faciunt 11 et non 12, scilicet minus una.

Coniectatur secundo fuisse 6 horas, cuius vel quarum $\frac{2}{3}$ facit 4, et temporis futuri usque ad complementum 12 horarum $\frac{3}{4}$ sunt $7\frac{1}{3}$, qui simul iuncte sunt $11\frac{1}{2}$, que deberent esse 6 tantum, et sic excessus est in $5\frac{1}{2}$. |

12 minus 1 | $6\frac{1}{2}$ divisor.
6 plus $5\frac{1}{2}$

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus horarum, scilicet quod fuerunt 11 cum $\frac{1}{18}$.

5 *Undecima questio.*

Quidam mercator a quodam cupit emere 100 ℔ cere antique et nove pro 18 scutis. Ipse enim venditor vendit quintale, quod est 100 ℔, antique cere pro 10 scutis, et nove pro 20 scutis. Modo queritur quot libre antique cere et quot ℔ nove sibi veniunt pro 18 scutis facientes simul unum quintale.

10 Coniectatur primo, quod ei veniunt 40 ℔ antique, ille enim venduntur 4 scutis; et cum caperet 40 antique, reciperet nove 60, que valent 12, que cum 4 primis additis essent 16, et sic essent minus 2 pro 40.

Coniectatur secundo ipsum recipere 30 antique. Ille venduntur 3 scutis, et reciperes tunc 70 nove, que vendentur 14, et sic posito 30 esset 15 minus in uno.

40 minus 2 | 1 divisor.
30 minus 1

Modo iuxta regulam operando patet numerus verus antique cere scilicet 20, que valent 2 scuta, et nove 80 erunt, que valent 16, et sic patet solucio.

20 Nota in idem, quod si casus ponetur de tribus differentiis cere aut alterius rei, aut de pluribus differentiis, tunc per has posiciones non potest inveniri, nec per regulam, quia non semper uno numero, sed pluribus tales | 53' casus stare possunt.

Exempli causa quidam vendit de prima differencia pro 10 scutis, de 25 *secunda pro 25, de tercia pro 20 scutis ipsum quintale. Quidam cupit unum quintale aggregatum ex omnibus pro 18 scutis: queritur, quantum haberet de qualibet differentia.*

Una recipiendo de prima 40, de secunda 40, de tercia 20.

Alia recipiendo de prima 30, de secunda 20, de tercia 50.

20—29. Hier behauptet der Verfasser also, dass unbestimmte Aufgaben mit der *regula falsi* nicht zu lösen gehen, und giebt als Grund die mehrfachen Werthe an, welche die Unbekannten erhalten können. In dem vorliegenden Beispiele ist allgemein $A = 20 + t$, $B = 2t$, $C = 80 - 3t$. Die beiden vom Verfasser gegebenen Speciallösungen ergeben sich für $t = 20$ und für $t = 10$. Obwohl oben mehrfach ähnliche Aufgaben durch die Regel vom falschen Ansatz zur Lösung gebracht sind, so lässt sich diese doch in unserem Falle nicht anwenden, da das Erfordernis dazu — dass nämlich die Anzahl der zu theilenden Sachen und der zu zahlende Preis einander gleich sein müssen — hier nicht zutrifft. In nicht ganzen Zahlen findet man freilich durch die *Regula falsi* stets eine Lösung.

Duodecima conclusio(!).

Est enim facilis et terminabitur per modum resolucionis a posteriori, quamvis posset eciam regula ista manifestari, et est:

Quidam intrant ortum, qui habet 4 portas, et colligit poma, qui exitum petens a primo dat primo $\frac{1}{2}$ omnium et $\frac{1}{2}$ unius integri. Consequenter se- 5 *cundo dat $\frac{2}{3}$ omnium et $\frac{2}{3}$ unius integri; tercio vero dat $\frac{3}{4}$ omnium et $\frac{3}{4}$ unius integri; quarto autem dat $\frac{4}{5}$ omnium remanencium et $\frac{4}{5}$ unius ultra integri, et retinet tantum 2 in fine. Queritur, quot fuerint in principio.*

Quia remanserunt 2 et ultimo dedit $\frac{4}{5}$ ultra, ipsa 2 in 5 duc, et erunt 10, quibus adde $\frac{4}{5}$ ultra datas, et erunt 14 poma, que habuit, cum 10 venisset ad quartum. Ipsa igitur 14, quia tercio dedit $\frac{3}{4}$, duc in 4 et superadde $\frac{3}{4}$ ultra datas et habebis 59. Consequenter, quia secundo dedit $\frac{2}{3}$, ipsa 59 in 3 multiplica et $\frac{2}{3}$ producto superadde, et habebis 179, que 54 habuit, cum ad secundum veniret, que dupla, et unitas | superaddita dat quesitum, scilicet 359. 15

III.

133′ Machmet in dem puech algebra und almalcobula hat gepruchet dise wort: census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, daz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal fur sich selb gemercket, nit alz sie ain 20 zins oder ain wurcz ist. Aus den dingen merkt er 6 ding: das erst, wann der census sich gelichet den wurczen; daz ander, so der census sich gelichet der zal; daz drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; das 4 so sich der census und die wurczen gelichent der zal, als ob man spreche: ain census vnd 10 wurcz gelichent sich 32; das funft ist, so sich der 25 census vnd die zal gelichend den wurczen; das sechst, so sich die wurczen vnd die zal gelichent dem census.

Dar vmb sprech ainer: gib mir ain zensus vnd zuech darvon sin wurcz, vnd von dem, daz vberbelyb an dem census, zuech och ausz dye wurcz; die zwo wurcz tue zesamen, daz 2 zal darausz werden. So aber daz nit in 30

1—15. Diese Lösung ist mit der *regula versa* des Leonardo Pisano, und also indirekt mit der sogenannten *Umkehrung* der Inder identisch, zugleich mit der *regula sermonis* der Araber, aus welcher letztern Quelle sowohl Leonardo als unser Verfasser geschöpft haben dürften. 25. Hier hat Gerhardt schon darauf aufmerksam gemacht, dass wohl ein Schreibfehler für 39 vorliegt, da dann die Aufgabe mit der des Muhammed Alchwarizmî identisch wird.

der sechs regel ainer stat, | so bring es in ain regel also. Es sollen die 134
zwo wurcz 2 numero gelich gesin, so kompt es in die dritten regel; dar
vmb zuech ab von den 2 numero die wurczen dez census, so belyben
2 minder der wurczen desz zins, dasz selb belybend ist gelych der wurczen
5 desz, dasz ain census uberbelybt sein wurcz darvon gezogen wurt, daz du
aber habest des gelych, unsz daz uberbelybt, so multiplicir die 2 dragmas
minder ainer wurczen in sich selb, so komen 4 dragma vnd ain zins minder
4 wurczen, daz wurt gelich dem, daz uberbelybt an dem census, wann sein
wurcz darvon wart gezogen. Nu zuech darvon dye gemindert wurcz, so
10 belybt 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. | Nu tu 134'
baidenthalb den zins darvon, so beleybt dennocht dasz ubrig gelich, dasz
ist, 4 dragme sind gelych 3 wurczen. So musz ain wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann
3 mal $1\frac{1}{3}$ macht 4. Multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der
census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$, vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$;
15 die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$, die $\frac{2}{3}$ tue zu der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht
2 gancz. 1461. Erasmi martyris.

IV.

REGULE DELACOSE SECUNDUM 6 CAPITULA, 136'

vnd mit den selben capitel mag man alle rechnung machen, vnd haissen also:

20 Das erst: Cosa gleich numero,
Das ander: Censo gleich den numero,
Das dritt: Cosa gleich censo,
Das viert: Censo vnd cosa gleich numero,
Das funft: Censo vnd numerus gleich cosa,
25 Das sechst: Cosa vnd numerus gleich censo.

Nu merck, wen du ain rechnung machst, als du furpas werdest sehen, es musz der capitel aines gleich sein, darnach das selbig capitel ist, es musz mit der regel gemacht werden.

12. Gerhardt setzt hinter *sein* einen Punkt und beginnt dann mit *Wann* den Satz so, als ob er die Begründung für das Folgende: *Multiplicir* $1\frac{1}{3}$ wäre. Nun hat aber, und der Sinn wird mir auch recht geben, *wann* hier die Bedeutung von *weil* oder *denn*, und begründet, weshalb $x = 1\frac{1}{3}$ sein muss, wenn $4 = 3x$ ist. Bei Vergleichung unseres Textes mit dem Gerhardts werden auch sonst noch mehrfache Unterschiede zu Tage treten.

Capitulum primum.

Wen der numerus gleich ist cosa, das ist, wen dy zal gleich dem ding
137 ist, so sullen wir dy zal tailen | in daz ding, id est in den cosa, vnd was
dar aus kumbt, als vil ist das ding wert.

Capitulum secundum. 5

Wen das ding ist gleich, das ist censo gleich der zal, so sol man
tailen dy zal, id est den numerus, mit dem censo, vnd was ausz der tailung
kumbt, Radise quadra von der selbigen zal ist daz ding wert.

Capitulum tercium.

Wen das ding ist gleich dem censo, so sol man das ding tailen in 10
den censo, vnd was dar ausz kumbt, vnd als vil ist das ding wert, id
est cosa.

Capitulum quartum.

Wen dy zal, id est numerus, gleich ist dem ding, id est cosa, vnd
137' dem censo, so sol mansz tailen mit dem censo, dar | nach das cosa, id est 15
ding, halbs taylen, vnd das selbig halbtayl schol man furpas in sich machen,
vnd was es dann trift, auf dy selbig summa soltu darnach dy zal darzu-
thun, vnd radix in der selben summa unternand mynder den halbtail von
dem ding ist das ding wert.

Capitulum quintum. 20

Wen das cosa, id est ding, gleich der zal, id est numero, vnd dem
censo, so soltu tailen mit dem censo alle ding, vnd das ding halbs tailen,
vnd für daz selbig halbtail in sich selb, das das selb halbtail von dem
ding, vnd von der sum schol man abziehen dy zal. ain radixe von dem
selbigen abgezogen ist das ding wert. 25

2—4. Das ist $ax = b$, $x = \frac{b}{a}$. 6—8. Hier hat sich der Verfasser zuerst verschrieben, indem er sagt: *Wen das ding*, er verbessert sich aber sogleich, indem er hinzufügt, *das ist censo*. In Zeichen: $ax^2 = b$, $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. 10—12. Das ist $ax^2 = bx$, $x = \frac{b}{a}$. 14—19. Das ist

$$ax^2 + bx = c; \quad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}; \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}.$$

21—25. Es soll sein $ax^2 + c = bx$; $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$; $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$; ein Commentator zu der Gerhardtschen Algebra — siehe unten — kennt auch bei der Wurzel das + zeichen.

Exemplum. 80 drittail aines hallers wie uil fl. es macht. Machs als do stet $\frac{3}{1}$ pro 1 Haller, wie 80. | facit 1 fl. 6 ₰ $\frac{2}{3}$ ains Hallers. 138

Capitulum sextum.

Wen der censo ist gleich dem ding und der zal, so schol man tailen
5 mit dem censo, vnd das ding $\frac{1}{2}$ tail, vnd fürsz in sich selbs, multiplicir für sichs selbigen $\frac{1}{2}$ tail, vnd das es trift, soltu dy zal darzu thuen, vnd dy radix von dem selben summe vnd auch das $\frac{1}{2}$ von dem ding ist das ding wert.

Merck, was censo, ding und cubo ist.

10 Multiplicir ding wider ding, macht censo:
Multiplicir ding wider censo, macht cubo.
Multiplicir ding wider cubo, macht censo de censo.
Multiplicir censo de censo wider ding, macht du^x cubo.
Multiplicir censo wider censo, macht censo di censo.
15 Multiplicir cubo wider cubo, macht cubo di cubo.

| *Exemplum de primo capitulo.* 138'

Mach aus 10 zwai tail, vnd das grôst tail in das ander tail, vnd das aus der tailung 5 chumbt: wie uil ist ittlichs tails gewesen?

20 Machs also. nym, das 1 tayl say 1 ding, id est cosa, so musz das ander tail 10 mynder 1 dings seyn. Nu tail 10 mynder 1 dings in 1 ding, vnd sol 5 aus der taylung komen. vnd darumb das man in 1 ding nit mag taylen, mustusz also tailen. 10 mynder 1 dings mustu taylen in 1 ding, vnd 5 soll treffen aus der taylung. Nun multiplicir 5 wider ain
25 ding, das was der tayler, so sol das komen, das man getaylt het, das was

1—2. Dieses *Exemplum* ist natürlich nur durch die Schuld des Abschreibers aus einer Randglosse in den Text gekommen. 4—8. Das ist $ax^2 = bx + c$; $x^2 = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$; $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$. 13. Die letzten Worte dürften wohl *duplex cubo* zu lesen sein, dann würden also folgende Potenznamen sich ergeben:

x = ding = cosa
x^2 = censo
x^3 = cubo
x^4 = censo di censo
x^5 = duplex cubo
x^6 = cubo di cubo.

Es wären also hier, im Gegensatz zu Luca Paciuolo die Exponenten nicht multiplicirt, sondern addirt.

10 mynder 1 ding gleich. Nu gib wider den 10 das ding, das er mynder 139 hat, so pleibt 10, gib an der ander tail auch | 1 ding zu 5 ding, so wirt 6 ding, das ist 10 zal gleich, id est numero. Nu spricht das erst capitel: wen das cosa gleich dem numero ist, so sol man die zal in daz cosa taylen: Nu tail 10 in 6, kumpt 1 vnd $\frac{4}{6}$, ist $\frac{2}{3}$, vnd als uil ist das ding 5 wert. Nu nym das v̊brig bisz auf 10, das wer 8 vnd $\frac{1}{3}$· das 1 tail ist $1\frac{2}{3}$, das ander tail ist $8\frac{1}{3}$·

1 ding · 10 mynder 1 dings · $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{\text{pl}}$

5 mol 1 ding ist 5 ding $\frac{10}{1}$ · 1 $\frac{4}{6}$·

Exemplum de secundo capitulo. 10

Vind 1 zal, das ich $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ von der selben zal genemen mug, vnd was v̊ber pleibt, wil ich furpas in sich selb multipliciren, vnd schol 16 tragen (?).

139' Machs also. nym das dy zal sey | 1 cose, id est ding, gewesen. Nu nym $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ von 1 cosa, das ist $\frac{7}{12}$, pleibt $\frac{5}{12}$ ding. das für in sich selb, 15 das macht $\frac{25}{144}$ von 1 censo, vnd das ist gleich 16. Darumb spricht dy regel, wann dy zal gleich dem censo, so soll man dy zal in dem censo tailen, vnd was dar ausz kumbt, radix quadrata von der selben sum ist das cose wert. Darumb tail 16 in $\frac{25}{144}$ censo, trift $92\frac{4}{25}$, vnd radix von $92\frac{4}{25}$ ist das cose wert, das ist $9\frac{3}{5}$, vnd $9\frac{3}{5}$ ist dy zal gewesen. 20

Probacio. Nym $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ dauon von $9\frac{3}{5}$, vnd das v̊brig multiplicir fur sich selb, so kumbt 16, et factum est.

De capitulo tercio.

Item wen dy censo gleich dem ding, so sol man das ding in den censo taillen, vnd als vil ist das ding wert. 25

140 Vind ain zal als 2 gegen | 3, vnd dy selben zal als vil prungt zusamen gethan als man hat multiplicir ain wider dy ander.

Machs also. nym, das dy erst zal sey 1 cosa gewesen, vnd das ander musz 3 seyn. thu zesam 2 vnd 3, macht 5 cose. Nu multiplicir 2 cose uider 3 cose, macht 6 censi. Nu haben wir 5 ding gleich 6 censi. (censi) 30 gleich dem ding, so sol man (tailen) ding in 6 censi, komen $\frac{5}{6}$; als v̊il ist das ding wert. Vnd wir haben geseczt 2, darumb multiplicir 2 mol $\frac{5}{6}$,

28. Das muss natürlich heissen: *2 cosa,* wie aus dem Zusammenhange ersichtlich ist.

fit $\frac{10}{6}$, das ist $1\frac{2}{3}$, vnd als vil ist dy erst zal gewesen; der ander was 3 ding. Multiplicir 3 mol $\frac{5}{6}$, ist $2\frac{1}{2}$, vnd als uil ist dy ander zal gewesen, et factum est.

Probacio. Wir haben die erst zal $1\frac{2}{3}$, dy ander $2\frac{1}{2}$; thu es zesam,
5 trift $4\frac{1}{6}$. | Nu sol wir multipliciren, vnd sol auch komen $4\frac{1}{6}$. Nu mul- 140'
tiplicir $1\frac{2}{3}$ wider $2\frac{1}{2}$, das macht $4\frac{1}{6}$, vnd ist probiret.

De capitulo quarto.

Item ainer leicht 20 ℔ jn 2 jaren gewin v͛ber gewin, vnd wen dy zwey jar ausz komen, so gibt man im wider 30 ℔ mit
10 hauptgut vnd gewin. Nu frag ich, wie uil 20 ℔ in 1 jar hat gewonnen, vnd 20 β ist 1 ℔.

Machs also. Nym das 20 ℔ in 1 jar haben gewonnen 1 ding; das ander gewinnet dy 20 ℔ aber 1 ding. Nu mach, was 1 ding auch gewynet, mit der regel von 3 ding. Sprich 20 ℔ pro 1 ding, wie 1 ding
15 vnd secz also

$$20 \cdot 1\,\partial \cdot 1\,\partial.$$

Multiplicir 1 ∂ wider 1 ∂, macht censy vnd | tails in 20, chumbt 141
$\frac{1}{20}$ censo, vnd das ist dy 30 ℔ gleich mit hauptgut vnd gewin: 20 ℔ 2 ∂ $\frac{1}{20}$ censy dem 30 ℔ gleich. Nu zeuch ab 1 zal von der andern,
20 wann es sol nur 1 zal sein. zeuch ab 20 ℔ von 30 ℔, pleibt 10 ℔; desgleich auch 1 ∂ $\frac{1}{20}$ censo, vnd tail alle ding mit dem censo. tail 10 ℔ in $\frac{1}{20}$ censo, kumbt 200 ℔; tail 2 ∂, chumbt 40 ∂. Nu haben 200 ℔ mit 40 ∂. tail das ding in $\frac{1}{2}$, alz dy regel spricht, kumbt 20 ∂. Multiplicir für sich selbs, trift 400 ∂, thu dy zal dazu dy 200 ℔, trift 600,
25 vnd radix von 600 mynder das halb tail von dem ding hat 20 ℔ 1 jar gewonnen.

| *De capitulo quinto.* 141

Item es sind 2 gesellen, dy wellen stechen mit einander. der 1 hat gelt, der ander hat seyden. der mit der seyden peut
30 1 ℔ pro 9 fl pargelt vnd im stich 12 fl, vnd uil $\frac{1}{4}$ pargelt, das der mit dem gelt peut das gelt am beraiten gelt pro 10 fl 1 marc. Nu frag ich, wie er das gelt am stich sol pieten, das er $\frac{1}{4}$ von dem stich dem andern geb, vnd der stich gleich sey.

7–26. Das ist die *regula lucri* WIDMANNS nur mit andern Zahlenwerthen. Wir werden derselben Aufgabe später nochmals begegnen. Siehe auch CANTOR, Vorlesungen II, S. 213–214. 28 u. ff. *Stich* heisst Waarenaustausch. Siehe CANTOR, Vorlesungen II, S. 207.

Machs also: nym das 1 ∂ gelt 1 stich. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 1 ∂, das ist $\frac{1}{4}$ dings, vnd das gib dem mit der seyden, der do 1 ℔ peut pro 9 fl vmb pargelt vnd am stich pro 12 floren. Nu gibt man $\frac{1}{4}$ ∂, darumb
142 zeuch im ab $\frac{1}{4}$ ∂. Nu machs mit der | Regel von 3 ding. 9 fl mynder 1 ∂ pro 12 fl mynder $\frac{1}{4}$ ∂, daz chan man nit taylen, wan ding in dem 5
tailer ist. darumb sprich also: wir haben zu taylen 120 mynder $2\frac{1}{2}$ in 9 mynder $\frac{1}{4}$, vnd 1 ding ausz der taylung chomen. Darumb multiplicir 1 ∂ wider den tayler, das ist 9 minus $\frac{1}{4}$ dings, so werden 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gleich. Nu multiplicir 1 ∂ wider 9 minus $\frac{1}{4}$ ∂, das macht 9 ∂ minus $\frac{1}{4}$ censo. Nu mach ain ydlich gleich, wan dem ersten sol man 10
wider geben. gib dem 120 mynder $2\frac{1}{2}$ ∂ gewin $2\frac{1}{2}$ ∂, so pleibt 120 zal; gib dem andern auch als vil, komen $11\frac{1}{2}$ ∂ minus $\frac{1}{4}$ censy. gib in auch
142' den $\frac{1}{4}$ censy, das er minus hat, so pleibt $11\frac{1}{2}$ ∂. | gib dem andern auch $\frac{1}{4}$ censy, trift 120 zal $\frac{1}{4}$ censy. Nu haben wir paid tailen gleich gemacht, pleibt dem ainen tail $11\frac{1}{2}$ ∂, dem andern tail pleibt 120 zal vnd $\frac{1}{4}$ censy. 15
Nu sol man alle ding in dem censo tailen. tail 120 zal in $\frac{1}{4}$ censy, trift 480 zal; tail auch $11\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ censy, trift 46 ∂; tail dy ding in halb, ist 23; multiplicir 23 für sich selb, sint 529. Nu zeuch ab dy zal, das ist 480, pleibt 49. Nu radix von 49 ist 7, das sol man abzihen von dem halben tail von dem ding, das was 23. zeuch ab 7 von 23, pleibt 16; 20
vmb 16 fl hat man das gelt am stich gepoten.

136 | *Proba super quintam regulam lacose.*

Wiltus probiren, so sprich also. der mit der seyden peut 1 ℔ vmb 5 fl an pargelt vnd am stich vmb 12 fl, vnd wil $\frac{1}{4}$ pargelt haben von dem, der gelt hat, der das gelt am stich vmb 16 fl hat vnd umb pargelt 25
pro 10 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von 16, ist 4, vnd zeuch 4 von 12, pleibt 8; auch zeuch ab 4 von 9, pleibt 5. darnach sprich: 5 vmb 8, wie 10. secz also 5 · 8 · 10, kumpt 16.

5 · 8 · 10 $\frac{80}{16}$ 1 ding stich
pargelt pargelt 30

---

22 bis S. 56 Z. 5. Diese *Proba* ist von der Hand des Frater Fridericus, während der Haupttext von anderer Hand ist. Jedenfalls ist aber dadurch bewiesen, dass diese Algebra nicht später zu setzen ist als die von demselben Frater Fridericus geschriebene Gerhardtsche Algebra.

9 mynder $\frac{1}{4}$ ꝯ $\frac{12}{12}$ mynder $\frac{1}{4} \cdot 10\frac{1}{4}$

9 ding minder $\frac{1}{4}$ censo | 120 minder $\frac{10}{4}$

pleibt $11\frac{1}{2}$ ding minder $\frac{1}{4}$ censo pleibt 120 zal

$11\frac{1}{2}$ ding $120\frac{1}{4}$ censo $\frac{46}{23}$ ∂ $\frac{529}{480} \cdot 480$.

5 Radix von 49 ist 7, zeuch ab von 23, pleibt 16. | 136′

De capitulo sexto. Noch 142′

Item ainer hat 100 ellen tuchs vnd ain ander hat auch als uil, vnd der erst geit seins | tuchs 5 ellen mer vmb 1 fl. den der 143 ander, vnd wenn sy dy tuch payde verkauft haben, so vinden sy, 10 das sy 20 fl haben. Nu sprech ich, wie uil ydlicher ellen seins tuchs vmb 1 fl sol geben.

Machs also: nym, das der ander hab 1 ∂ pro 1 fl geben von den 100 ellen, so muss der erst geben 1 ∂ und 5 ellen mer. Nu tail 100 ellen in 1 ding, das er vmb 1 fl gibt, so trift $\frac{100}{1 \text{ ding}}$, 100 in 1 ding ge-15 tailt, als vil fl trifts. Nu tail dy ander 100 ellen in 1 ∂ vnd 5 mer, so trifts $\frac{100}{1\,\partial\,5}$ 100 in 1 ∂ vider 5 mer getailt. Nu summir zesam $\frac{100}{1\,\partial}$ vnd $\frac{100}{1\,\partial\,5}$, als man zu prochen thut. Multiplicir in crucz: 100 mal 1 ∂ macht 100 ∂, vnd 100 mal 1 ∂ vnd 5 macht 100 ding vnd 500 zal. | 143′ addir zesam 100 ∂ vnd 100 ∂ vnd 500 zal, macht 200 ∂ vnd 500 zal. 20 das sol man tailen in dy vntern figur, das ist 1 ∂ multiplicirt vider 1 ∂ 5, macht 1 censy vnd 5 ding, vnd tail 200 ∂ vnd 500 zal in ain censy vnd 5 ∂. das tailt uider nicht, wan ding ist. Vnd merck, wen du es getailt hast, so sol 20 fl komen, darumb multiplicir 20 fl uider 1 censy vnd 5 ∂, wirt gleich 200 ∂ vnd 500. Multiplicir ain censo 20 fl, macht 20 censo vnd 25 100 ∂ gleich 200 ∂ 500 zal. Nu nym davon dy 100 ∂, pleibt zu aym tail 20 census. nym zu dem andern tail auch 100 ∂, so plaibt 100 ∂ vnd 500 zal dem andern. tail mit dem censo, das chumbt 1 censo 5 ∂ vnd 25 zal. tail dy 5 ∂ halbs, das ist $2\frac{1}{2}$ ∂; multiplicir für sich, trift |

6 bis S. 57 Z. 3. Auch dieses Beispiel wird uns später nochmals begegnen. Dort ist es mit der 5. Regel gelöst, indem nicht die Ellenzahl des zweiten, sondern die des ersten als Unbekannte genommen wird, doch wird dort auch gesagt, man könne durch die sechste Regel die Aufgabe ebenfalls lösen. Bemerkenswerth sind jedenfalls die allgemeinen Brüche $\frac{100}{1 \text{ ding}}$ und $\frac{100}{1 \text{ ding } 5}$. Aehnliche, aber noch complicirtere werden wir später wieder finden.

144 6 ∂ $\frac{1}{4}$· tu es zesam mit der zal, das ist 25 zal, trift 31$\frac{1}{4}$, vnd radix von 31$\frac{1}{4}$ mer 2$\frac{1}{2}$ hat der ander ellen vmb 1 fl geben, der erst hat radix von 31$\frac{1}{4}$ mer 7$\frac{1}{2}$ vmb 1 fl geben, et factum est.

De capitulo primo.

Item ainer hat gelt pay im, vnd wil tuch kauffen, vnd wen 5 er 3 ℔ gibt pro 1 ellen, so mangelt er 4 ℔ am zalen, vnd wenn er 2 ℔ gibt pro 1 ellen, so pleibt im 10 ℔ v̊ber. Queritur, was 1 ellen hab golten, vnd wie uil geltes pey im hab.

Machs also: nym wir, das das stuck sey 1 ding gewesen, vnd er geit 144′ 3 ℔ pro 1 ellen. Sprich 3 mol 1 ∂ ist 3 ∂ | minus 4 ℔ darumb das 10 er spricht, er mangelt 4 ℔ am zalen, darumb chomb 3 ∂ minus 4 ℔. Nu sprich 2 mol 1 ∂ ist 2 ∂ vnd 10 ℔ mer, darumb das er spricht, im pleibt 10 v̊ber. Nu ist 3 ∂ minus 4 ℔ dem ander gleich, das ist 2 ∂ 10 mer. Nu mach ain yeden tail gleich, gib dem 3 ∂, vnd gib dem andern auch 4 ℔, so trifts 2 ∂ vnd 14 ℔ gleich den 3 ∂. zeuch ab 2 ∂ 15 von 3 ∂, pleibt 1 ∂ vnd dem andern 14. Nu tail 14 in 1 ∂, kumbt 14, vnd 14 ist das ding wert. Das tuch ist 14 ellen gewesen. Wiltu nu wissen, wie uil gelts, so sprich: 3 mol 14 ist 42 ℔. Nu zeuch ab dy 4 ℔, 145 dy er mangelt, so pleibt jm 38, dy hat er pey im gehabt. | Sprich 2 mol 14 ellen ist 28, pisz auf 38 ist 10 ℔ v̊brig, vnd also ist probiret vnd 20 gemacht.

Item zwischen 7 vnd 13 secz 5, was sol ich seczen zwischen 32 vnd 4.

Item es sein 2 gesellen, dy wellen vnternander stechen. der erst peut sein ding pro 8 fl 100 ℔ pargelt vnd am stich pro 11 fl, 25 der ander peut sein ding 1 ℭ pro 4 fl mer am stich dan vmb pargelt. Nu frag ich, wie uil der ander sein ding hat gepoten am pargelt vnd am stich dem mit paren gelt.

Machs also: nym das er am paren gelt peut 1 ∂, so muss er am 145′ stich pieten 1 ∂ vnd 4 fl | mer; darumb sprich also: 1 ∂ pro 1 ∂ vnd 4 fl, 30 wy 8, vnd sol 11 komen, als der erst hat poten. Nu secz also 1 ∂ 1 ∂ 4 · $\frac{8}{1}$ · Nu mach 8 mol 1 ∂ vnd 4 macht 8 ∂ 32, vnd das sol man tailen in

4 bis S. 58 Z. 18. Diese Aufgabe und die beiden folgenden sind nachträglich hinzugefügt worden. Mit der Aufgabe für das 6. Capitel war die eigentliche Abhandlung zu Ende. Der ersten Aufgabe sind wir schon oben S. 39, Z. 23 bis S. 40, Z. 3 mit dem identischen Wortlaute begegnet. Auch die dort gegebene Lösung beruht auf den hier ausführlich gegebenen Schlüssen. 22 - 23. Diese Zeilen sind sicherlich absichtslos hierher gesetzt worden.

1 ∂, vnd sol aus der tailung komen 11, das sind dy 11 fl, das der erst peut am stich. Nu haben wir 8 ∂ vnd 32, das sol man tailen jn 1 ∂, vnd soll 11 komen, darumb multiplicir 1 ∂ uider 11, das macht 11 ∂, das ist 8 ∂ vnd 32 gleich. zeuch ab 8 ∂ von 11 ∂, pleibt 3 ∂, gleich 5 32 zal. Nu tail 32 in 3 ∂, komen $10\frac{2}{3}$ ist das ding wert. darumb hat der ander sein ding am gelt vmb 10 fl $\frac{2}{3}$ poten, vnd 14 fl $\frac{2}{3}$ hat er am stich poten, vnd | an gelt pro 10 fl $\frac{2}{3}$, das ist 4 fl $\frac{2}{3}$ am gelt get mir 146 14 fl $\frac{2}{3}$ am stich w. g. in 8; vnd wiss, von recht soll 11 komen.

1 ∂ · 1 ∂ vnd 4 8 · 11 · | 32
10 1 ∂ · 1 ∂ 4 · $\frac{8}{1}$ 11 ∂ | 11 ∂
18 · 18 · 32 · $10\frac{2}{3}$

De capitulo primo.

Item es sein 3 gesellen, dy haben gelt, vnd der erst spricht zu den andern 2: het ich 7 fl ewres gelts, so het ich dann 3 mol mer 15 dann ir 2; spricht der ander: het ich 9 fl ewres gelts, so het ich 4 mol mer dann ir 2. spricht der dritt: het ich 11 fl ewres gelts, so het | ich 5 mol mer dann jr 2. 146′

Facit. si haben all 3 gehabt $19\frac{43}{88}$. Primus $7\frac{53}{83}$, secundus $6\frac{51}{83}$, tercius $5\frac{22}{88}$.

V.

20 *Questio prima.*

Quidam emit 15 ℔ zinziberis et 17 ℔ carioflorum pro 7 fl, et de cariofloribus pro vno fl veniunt 3 ℔ plus, quam veniunt zinziberis: queritur, quot veniunt ℔ zinziberis pro vno fl, et quot ℔ carioflorum pro vno fl.

25 Sic inquiro. pono, quod zinziberis vna res veniat pro fl, tunc oportet ex ypotesi, ut carioflorum vna res et 3 ℔ veniant eciam pro fl. Debeo igitur diuidere 15 per 1 rem, iterum 17 per 1 rem et 3, et que exeunt in quantitate coniungere, et productum erit 7 fl. Sed cum diuido 15 per 1 rem exit fractio, scilicet $\frac{15}{1\text{ res}}$. Iterum cum diuido 17 per 1 rem et 3,

12—17. Die Auflösung, so wie sie hier nur angedeutet ist, folgt später ausführlich. 18 u. ff. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf die Algebra, welche Gerhardt herausgegeben hat. Es heisst später *„in algebra Arabis"*.

exit finaliler fractio, scilicet $\frac{17}{1 \text{ res et } 3}$. Has duas fractiones more numerorum coniungo, multiplicando denominatorem in denominatorem, scilicet
147 rem in rem et 3. proveniunt census | et 3 res, denominator. Post numeratorem prime in denominatorem secunde et numeratorem secunde in denominatorem prime, et simul addite faciunt 22 res et 45. Ergo ex 5
coniunctione harum fractionum exit fractio, scilicet $\frac{32 \text{ res et } 45}{1 \text{ census et } 3 \text{ res}}$. Fractio valet ex supposicione questionis tantum, quantum 7 fl. Ergo diuidendo numeratorem per denominatorem debent exire 7, quare e converso multiplicando denominatorem per 7 illud, quod exit, necessario equale erit numeratori. Ideo sequitur, ut 7 census et 21 res sunt equales 32 rebus 10
et 45. Auffero utrobique 21 res, erit per communem conceptionem, quod 7 census equales fient 11 rebus et 45. Igitur 1 census equale erit $\frac{11}{7}$ rei et cum hoc $\frac{45}{7}$ additis. Ecce es in sexta regula, quando census equatur rebus et numero. Age igitur secundum eam, mediando rem, mediatum in se multiplicando, et sibi numerum coniungendo, et producti radicem ex- 15
trahendo, et huic radici medietatem rerum addendo, et habebis valorem rei. Sic illud facio. Medio $\frac{11}{7}$, sunt $\frac{11}{14}$; duco hoc mediatum in se, veniunt $\frac{121}{196}$; huic coniungo $\frac{45}{7}$, proveniunt $\frac{1381}{196}$; huius aggregati debeo inquirere radicem quadratam. Sed quia hec fractio, quamquam denominator sit numerus quadratus, tamen ipsa non est fractio quadrata, propterea quod numerator 20
147′ eius est numerus | non quadratus, igitur impossibile est imperativum te invenire eius radicem. Quamcumque radicem propinquam mihi assignabis, ego semper assignabo adhuc viciniorem numerum radici eius vere. Ergo dico, quod emptio talis, ut proponitur, est impossibile et falsa, cum ea in nulli numero fieri possit. Sed si sic posuisses, diuide 15 per aliquam 25
quantitatem, iterum diuide 17 per aliam quantitatem, que priorem divisorem excedit in ternario, et coniunge quocientes, et aggregatum ex eis faciat 7. Dic mihi hos diuisores (*Nota.* Non sum adeo iners, quod illud

6. Hier ist einer der oben vorausgesagten allgemeinen Brüche. 23 u. ff. Hier ist es interessant zu sehen, wie der Verfasser gut zu unterscheiden weiss zwischen angewandten Aufgaben und Aufgaben in reinen Zahlen. Während hier die gegebene Aufgabe, da irrazionale Wurzeln erscheinen, so wie sie gegeben ist, nicht gelöst werden kann, jedenfalls aber nicht absolut genau, lässt die zweite eine präcise Lösung zu. Der Verfasser bezieht sich hier und später auf das 10. Buch des Euklid von den Irrazionalen Grössen und zeigt sich mit demselben recht wohl vertraut. Für die damalige Zeit ein sehr gutes Zeugnis für denselben. Ob er jedoch im Stande gewesen wäre, die von ihm verlangte Probe wirklich durchzuführen, möchte ich doch bezweifeln.

te effectum dabo). facio opus, ut prius, et quando venio ad hoc aggregatum $\frac{1381}{196}$, huius debeo extrahere radicem. Sed ea non potest precisius et verius nominari quam radix de $\frac{1381}{196}$. Huic radici addo medietatem rerum, scilicet $\frac{11}{14}$, et proueniet radix de $\frac{1381}{196}$ huic radici adiunctis $\frac{11}{14}$.
5 Dico ergo, quod prima quantitas diuisoris est radix de $\frac{1381}{196}$ et $\frac{11}{14}$, et quia quantitas secundi divisoris est hac in ternario maiore, ideo secundus diuisor fiet radix de $\frac{1381}{196}$ additis $\frac{53}{14}$. Iam habes quesitas quantitates. Sed sunt binomina, uno enim nomine est eas impossibile ex|plicari, et sunt linee 148 irracionales et incommunicantes cum 15 et 17 numeris propositis. Si
10 legisti decimum librum Euclidis, ubi de hiis lineis irracionalibus agit, facilius intelliges. Quod si autem probare voles et ostendere tantum factum esse, pone quocientes in diuisione, ut fieri solet more fractionum, ut hic

$$\frac{15}{\frac{11}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}},\qquad \frac{17}{\frac{53}{14}\text{ et radix de }\frac{1381}{196}}.$$

prima fractio secunda fractio

15 Denominatores horum fractionum sunt binomia et ponuntur sub virgula, numeratores sunt racionales et numeri. Si vis eas coniungere, duc denominatorem unum in alium, et quod exit, fac denominatorem aggregati ex eis. item numeratorem prime in denominatorem secunde et e converso numeratorem secunde in denominatorem prime, et coniunge hec aggregata
20 pro numeratore aggregati. Et si recte fecisti, denominator precise septies continebitur in numeratore, quare recte actum convinces. Item si vero hec practica de binomiis et numeris surdis uni non sit cognita, ille frustra agitur.

Ecce quanta | diuersitas in proposicione questionis. Cum enim idem 148'
25 modus practice sit in utrisque, tamen primum est impossibile, aliud possibile, propter quod emptio humana non fit, nisi numero et quantitate distincta. Nemo enim vendet tibi aliquid pro radice de decem, cum ea non sit numerus, neque in numero, et si eciam ad infinitas fractiones distenderes, nunquam tamen radicem de illo numero comprehendes, sed
30 quantitate continua comprendere potest. Ergo primum dixi impossibile, secundum autem possibile, quia illud in quantitatibus surdis quidem fieri potest. licet enim mercator querens multiplicitate fractionis ad vicinam accedit adeo eciam, ut in una millesima parte assis non esset, tum illud precisioni non sufficit. Quando igitur partitum proponitur, quod
35 in numero comprehendi non potest, ego dico, ipsum mercatoribus esse impossibile, qui unitatibus omnes suas merces dimeciuntur non radicibus surdis! —

Surdus numerus non est numerus. Nam numerus est, quam unitas mensurat, et illa ad primam questionem. — Tamen quantum grosso calculatori sufficiet, et prope verum quereret non ipsum verum precisum, satis esset dicere in numero: De casiofoliis emit pro uno floreno libras 6 et $\frac{3}{7}$
149 vnius ℔ et modicum plus, | et illud modicum plus non potest certo 5
numero dici; et de zinzibere pro 1 fl emit 3 ℔ et $\frac{3}{7}$ unius ℔ et eciam modicum plus, quod eciam certo numero dici non potest.

Sed ego taliter non appercio solucionem, quia non capit precisionem et puram veritatem. Quantumcumque enim vicine accedas ad verum duos tales numeros assignando, ego adhuc magis vicinius in millecupto accedere 10
possum, et sic sine statu. Et hoc faciunt nostra binomia. Ideo non potest precisius dici quam in surdo, ut superius dixi. Sed hoc tamen pro doctis et non pro mercatoribus, qui quia grossi sunt, subtilem numerorum racionem comprehendere nequeant. contenti enim sunt tantum numerare, quantum numero florenorum suorum ostenditur. Sed nobis, qui florenis caremus, et 15
qui diviciis non impedimur, attingimus racione nostra eciam illud, quod mercatori est impossibile. fui prolixior, quam institueram.

Secunda questio.

Unus concedit alteri 20 fl. ad duos annos pro lucro et lucri lucro. tandem restituit sibi in fine secundi anni 30 fl capitale 20
et omnem lucrum et lucri lucrum. Queritur de lucro primi
149' anni, similiter quantum 20 fl et | lucrum primi anni pro secundo anno lucri fecerunt.

Pono, quod lucrum primi anni sit una res, et quia lucrum est proporcionale semper, ideo dico: 20 fl lucrantur 1 rem, quid lucrantur 20 fl 25
et una res? Duco 1 rem in 20 fl et rem, exierunt 20 res et census. hoc diuido per 20, venit 1 res et $\frac{1}{20}$ census, et tantum erit lucrum anni secundi. Coniungo hec, et erunt 20 fl et 2 res et $\frac{1}{20}$ census. hec sunt equales 30 fl. Auffero utrobique 20 fl, quare 2 res et $\frac{1}{20}$ census equales erunt 10 florenis. Multiplico unum quodque per 20 et erunt 40 res et 30
unus census equales 200 fl. Ecce census et 40 res equantur 200 fl. Iam

---

1—7. Die Wurzel aus $\frac{1381}{196}$ ist hier gleich $\frac{37}{14}$ gesetzt, also nur die Ganzen des Zählers berücksichtigt. Bei einer spätern Gelegenheit zeigt der Verfasser dieses Commentars, dass er wirklich, wie er sagt, die Wurzel *vicinius in millecuplo* zu finden im Stande ist. 18 u. ff. Auch diese Aufgabe ist schon oben Seite 54, Zeile 8—26 genau wie hier abgehandelt worden. Es ist die *regula lucri* Widmanns.

es in quarta regula *Algebre Arabis*. Medio res, sunt 20; duco in se, sunt 400; iungo sibi numerum, fiunt 600; huius debeo extrahere radicem. quia autem non habet in numero, ideo quoque dico, numquam accidere soli re in mutuis precise, ut casus ponit. Tamen ego satisfaciam racioni
5 vestre regule. radix, que queritur, est radix de 600. Ab hac aufero medietatem rerum, scilicet 20, remanet radix de 600 demptis mihi 20. Ecce hic vocatur ab EUCLIDE | unum ex residuis. Sunt enim quedam linee 150 irracionales, quas vocat residua binomiarum. binomia namque sunt cum
9 additis, residua vere cum diminutis. Est ergo lucrum primi anni radix de 600 diminutis tamen 20. Sed lucrum tocius secundi anni est difficilioris invencionis sic. Quia inquirendo positum fuit lucrum tocius secundi anni esse 1 rem et $\frac{1}{20}$ census, res autem iam inventa est esse radix de 600 diminutis 20, hanc in se multiplico, veniunt 1000 minus 40 radicibus de 600, et tantus est census rei. Nunc eius vicesima pars est 50 diminutis tamen
15 duobus radicibus de 600. habeo ergo quod lucrum pro secundo anno totale fuit aggregatum ex radice de 600 diminutis 20 et ex 50 diminutis duabus radicibus de 600. hec autem simul addita faciunt 30 diminuta radice de 600. Dico ergo, quod lucrum secundi anni est 30 diminuta radice de 600. Potuit tum facilius id sic reperiri, postquam certus fuisti de lucro primi
20 anni, scilicet radice de 600 diminutis 20, et lucrum amborum annorum simul fuit 10. Ergo lucrum secundi anni fuit residuum de 10, scilicet quod manet ablatis ab eis radice | de 600 diminutis 20. Et cum hoc facies, 150' manent 30 diminuta radice de 600.

Hic disce residuum in se multiplicare.

Hic disce duo residua coniungere.

Hic disce residuum subtrahere a numero.

Ad hanc rem et similes operaciones oportet vos scire algorismum
25 de additis et diminutis et artem binomialem. Nec potest hec racio aliter precise reperire, nisi velletis esse contenti in eo, quod est prope verum, ita ut mercatoribus sufficeret, qui unam decimam partem floreni nihil pendunt, qui mihi, si addesset, valde cara esset, et non proicienda in lutum. Possetis dicere, quod lucrum primi anni fuit 4 et $\frac{1}{2}$ modico valde inde
30 dempto; lucrum secundi anni fuit 5 et $\frac{1}{2}$ et aliquid parvulum plus. Tamen quia in numero est illud impossibile attingere, ideo ego maneo apud primam solucionem, que precise est, sola precisio mihi placet, et hec de secunda questione.

---

1. Hier ist die oben schon erwähnte Stelle, an welcher die *algebra Arabis* genannt wird. 28—30. Hier ist die Wurzel aus 600 durch die bekannte Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$ gewonnen worden, welche genau $24\frac{1}{2}$ liefert. Verfasser weiss aber, dass dieselbe um etwas zu gross ist.

Tercia questio.

A habet 100 brachia panni, B quoque 100. A vendit pro uno fl in 5 brachiis plus quam B et venditis pannis in toto habent 20 fl. Queritur, quod ulnas quilibet pro fl dedit.

151 Pono quod A det 1 rem | pro fl, ergo B vendet 1 rem minus 5 pro floreno. Diuido 100 per 1 rem, exit $\frac{100}{1 \text{ res}}$. Iterum diuido 100 per 1 rem demptis 5, exit in quociente $\frac{100}{1 \text{ res demptis } 5}$. Has duas fractiones coniungo more solito, et provenient 5

$$\frac{200 \text{ res diminutis } 500}{1 \text{ census diminutis } 5 \text{ rebus}}.$$

Hoc valet 20 florenos. Quare denominator ductus in 20 facit 20 census 10 diminutis 100 rebus. Hoc necessario equale erit numeratori, scilicet 200 rebus diminutis 500. Quare utrique parti additis 100 rebus et 500 proveniunt 20 census et 500 equales 300 rebus. Ex quo sequitur, ut unus census et 25 sunt equales 15 rebus. Ecce iam es productus ad regulam quintam Algebre. Medio res, sunt $\frac{15}{2}$; duco in se, faciunt $\frac{225}{4}$; ex hiis 15 minuo 25 numeri, remanent $\frac{125}{4}$. horum radix est surda. eam minuo ex medietate rerum, vel secum addo. si minuo remanent $\frac{15}{2}$ minus radice de $\frac{125}{4}$; si addo, provenient $\frac{15}{2}$ et radix de $\frac{125}{4}$. Et quia hic non potest processus fieri secundum viam diminucionis, igitur necessarium est, quod fiat secundum 151′ viam addicionis. | Nam quinta regula Algebre hanc habet ex natura sue 20 demonstracionis libertatem et hoc privilegium. Dico ergo, quod in viis mercanciorum numquam fieri soleat sic, ut proponitur in questione. Tamen quia brachia seu ulne sunt in continuo, possibile est ita, ut proponitur, fieri, sed non a mercatoribus, qui geometrie indocti sunt, verum a geometricis peritis. Nam dico, quod A vendit pro uno fl $7\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc 25 radicem de $31\frac{1}{4}$; B autem vendit pro uno floreno $2\frac{1}{2}$ brachia et cum hoc radicem de $31\frac{1}{4}$. Et quia hic radix, que ultra numerum est, est surda, in

1 bis S. 64 Z. 21. Diese Aufgabe ist schon Seite 56, Zeile 7 u. ff. dagewesen. Während hier die 5. Regel in Anwendung gebracht wird, war dort durch die 6. die Lösung gewonnen. 16–21. Unser Verfasser weiss also zunächst, dass bei der 5. Regel zwei verschiedene Werthe erscheinen können. Wenn er nun hier sagt, dass bei dem vorliegenden Beispiele nur das Pluszeichen benutzt werden könne, so hat das darin seinen Grund, dass bei Benutzung der Subtraction für *B* der negative Werth $\frac{5(2-\sqrt{5})}{2}$ sich ergeben würde. Das ist also der Grund, weshalb der Verfasser hier behauptet, nur die Addition gebe einen möglichen Werth.

perpetuum in numeris non invenies hanc racionem precisam. Verum mercator quandoque contentus in vicina racione, ubi precisa ab eo habere non potest; quero igitur radicem aliquam, que sit vicina ad radicem de $31\frac{1}{4}$, et sum contentus in 5 et $\frac{3}{5}$, licet adhuc vicinior daretur. Huc addo numero,
5 scilicet $\frac{15}{2}$, qui erat medietas rerum, et proveniunt $13\frac{1}{10}$. Tantum fere vendit primus, scilicet A pro uno floreno; B autem vendit 8 et $\frac{1}{10}$ fere pro vno fl. Si 100 diuiseris per unamquamque horum et coniunges | quo- 152 cientes non deficiet tibi $\frac{1}{10}$ unius, quod habebis 20. Sed ille defectus consurgit propterea, quod $5\frac{3}{5}$ sunt modico plus quam radix de $\frac{125}{4}$. Item si dico,
10 quod A vendit pro floreno uno 13 et $\frac{1}{11}$, et B vendit pro fl uno $8\frac{1}{11}$, iam iterum duos numeros vere dixi. Nam diuidendo 100 per $13\frac{1}{11}$ exeunt $7\frac{23}{36}$, et si diuido 100 per $8\frac{1}{11}$, exeunt $12\frac{32}{89}$. Si iungo $7\frac{23}{36}$ cum $12\frac{32}{89}$, consurgunt $19\frac{3199}{3204}$. Ecce deficiunt solum $\frac{5}{3204}$. Sic quidquid dictis in talibus partitis, ubi in surdis operi fieri oportet, si eorum numerum aliquem, in
15 quacumque eciam fractione, adhuc potest precisius dari, quod minus erretur.

Potuisset eciam hec questio perducta fuisse ad regulam sextam, si posuisses, quod B vendidisset 1 rem pro floreno, et A vendidisset 1 rem pro fl et 5, sid in idem venisset finaliter. Habetur ergo in illis tribus questionibus, quod numquam in numero potest satisfieri, sed solum in
20 surdo, et qui in surdis atque additis et diminutis et binomiis et residuis et lineis ceteris irracionalibus agere nescit, nihil in Arismetrica egregii nouit.

| *Questio quarta.* 152'

Nota. Quidam dominus diues habet 4 bursas denariorum, in unaquaque tantum quantum in alia de denariis, quos vult distri-

---

2 u. ff. Die erste Wurzel von $\frac{125}{4}$ ist gefunden, indem Zähler und Nenner des Bruches mit 25 multiplicirt sind. Für $\sqrt{3125}$ ist dann der um etwas zu grosse Werth 56 gesetzt worden, wodurch näherungsweise $\sqrt{\frac{125}{4}} = 5\frac{3}{5}$ sich findet. Der zweite Werth ist in ähnlicher Weise dadurch entstanden, dass $\frac{125}{4}$ mit 121 erweitert wurde. Die $\sqrt{15125}$ ist dann gleich 123, um eine Kleinigkeit zu gross, angenommen, und daraus für $\sqrt{\frac{125}{4}}$ der Werth $5\frac{13}{22}$ gewonnen, welcher zu $7\frac{1}{2}$ addirt $13\frac{1}{11}$ ergiebt. Hier hat der Verfasser das oben gegebene Versprechen, die Lösung *vicinius in millecuplo* zu geben, gehalten. Die Probe giebt einen noch nicht um 0,0016 zu kleinen Werth. 22 bis S. 67 Z. 12. Hier kommen wir mit einem Male in unbestimmte Aufgaben. Wie der Verfasser richtig die Aufgabe in Zahlen fasst, handelt es sich um die gleichzeitige Lösung der Gleichungen

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17,$$

buere in viam eleosine quatuor ordinibus scilicet czeilen(!) pauperum. In primo ordine pauperum sunt 43 pauperes, in secundo sunt 39 pauperes, in tercio sunt 35 pauperes, in quarto sunt 31 pauperes. Primam bursam distribuit equaliter primo ordini,

---

und er weiss, dass es eine unbegrenzte Zahl verschiedener Lösungen giebt. Eine derselben 5458590 giebt er auch richtig an.

Dass hier eine Anwendung der ta yen Regel der Chinesen vorliegt, ist keinem Zweifel unterworfen. Wie Cantor, Vorlesungen I, 2. Aufl. 643—44 auseinandersetzt, ist die Aufgabe der Chinesen mit der Regel zu ihrer Auflösung, aber ohne Beweis, in einer griechischen Handschrift, die um das Jahr 1400 entstanden sein muss, aufgefunden worden. Ich will jetzt hier den Beweis führen, dass um die Mitte des 15. Jahrhunderts sie *mit ihrem Beweise* und ohne Benutzung des chinesischen Beispiels eine ganz bekannte Sache war.

In unserer Handschrift befindet sich Blatt 124′—125 ein schon von Gerhardt angegebenes Stück mit der Ueberschrift „*Divinare*". Dieses enthält nun Folgendes:

124′ ‖ *DIVINARE.*

Item ich wil wissen, wie vil pfenning in dem peutel oder im synn hast. Machs also. Hays yn dy d̄n, dy er hat, zelen mit 3, darnach *cum 5, postea cum 7,* vnd alz oft eins vber pleibt mit 3, so merck 70, vnd alz oft 1 vber pleibt mit 5, merk 21, vnd mit 7, merk 15. *Postea adde illos numeros in simul, et ab ista summa subtrahe radicem, hoc est multiplica 3 per 5 et 7, erit 105,* alz oft du magst, vnd wz do pleibt, alz vil hat er ym sinn oder in peutel.

Item das exempel get nit hoher, den alz verr dy radix wirt, daz ist auf 105, vnd man sol dar vber nit nemen.

Du fragst war vmb nymbt man 70 auf 3, vnd 21 auf 5 etc. Also mags. Wildu haben dy zal auf 3, so multiplicir 5 *per* 7, vnd was kompt, das dividir *per* 3, vnd *manet* 1 v̊ber, so ist dy selb zal recht; pleibt aber mer vber dann 1, so duplir dy selben zal, vnd darnach dividir mit 3, vnd pleibt dan aber mer vber dann 1, so addir dyselben zal. daz thu alz lang, bis 1 vber pleibt. Desgleichen wiltu haben | dy zal auf 5, so multiplicir 3 per 7, wirt 21, daz dividir per 5, so pleibt 1 vber, dar vmb ist 21 recht auf 5, vnd wildu dy zal haben auf 7, *multiplica 3 per 5, erit 15; illud divide per 7, manet in residuo 1, ideo 15 est verus numerus super 7,* dezglichen dy andern:

70	21	15	15	10	6	40	45	36	28	21	36	21	28	36	63	36	28
3	5	7	2	3	5	3	4	5	3	4	7	2	3	7	2	7	9
	105			30			60			84			42			126	

128	175	120	216	225	280	1144	936	1782
5	6	7	5	8	9	9	11	13
	210			360			1287	

Hier ist also die reine Regel ohne jede Anwendung auf eine specielle Zahl gegeben; es ist gezeigt, dass es nicht nur diesen einen Weg des Errathens der Zahl giebt, und es ist jedem der Weg gewiesen, auf welchem er für jede beliebige Combination von drei Zahlen sowohl die Hülfszahlen als die Radices finden kann. Eine ziemliche Zahl berechneter Regeln sind beigegeben. Unser Verfasser muss,

in fine tamen remanent sibi 41, ita quod ad complendum ordinem deficiunt sibi 2 denarii. Secundam bursam distribuit equaliter secundo ordini, in fine tamen non potest complere, sed habet in residuo 33, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 6 denarii.

---

das wird mir jeder zugeben, einen völlig klaren Einblick in das Problem gehabt haben, sonst würde er sich mit der einfachen Wiedergabe des bekannten chinesischen Beispieles begnügt haben.

Es ist aber noch eine zweite Stelle in der Handschrift vorhanden, an welcher einzig und allein so vorgegangen wird, wie ich von jemandem es angenommen habe, der kein Verständnis für das Wesen des Problems besitzt. Sie befindet sich auf Blatt 38′—39 und lautet:

| Item. Nym fur dich ein zal wy vil du wilt, dy wil ich vinden mit raytung. 38′ Ich nym fur mich 17. *Divide primo per 3 et manent 2, illa duo multiplica per 70, erit 140. Secundo divide per 5, et manent duo. Illa 2 per 21 multiplica, erit 42. Tercio divide per 7, manent 3; illa 3 multiplica per 15, erit 45. Illa omnia adde* 5 *simul, scilicet 140, 42, 45, facit 227. Nunc considera bene, quando summa plus est quam 106, tunc debes subtrahere 210; illa est prima regula posicionis vera; et iterum considera bene quando minus esset summa quam 106, tunc debes subtrahere 105; ista est secunda regula posicionis, et dicitur regula falsa.* | Und mit der regel 39 posicionis vera et falsa mag man vinden mancherlay raytung.

10 70 · 21 · 15 ·
3 · 4 · 5 · → 105 vel 210.

Dass derjenige, welcher dieses verfasst hat, keinen klaren Begriff dessen hatte, was er beschrieb, ist offenbar. Die Thatsache jedoch, dass ein ganz anderer wenigstens die Regel kennt, wie sie von den Chinesen aufgestellt und für die zu findende Zahl 39 auseinandergesetzt war, zeigt, dass sie weiter bekannt gewesen sein muss.

Ein weiterer Beweis ist der, dass Regiomontanus in seinen Briefen Aufgaben stellt, welche ebenfalls durch die Ta yen Regel gelöst sein dürften. Bei Cantor, Vorlesungen II, 262—268 sind die beiden Aufgaben desselben mitgetheilt:

$$17x + 15 = 13y + 11 = 10z + 3,$$
$$23x + 12 = 17y + 7 = 10z + 3;$$

und Bianchini giebt für die erste die beiden Lösungen 1103 und 3313. Dass sowohl Regiomontan als Bianchini ihre Lösungen nach Art der Ta yen Regel gefunden haben, ist mehr als wahrscheinlich. Nach Art des ersten Verfassers würden die Schemata für die Lösung so aussehen:

1820 · 170 · 221		3060 · 460 · 391
17 · 13 · 10	und	23 · 17 · 10
2210		3910

und nach der Ta yen Regel würde man für die erste zu berechnen haben:

$$15 \cdot 1820 + 11 \cdot 170 + 3 \cdot 221 = 27300 + 1870 + 663 = 29833.$$

Die Division durch 2210 giebt den Rest 1103 und die allgemeine Lösung ist $t = 1103 + 2210n$.

Terciam bursam distribuit equaliter tercio ordini, in fine tamen remanent sibi 25, sicque ad complendum ordinem deficiunt ei 10 denarii. Quartam bursam distribuit quarto ordini equaliter, in fine tamen est residuum 17 denarionum, sicque ei 14 denarii deficiunt ad complendum ordinem. Queritur nunc, quot fuerunt 5 denarii in una bursa?

In summa questio habet hoc: Invenias unum numerum, qui dum dividitur per 43, post' integra quocientis manent in residuo 41; item dum diuiditur per 39, manent in residuo 33; item dum diuiditur per 35, manent in 153 residuo | 25; item dum diuiditur per 31, in residuo manent 17. licet autem 10 non sit solum unus numerus, qui talis est, verum infiniti sunt signabiles. 5458590.

Für die zweite Aufgabe hätte man zu finden:

$$12 \cdot 3060 + 7 \cdot 460 + 3 \cdot 391 = 36720 + 3220 + 1173 = 41113.$$

Die Division durch 3910 giebt den Rest 2013 und die allgemeine Lösung $t = 2013 + 3910n$.

Gehen wir nun an das uns hier vorliegende Problem mit 4 Gleichheiten über. Es soll also das System aufgelöst werden

$$43x + 41 = 39y + 33 = 35z + 25 = 31n + 17.$$

Wir gehen genau so vor, wie es bei drei Gleichungen gelehrt ist, dann erhalten wir das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} 1227135 & \cdot & 1492960 & \cdot & 155961 & \cdot & 763035 \\ 43 & \cdot & 39 & \cdot & 35 & \cdot & 31 \\ & & & 1819545. & & & \end{array}$$

Dann heisst die Ta yen Regel: Für 1 durch 43 gewonnen setze 1227135; für 1 durch 39 gewonnen setze 1492960; für 1 durch 35 gewonnen setze 155961; für 1 durch 31 gewonnen setze 763035, addire die Producte und dividire die Summe durch 1819545, der Rest der Division ist die gesuchte Zahl.

Es ist

$$\begin{array}{rcl} 41 \cdot 1227135 & = & 50312535 \\ 33 \cdot 1492960 & = & 49267680 \\ 25 \cdot 155961 & = & 3899025 \\ 17 \cdot 763035 & = & 12971595 \\ \hline \end{array}$$

die Summe also gleich 116450835, und der Rest der Division durch 1819545 giebt 1819500, die allgemeine Lösung ist daher $1819500 + 1819545n$. Für $n = 2$ ergiebt sich der von dem Verfasser angegebene Werth 5458590.

Dass wir berechtigt sind, die Auflösung als in dieser Weise erfolgt anzunehmen, ergiebt sich daraus, dass spätere Rechenlehrer wie Rudolf, Koebel und Simon Jacob die Erweiterung auf 4 gleichzeitige Gleichungen lehren, ohne jedoch anzugeben, wie sie die für bestimmte Zahlen mitgetheilten Hülfszahlen gefunden haben.

Ob bei allen obigen Untersuchungen Entlehnung aus China als sicher anzunehmen ist, möchte ich doch bezweifeln. Jedenfalls ist die Darstellung des

VI.

De regulis per algebram etc., ut supra dictum est.

Circa primam regulam. Quidam habuit laboratores et pecunias. si cuilibet laboratori dedit 5, habundat in 30; si vero daret cuilibet 7, deficiet in 30. Queritur, quot sunt laboratores.

Sit numerus istorum 1 ꝶ, et fiunt primo 5 ꝶ et 30, fiet secundo 7 ꝶ minus 30 equande 5 ꝶ et 30

2 ꝶ equande 60, venit ꝶ 30.

Circa secundam. Quidam conventus est ad laborandum per 28 dies. die laboris 5 habet, die vacacionis restituet 3; in fine nullum lucrum habuit. quot dies laboravit?

Sunt hic 1 ꝶ | erunt 5 ꝶ
28 minus 1 ꝶ | erunt 84 minus 3 ꝶ equande 5 ꝶ

84 equande 8 ꝶ, proveniet $10\frac{1}{2}$ pro 1 ꝶ.

Sed stante, cum ponatur, quod retinebit 4, tunc remoue de 84 minus 3 ꝶ 4, que equande, ut supra.

Circa terciam. Quidam dixit si haberem adhuc tot et $\frac{1}{2}$ eius, quod habeo, et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ et 1, haberem 191.

Habuit 1 ꝶ | 2 ꝶ | 3 ꝶ $\frac{1}{12}$ ꝶ et 1 equande 191.

3 ꝶ $\frac{1}{12}$ equande 190, proveniet 1 ꝶ $61\frac{23}{27}$,
2 ꝶ $61\frac{23}{27}$,
$\frac{1}{2}$ ꝶ $30\frac{30}{37}$,
$\frac{1}{3}$ ꝶ $20\frac{20}{37}$,
$\frac{1}{4}$ ꝶ $15\frac{15}{37}$.
1

---

deutschen Verfassers absolut klar, und muss von jedem auch ihre Begründung verstanden werden.

Am Schlusse dieser schon überhaupt etwas langen Anmerkung möchte ich noch darauf hinweisen, dass die erste Aufgabe des Regiomontan, welche verlangt $x + y + z = 240$; $97x + 56y + 3z = 16047$ in ganzen Zahlen zu lösen, ganz derjenigen analog ist, welche Seite 48, Zeile 24—29 abgehandelt ist, und für welche zwei Lösungen angegeben sind. Dass man auf diese Art der Aufgaben durch die *Regula coeci* geführt ist, dürfte wohl von selbst einleuchten.

1 u. ff. Für die folgenden unter dem Titel „*De regulis per algebram*" zusammengestellten Aufgaben über Gleichungen des ersten Grades, denn nur solche werden betrachtet, ist die wirkliche gleichungsmässige Anordnung der Lösung besonders hervorzuheben. Es wäre nur nöthig, ihre Zeichen durch die jetzt gebräuchlichen zu ersetzen, um ganz moderne Bilder zu erhalten.

154 | *Circa quartam.* Quidam habet 60 mensuras, dat theolenario 2 mensuras et recipit 2 ß. Alter habet 120 mensuras, dat 2 mensuras et 5 solidas, queritur de valore mensure.

Valor sit 1 ꝛe | 2 ꝛe minus 2 ₰ vel ß
Alter 2 ꝛe 5 sol. vel ₰. hoc debet equari duplo primi
4 ꝛe minus 4 | 2 ꝛe 5
2 ꝛe equande 9
proveniet 1 ꝛe $4\frac{1}{2}$.

Circa quintam regulam siue questionem. Quidam habet pecunias. petit a socio suo 1 ₰, et erit ei equalis. Alter petit 1, et erit ei duplus.

Ponatur, quod totum hoc, quod habent sit 1 ꝛe. Primus igitur habet $\frac{1}{2}$ ꝛe minus 1 ₰, et secundus habet $\frac{1}{2}$ ꝛe et 1 ₰. Si igitur primus daret 1 ₰ secundo, primus haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe minus 2, et secundus haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe et 2, que deberent equari duplo primi, quod est 1 ꝛe minus 4

1 ꝛe minus 4 equatur $\frac{1}{2}$ ꝛe et 2
$\frac{1}{2}$ ꝛe equanda 6, proveniet ergo ꝛe 12.

Primus igitur habet 5, secundus 7.

Ad idem. *a, b, c.* *A* petit 1 de *b*, eritque ei equalis; *b* petit de *c* 1, eritque duplus ipsi *c*; *c* petit de *a* 1, eritque ei, scilicet *a*, triplus.

Ponatur, quod primus habet 1 ꝛe, oportet ergo, quod secundus habet 1 ꝛe et 2, oportet eciam, quod tercius habet $\frac{1}{2}$ ꝛe et $2\frac{1}{2}$. Qui si primo daret 1, haberet $\frac{1}{2}$ ꝛe et $3\frac{1}{2}$ tercius, et primus retineret 1 ꝛe minus 1, cuius triplo, scilicet 3 ꝛe minus 3, debet equari

3 ꝛe minus 3 | $\frac{1}{2}$ ꝛe $3\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$ ꝛe | $6\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}$ ꝛe equande $\frac{13}{2}$

provenit 1 ꝛe $2\frac{3}{5}$ primus,
habet secundus $4\frac{3}{5}$
tercius $3\frac{4}{5}$.

154' | *Ad idem.* A petit de *b* 1, et erunt equales; petit *b* de *a* 1, et erit ei millecuplus.

1—8. Eine ähnliche Aufgabe ist oben bei der *regula falsi* behandelt worden. (Seite 42, *Quarta questio.*) 32 bis S. 70, Z. 6. Auf diese Lösung der Aufgabe haben wir schon oben hingewiesen. (Seite 43, *Quinta questio*)

Ponatur, quod A habet 1 ꝝ, ergo b habet eciam 1 ꝝ et 2 ꝭ

1 ꝝ minus 1 | 1 ꝝ et 3

100 ꝝ minus 1000 equande 1 ꝝ et 3

999 ꝝ | 1003.

Pro A igitur est 1 ꝝ $1\frac{4}{999}$

pro b $3\frac{4}{999}$.

Circa sextam regulam. Quidam habet pannos 3 emptos 100 solidis, secundus in duplo et 5 sol., et tercius in triplo ad ambobus et 5 sol.

Valor primi 1 ꝝ | 2 ꝝ 5 sol. | 9 ꝝ 20 sol.

12 ꝝ 25 sol. equande 100 sol. | 12 ꝝ equantur 75

una res $6\frac{1}{4}$ primus | secundus $17\frac{1}{2}$ | tercius 76 ß $\frac{1}{4}$.

Circa septimam regulam. A petit de b $\frac{1}{2}$, et habebit a 100; b de c $\frac{1}{3}$, et habebit 100; c de a $\frac{1}{4}$ et habebit 100. queritur de a, quantum habet et de b et de c.

1 ꝝ pro omnibus.

VII.

Item una regula super primum capitulum delacose.

Item sint 3 socii, volunt emere equum pro 100 fl. dicit primus ad secundum, haberem $\frac{1}{2}$ de tuis fl ad meos fl, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ de tua pecunia ad meam, tunc ego solverem equum pro 100 fl; dicit tercius ad primum, haberem $\frac{1}{4}$ etc[a]. Queritur, quot quilibet habet secum pecunie.

Recipiam, quod primus habet 1 ding, tunc oportet secundus habere 200 minus 2 ding. Nunc vide, quot tertius oportet habere, wann er $\frac{1}{3}$ seins gelcz dem ander gibt, vnd daz dem andern 100 fl pleiben, so musz der drit 6 ding minner 300 haben. $\frac{1}{3}$ von 6 ∂ minner 300 ist 2 ding minner 100. Gib dem andren der hat 200 minder 2 ∂, so pleibt im 100. Nu spricht der drit zu dem ersten, het $\frac{1}{4}$ deins gelcz, so kauft ich daz

13—16. Die Lösung dieser Aufgabe kommt in der folgenden Abhandlung ausführlich zur Darstellung. 17 u. ff. Hier kommt wieder die Sprachmengerei zum Vorschein, welche eine Eigenthümlichkeit derjenigen Theile unserer Handschrift ist, welche den Frater Fridericus selbst zum Verfasser zu haben scheinen. Das erste Beispiel ist mit dem vorhergehenden identisch.

pferd pro 100 fl. Nu nym $\frac{1}{4}$ von dem ersten, der hat 1 ∂, daz wår $\frac{1}{4}$ ∂ dem dritten, so her nu $6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300, vnd daz ist 100 gleich, wann er auch sol 100 fl haben. Nu mach ein yeden tail gleich, gib 300 wider czw, der minner hat, pleibt $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu gib auch czw dem andern tail 300, macht 400, daz ist gleich $6\frac{1}{4}$ ∂. Nu tail 400 in $6\frac{1}{4}$ ∂, kumpt 64, vnd alz vil ist daz ding wert. Der erst 1 ∂, so hat er 64 fl, der ander 72 fl, der drit 84 fl. Nu merck war vmb der ander 72 hab vnd der drit 84. Wann dem andern haben wir geseczt, daz er hab 200 mynner derselben 2 ∂. 1 ∂ ist 64, alz der erst hat, | so ist 2 ding 2 mol 64, daz wår 128. zeuch ab 128 von 200, pleibt 72, vnd also sol der ander 72 haben. Nu het der drit 6 ∂ minner 300. 6 ∂ ist 6 mal 64, daz macht 384. zeuch ab 300, nun so pleibt ym 84 fl.

155′

Der erst 1 ding	
der ander 200 minner 2 ∂	$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300
der drit 6 ∂ minner 300	gelich dem 100
$6\frac{1}{4}$ ∂ minner 300	$6\frac{1}{4}$ ∂ gelich 400.

Vis tu probare, proba sic. der erst der $\frac{1}{2}$ des gelcz des andern hat. Nu nym $\frac{1}{2}$ de 72 fl, quod habet secundus, hoc est 36. adde 36 ad 64, quod primus habet, tunc erit 100 fl. Nunc dicit secundus ad tercium, haberem $\frac{1}{3}$ tue pecunie ad meam, tunc haberem 100 fl. Accipe $\frac{1}{3}$ de 84, quod tercius habet, hoc est 28, ad pecuniam, quod habet secundus, id est 72 et 28, et est eciam 100. Nunc tercius postulat $\frac{1}{4}$ de primo socio, ideo accipe $\frac{1}{4}$ de pecunia primi socii, hoc est 64, hoc est 16, et illud adde ad 84, productum est eciam 100 fl.

Iterum una regula de primo capitulo lacose.

Item sunt 3 socii. illi habent pecuniam. dicit primus ad alios duos, haberem ego 7 fl de vestris, tunc ego haberem in triplo tantum sicut vos; dicit secundus haberem 9 fl etc[a], tunc in quadruplo plus haberem; dicit tercius, haberem 11 fl etc[a], tunc in quintuplo plus etc[a]. Nunc quero, in quantum unus habuit.

Fac sic, sit quot isti tres socii habent 1 ∂. Nu spricht der erst, het ich 7 fl eurs gelcz, so het ich 3 mal mer dann ir ped, darvmb sprich daz der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ minner 7. Wann alle 3 haben ain ding, so het der

2. Hier hat *wann* ebenfalls die Bedeutung *weil*, wie in der Gerhardtschen Algebra. 25 u. ff. Siehe oben Seite 58: *De capitulo primo*.

erst, wann er 7 mer het, so het er 3 mal mer, darvmb secz ich daz er hab $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7. Der ander spricht, hiet ich 9, so hiet ich 4 mal mer dan ir paid, dar vmb secz ich, daz der ander hab $\frac{4}{5}$ mynner 9. So spricht der dritt, het 11, so het ich 5 mal mer dann ir paid, dar vmb sprech ich,
5 daz der drit hab $\frac{5}{6}$ mynner 11. Dar vmb secz also: der erst hat $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7, der ander $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9, der drit $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11. Nu sumirs zu sam allz, daz trift 2 ∂ $\frac{23}{60}$ mynner 27, daz ist 1 ding gleich, daz all drey haben vor gehabt. Nu gib 27 dem, der mynner hat, so pleibt 2 ∂ $\frac{23}{60}$; gib dem andern auch 27, so pleibt 1 ∂ mer 27 gleich 2 ∂ $\frac{23}{60}$. zeuch ab 1 ∂
10 von 2 ∂ $\frac{23}{60}$, so pleibt 1 ∂ $\frac{23}{60}$, zu dem andern tail pleibt 27. Nu tail 27 in 1 ∂ $\frac{23}{60}$, kumpt $19\frac{43}{83}$, vnd alz vil ist daz ding werd (!), alz vil haben sy alle drey mit ein andern $19\frac{43}{83}$. Nu wart, waz iglicher pesunder hat. $\frac{3}{4}$ ∂ mynner 7 von $19\frac{43}{83}$ pleibt $7\frac{43}{83}$, vnd alz vil sol der erst haben. Nu nym $\frac{4}{5}$ ∂ mynner 9 de $19\frac{43}{83}$, so trift $6\frac{51}{83}$, vnd so vil sol der ander
15 haben. Dar nach nym $\frac{5}{6}$ ∂ mynner 11 de $19\frac{43}{83}$, so pleibt $5\frac{23}{83}$, in tantum tercius habet.

1 ∂ $\frac{23}{60}$ · 27	1 ∂ $\frac{3}{4}$ mynner 7	$\frac{5}{6}$ mynner 11
gleich 1 ∂ $19\frac{43}{83}$	$\frac{4}{5}$ mynner 9	2 ∂ $\frac{23}{60}$.

| *Regula delacose super quartum capitulum.* 156'

20 Item tres socii dy habent geseczt vnter in 370 fl vnd haben gebunnen 20 fl. Dem ersten trift mer hauptgut vnd gewin 5 fl, dem andern 25 ß, tercio 50 fl. Primus stat 4 menses, secundus 3, tercius 2: in quantum fuit capitalis summa?

Fac sic. Nym, daz daz erst hauptgut sey gewesen 1 ∂; dem andern
25 1 zall, daz pillig sey, nem wir 20, oder waz du wilt; dem driten 50 mynner 1 ∂. Multiplicir 4 man. 4 mal 1 ∂ macht 4 ∂, vnd 2 mal 20 des andern macht 40, vnd 2 mal der trit, hat 50 minder 1 ∂, macht 100 mynner 2 ∂. Nu sumirs zu sam, macht 140 · 2 ∂. Nu sprich 140 · 2 ∂ gibt in 20 fl gewinsz was gibt mir 48. Der erst spricht 4 mal 20 ist
30 80, tails in 140 · 2 dingen, kumpt $\frac{80}{140 \cdot 2\,\partial}$ gewincz, tůs zu sammen zu dem hauptgut, daz waz 1 ding. Multiplicir in kreucz, kummen 220 · 2 censy, daz sol man tailen in dy ander vnter figur, vnd sol 15 kummen. darvmb multiplicir 15 mal 140 · 2 ∂, macht 2100 · 30 ∂, dar von an paiden taillen, so pleibt 190 ∂ vnd 2 censy dem andern 2100 zall. daz ist daz

4 capitel sprechent. so kummet radix von $3306\frac{1}{4}$ mynner $47\frac{1}{2}$, alz vil ist daz hauptgut des ersten, daz ist 10, dez andern 20, des drit 40 etc[a].

1 ∂ 4 · 1 ∂	4	2100
nym 20	40	190 ∂
		15 cosa
2 50 mynner 1 ∂	100 mynner 2 ∂	2100 cense.

5

157 | *Proba cose forte de poma.*

Mach mir dy rechnung, dy gat auch *per la cosa e la molte agraus.* Es sind 2 gesellen, dy haben opfel, vnd hat yglicher 56 tt. Nu sollen sy dy opfel verkauffen, also wann der 1 gibt 4 tt vmb 1 ß, so sol der ander 10 5 tt geben, vnd daz der ein albeg 1 tt mer gib denn der ander vmb 1 ß, vnd daz sy al paid nit mer lôsen ausz den opfel, den 20 ß. Nu frag ich, wye vil ichlicher opfel vmb 1 ß hab geben.

VIII.

4', 10 5[ta] *regula.* Item 1 z 27 numero ist gleich 12 cosa 15
z⁰ vnd 6 numero ist gleich 5 cosa
6[ta] *regula.* Item 1 z ist gleich 6 numero 5 cosa.

IX.

(auch eingel. ettel). Item 2 z 10 co gleich numero 28.
Item 2 z 3 co gleich 14 numero. 20
Item nym cosa $\frac{16}{4}$· ist 1 z 4 co ist gleich 32 numero.
Item nym cosa $\frac{25}{5}$· ist 1 z 1 co gleich 30 numero.

7 u. ff. Verkauft der erste x tt für 1 ß, so muss der zweite $(x+1)$ tt für 1 ß verkaufen, es muss also

$$\frac{56}{x} + \frac{56}{x+1} = 20 \text{ sein.}$$

14—22. Diese beiden Aufgaben gehören der angewendeten Bezeichnung nach zu den *Regule delacosa,* ebenso wie die auf Blatt 504 niedergeschriebenen. In moderner Bezeichnung würden sie heissen:

$$x^2 + 27 = 12x;\ x^2 + 6 = 5x;$$
$$x^2 = 5x + 6;$$
$$2x^2 + 10x = 28;$$
$$2x^2 + 3x = 14;$$
$$x^2 + 4x = 32;\ x^2 + x = 30.$$

X.

Nota. Arbor 20 pedum iuxta aquam 6 pedum, queritur, in qua parte frangatur, ut summitas eius extremitati aque iungatur.

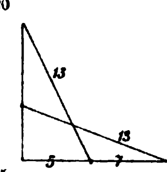
Illa pars est 1 ℞, alia scilicet remanens est 20 minus 1 ℞. Dico, quod illa pars multiplicata in se producitur census equalis huic, quod aggregatur ex duobus censibus iunctis, quorum unus erit ex 20 minus 1 ℞, et altera ex 6, scilicet 36. 1 ℞ fit 1 census; 20 minus 1 ℞ in se sunt 1 census 400 minus 40 ℞; 6 in se sunt 36. et sunt 1 census 436 minus 40 ℞. $10\frac{9}{10}$ est una pars vel 1 ℞; $9\frac{1}{10}$ est altera pars, scilicet inferior.

Item arbor 20 pedum frangitur in 8 pedibus a radice; queritur, ad quod se extendit a basi.

Multiplica partem distentam, scilicet 12, in se, erit 144; similiter residuum, scilicet 8, in se, erit 64, que minue ex 144, et restant 80, unus census, cuius ℞ est quesitum.

Item scala 20 pedum iuxta aquam latitudinis 10 pedum producitur ad murum iuxta aquam: queritur, ad quantam altitudinem se extendit.

Multiplica quodlibet in se, minus a maiore aufferatur, et remanet census, cuius res est quesitum.



Nota scala 13 pedum distans a muro per 5 adhuc retrahitur per 7 pedes, ut sit elongata a basi per 12: queritur, quot descendit in muro.

Primo scias altitudinem muri per precedentem; erit enim 12. Iterum secundo scito altitudine muri etc[a].

1—26. In diesen Aufgaben ist die Benutzung des Zeichens ℞ als Wurzelzeichen recht sehr hervorzuheben.

DIE HANDSCHRIFT No. 14836

DER

KÖNIGL. HOF- UND STAATSBIBLIOTHEK ZU MÜNCHEN.

VON

MAXIMILIAN CURTZE.

Vor einiger Zeit hat Herr Dr. Wappler in Zwickau durch seinen Aufsatz „Bemerkungen zur Rythmomachie“[1]) die Aufmerksamkeit auf den *Codex latinus Monacensis 14836* hingelenkt, und eine Reihe darin befindlicher Schriften ihren Verfassern zutheilen können, auch zwei derselben, die Abhandlung Hermanns des Lahmen und die des Asilo über die Rythmomachie, in diplomatisch treuem Abdruck veröffentlicht. Durch andere Untersuchungen auf dieselbe Handschrift aufmerksam geworden, liess ich mir dieselbe kommen, und will nun mir im Nachfolgenden erlauben, den reichen Inhalt der wichtigen Handschrift bekannt zu geben, welche viel mehr Sachen enthält, als der Handschriftenkatalog der Münchner Bibliothek verzeichnet.[2])

Wie schon gesagt, befindet sich die fragliche Handschrift in der Königl. Hof- und Staatsbibliothek zu München unter der Nummer 14836. Sie gehörte früher dem Kloster St. Emmeram zu Regensburg, und hatte dort die Bezeichnung „*k. 6*“. Sie besteht aus 160 Pergamentblättern von je 137 mm Höhe und 107 mm Breite. Dieselben sind auf den Vorderseiten von 1—160 foliiert und mit einem Vor- und einem Nachblatt, beide ebenfalls in Pergament, zusammen in einen mit Leder überzogenen Holzdeckel gebunden. Die Gesamtzahl der vorhandenen Blätter beträgt also 162. Es ist noch zu bemerken, dass zwischen den mit 17 und 18 bezeichneten Blättern ein ein Doppelblatt, jedoch von kleinerer Dimension als die übrigen, füllendes Sternverzeichnis mit eingeheftet ist. Die einzelnen zusammengehörigen Blattlagen sind auf doppelte Weise bezeichnet. Jedes erste Blatt einer solchen trägt in der rechten untern Ecke in arabischen Ziffern die Nummer der betreffenden Lage, während auf dem letzten Blatte jedes Päckchens in der Mitte des untern Randes in römischer Bezeichnung die Nummer desselben angegeben ist. Da diese letztere Bezeichnung der Blattlagen nur bis zur siebenten mit der erstern übereinstimmt, so ist klar, dass beim Einbinden nicht die römische, sondern die arabische Bezeichnung die massgebende gewesen ist. Letztere geht bis 23.[3]) Die Ziffern haben die Form

1 2 3 ꝗ ɥ 6 ʌ 8 9 0.

---

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 37. Band, Historisch-literarische Abtheilung S. 1—17. 2) *Catalogus Codicum Manuscriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis Tomi IV. Pars II. Codices latinos continens.* Monachii A. M.D.CCC.LXXVI, S. 240—241. 3) Die einzelnen Lagen bestehen je aus folgender Blattzahl: 8, 6, 6, 8, 8, 5, 5, 6, 7, 8, 2, 6, 10, 6, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 8.



Die Handschrift ist, mit Ausnahme des auf der Vorderseite des Vorblattes befindlichen Inhaltsverzeichnisses, von Händen des XI. Jahrhunderts geschrieben. Das Inhaltsverzeichnis ist aus späterer, jedoch immerhin noch alter Zeit und hat folgenden Wortlaut.

1) *„Cilindrus*
„Rythmomachine (!) siue pugna numerorum
„ac scacus mathematicus Wirzibergeñ
„Commentum in rationem (?) Boethii
5 *„Herimani Astrolabium*
„Geometria Gerberti
„Ludus laterculorum siue scacus
„Coniunctio numerorum Wirceburgensium
„Geometrica Musica
10 *„Mensura limitum*
„Pondera mensure
„Astrologica Musica
„Adelpoldi Geometrica
„Pondera mensure rursus
15 *„Astrolabium.“*

2) Auf Blatt 1 beginnt eine Abhandlung, welche von der Hand, die das Inhaltsverzeichniss schrieb, betitelt ist: *„Cylindrus“*. Die Anfangsworte sind *„Componitur quoddam simplex et paruulum uiatoribus horologicum instrumentum“*. Der Schluss ist auf Blatt 3: *„sique in cuique hore fine a punctis ad puncta obliquas lineas in uidelicet incrementa et detrimenta (!) dierum postulant deducendo totius horologii huius mensuram consumabo.“* Es soll ein Fragment aus Hermann des Lahmen Schrift *de utilitatibus astrolabii* sein.[1]) Ich habe es nicht verificieren können, da mir der Pez'sche Thesaurus nicht zur Disposition steht.

3) Auf Blatt 3^v bis 4^v,13 ist dann die Schrift Hermanns *„De conflictu rithmimachię“* und

4) Blatt 4^v,14—6^v,15 des Asilo Werk *„de Rithmomachia“* enthalten, welche, wie schon Anfangs gesagt, Wappler veröffentlicht hat.

5) Von Blatt 6^v,15—10^v,7 findet sich Hermanns des Lahmen *Tractatus de diuisione,* welchen nach unserer Handschrift im Verein mit Nr. 14 689 der Münchner Bibliothek Treutlein im X. Bande des *Bullettino Boncompagni* veröffentlicht hat.[2])

---

1) Nach dem Handschriftenverzeichniss aus dem ersten Capitel des zweiten Buches. Das betreffende Stück findet sich übrigens häufiger als selbständige Abhandlung in den verschiedensten Bibliotheken. 2) *A. a. O.,* S. 644—647.

6) Blatt 10^v,8—16^r enthält einen Commentar *in Boethii librum de consolatione philosophiae,* so der gedruckte Katalog, in der Handschrift überhaupt ohne Titel. Anfang: „*O qui perpetua mundum ratione gubernas*" Schluss: „*ante missas declamare. Sic enim probatum est.*" Auf Blatt 15^v,9 steht die Anrede: „*ad te, Amatissime frater G.*"

7) Es folgt: „*Herimani Astrolabium*", so von der Hand bezeichnet, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, und zwar Blatt 16^r—24^r. Anfang: „*Christi pauperum peripsima*". Schluss: „*et ingenium in huiusmodi rerum usu exercitanti alias debet notificare.*" Auch hier muss ich, da, wie schon gesagt, der Thesaurus von Pez mir nicht zugänglich, eine Vergleichung des gedruckten und handschriftlichen Textes unterlassen.

8) Blatt 24^v—40^v,14 und Blatt 45^r—75^v: *Geometria Gerberti.* Als Ueberschrift von späterer Hand, der des Inhaltsverzeichnisses, steht nur über den beiden ersten Seiten „*Geometria*". Von zwei verschiedenen Händen geschrieben. Ich gebe im Folgenden die von der Ausgabe von Olleris[1]) abweichenden Lesarten an, werde aber da, wo es mir nöthig zu sein scheint, einen völlig neuen Abdruck dieses wichtigen Buches veranstalten. Zunächst fehlt, für den Prolog und die ersten 13 Capitel wenigstens, jede Ueberschrift, was ich des weitern nicht ferner erwähnen werde. Sie sind nur durch Absätze und grössere Anfangsbuchstaben kenntlich gemacht. Also zunächst Collationierung des Druckes mit der Handschrift.[2])

401. 3. *quattuor.* — 7. *nostra.* — 8. *quia indoctos doceo* fehlt. — 11—12. *eluvionem Nili fluminis.* — 14. *a continenti; terrenae dimensionis.* — 18. *terminum diffinitionis.* — 19. *Geometrica.* — 21. *Geometrica; rationabilium* statt *mensurabilium vel ad mensurandum.* — 22. *probabiliter.*

402. 5. *et* hinter *numero* fehlt. — 8—9. *collecturi.* — 10. *quos terminos.* — 11. fehlt.

403. 7. *cum ipse Boethius.* — 8. *litteraturae tractatores.* — 9. *beatissimus.* — 11. *copiosissime*; *etiam mentio oculum.* — 12. *multis* fehlt. — 13—14. *prudentioribus.* — 15. *tamen* fehlt. — 16. *templabo.* — 19. *tactuque.* — 21. *finis* fehlt. — 22. *ephiphaniae.* — 23. *se contenta.* — 24. *dilatet; adiecis.* — 25. *corpus solidum.* —

1) *Œuvres de Gerbert Pape sous le nom de Sylvestre II collationées sur les manuscrits etc. par* A. Olleris. Clermont-F^d et Paris 1867, S. 401—470. 2) Ich bemerke hier ein für alle Mal, dass überall, auch wo ich *v* geschrieben habe, in der Handschrift *u* sich findet, mit Ausnahme der grossen Buchstaben, wo stets *V* steht, auch da, wo nach jetzigem Gebrauche *U* zu erwarten war. Ich wollte dadurch den unnützen Varianten gegen den Olleris'schen Text aus dem Wege gehen. Ebenso bemerke ich noch, dass die Handschrift immer *spera* statt *sphaera* liest, und allgemein das *ae* entweder durch ein einfaches *e* oder das bekannte Compendium *ę* ausgedrückt ist.

404. 5. *coartat; in ea.* — 8. *symion.* — 12. Hinter *Haec* fügt die Handschrift hinzu: *vero et longitudine et latitudine passim se praebens secabilem solam, quae fit in crassitudine, respuit sectionem. Sed haec, videlicet punctum linea.*[1]) — 18—19. *alias sufficientius de talibus.* — 20. *Itaque iusta praedictas.* — 21. *metienda* fehlt. — 22. *vel certe.* — 23. *geometricis vocitatur.* — 24. *quaeritur* fehlt. — 25. *aedificiorumve.* — 26. *posita.* — 29. *quae etiam constrata planave.*

405. 1. *ut in.* — 3. *nuncupatur.* — 5. *lineas longitudinemve.* — 6. *altitudine latitudineve.* — 6—7. *Constratus sive planus est.* — 7. *seu planities, sive.* — 8. *longitudine latitudineque.* — 10. *altitudineque; distensus.* — 11. *vel tesserae; quae in.* — 12. *intellegi.* — 14. *figuratim.* — 16. *distinguuntur.* — 17. *sciendum vero.* — 18. *item et.* — 28. *invenies hoc modo.* — 30. *eius altitudinem.*

406. 2. *poterit* fehlt; *in plano poterit scribi.*[2]) — 4. *solidos palmos.* — 5. *observetur.* — 8. *usu.* — 9. *et* fehlt. — 11. *clyma.* — 12. *iuger vel* fehlt; *leuua (!).*[3]) — 15. *antiqui in agris metiendis.* — 16. *quatuor*
ati
hordei. — 19. *longitudine (!).* — 25. *Nam duodecies as et* SS XVI *sunt.* — 26. *autem* fehlt. — 27. *expansa.* — 29. *et* fehlt.

407. 3. *et tertiam eius.* — 5. *ei* fehlt. — 6. *etiam ei, ut constratus fiat, adicitur.* — 7. *idem in lato.* — 14. *pedes vero.* — 15. *dictus autem.* — 16—17. *sextas VII et* SS ist ausradiert. — 18—19. *maximus in itineri spatiis metiendis usus est.* — 19. *Dictus autem; patentibus tribus.* — 20. *quinque* fehlt; *etiam passi.* — 22. *sextas* XIIII. — 23. *Dicta autem.* — 29. *et in longo.*

408. 3. *dicitur, et ipse agri.* — 4. *discriminans.* — 6. *constratos* fehlt. — 7. *sive iugo.* — 8. *a iungendo.* — 10. *pedes CXX.* — 16. *planitieique; circumscriptae.* — 17. *cunque* fehlt. — 20. *ut supra dictum est* fehlt. — 24. *est* fehlt. — 26. *et* fehlt; *et bissem* fehlt. — 27. *et* fehlt; *uncias* $\overline{VII}$ *D.*

409. 1. *Leuva.* — 3. *leuva.* — 4. *etiam apud nos Teutonicos.* — 9. *fiant.* — 12. *Leuva.* — 12—13. $\overline{MIICCC}$ *et* $\overline{LXXV}$. — 14. $\overline{MI}$ *milia, solidos Milies mille milia. Stadium habet enim lineares passus CXXV, constratos* $\overline{XV}$. *DCXXV, solidos* $\overline{MDCCCCLIII}$ *CXXV.* — 16. *pedes V; CXXV.* — 18. *Cubitus autem; quadrantem* fehlt. — 19. *quadrantem* fehlt; *et sescuncem* fehlt. — 20. *digitos XVI; CCLVI.* — 25. *grana hordei.* — 26. *hactenus quidem; eorundemque.* — 27. *sed non superflue; si pluribus in.*[4])

---

1) Eine sehr wichtige Ergänzung des Textes. 2) Die Lesart bei Olleris *in palmo describi* giebt gar keinen Sinn. 3) Dass *leuva* die richtige Lesart ist, folgt schon aus dem französischen *lieue.* Auch in den *Gromatici Veteres ed.* Lachmann steht *leuua.* 4) Auch diese Lesart giebt erst einen guten Sinn.

410. 1. *prout.* — 1—2. *sive intellectuales.* — 2. *multimodis diuidere.* — 5—6. *mensuris includuntur iam deinceps speculandum videtur.* — 9. *figurae dicuntur.* — 12. *curvis* fehlt, doch ist Raum dafür gelassen. — 13. *elycoydes; campelas.*[1]) — 18. *seu planities; circumsepta.* — 19. *quod* bis *nuncupatur* fehlt. — 22. *quae quidem.* — 23. *paucula.* — 24. *prolibaverimus.* — 25. *figurae planae; lineis* fehlt. — 28. *sub duabus.* —

411. 1. *se invicem tangentibus continetur.* — 4. *facit ita.* — 6. *vice virtutis.* — 7. *nec minus iusto coartat.* — 9. *pleonesiae; indiffinitaque.* — 10—11. *lineae rectae.* — 12. *vero angulus.* — 13. *indiffinita; lineae defectum.* — 16. *appellari latine.* — 19. *recta linea.* — 20. *secatur.* — 23. *scribatur ita.* — 24. *si easdem tres.* — 25. *invicem sibi connexos.* — 27. *et singulis altrinsecus punctis.* — 28. *pernotabis hoc modo.* — 29. *alios duos connexueris, ut.* — 30. *hebetes, in altrinsecus.*

412. 1—2. *immune omnino.* — 5. *connexio componitur.* — 6. *vero* fehlt. — 10. *omnes tres.* — 10—11. *coactae punctum describuntur. liquide satis ostenditur hoc modo.* — 13. *ibi.* — 16. *efficit angulum.* — 20. *iacenti lineae rectae.* — 21. *ut et illam et invicem.* — 23. *occupant recti.* — 25. *rectae lineae; per alterutram.* — 26. *angulos efficiunt.* — 27—28. *aequales sunt.* — 29. *lineae rectae.* — 31. *dicuntur, tales scilicet.* —

413. 1. ad aliam. — 2. *eas tangit.* — 2—3. *exteriores, binosque interiores.* — 4. *Possunt.* — 5. *haec interim.* — 10. *vero* fehlt. — 11. *acutos omnes; duas vero.* — 12. *omnes vero.* — 13. *ut* fehlt. — 14. *satis liquebit formationibus.* — 20. *quod tres.* — 22. *atque idcirco, qui; lineis angulisque distensus; extensus vel* und *est* fehlen. — 24. *in angulatis exstat.* — 25. *eumdem rursus.* — 26. *exagonive.*

414. 1. *singulos angulos lineas rectas.* — 5. *dividuntur ut subiecti. Inde etiam.*[2]) — 7. *embadum a diligentibus.* — 18. *potest clarere.* — 15. *autem* fehlt; *habens angulum.* — 16. *acutos ita.* — 17. *nomen inclitum.* — 22. *identidem accepit vocabulum.* — 25. *Unde et ipse ab acuto, quod.* — 27. *facile quivis intellegere; etiam eorum.* — 29. *isosceles.* —

415. 1. *aequalibus omnibus.* — 2. *aequus.* — 3. *Isosceles est; latera habet; etiam quasi.* — 4. *isosceles; aequicrurium.* — 5. *sibi invicem inaequalia.* — 6. *transferatur.* — 7. *solus, ut dictum est.* — 8. *isosceles.* — 13. *praedictam superius.* — 22—23. *introrsus ad se invicem inclinatae.* — 28. *anguli, id est acuti.* — 29. *trini eorum; eorum; aequi* fehlt.

416. 1 *sint aequi.* — 2. *supervaduntur.* — 3. *et duo interiores acuti.* — 4. *complent angulum.* — 5. *duo quidem acuti rectum unum supervadunt,*

1) Auch hier ist die richtige Lesart unzweifelhaft. Cycloiden treten ja erst bei Galilei auf. 2) Auch diese Lesart ist die bessere.

sed. — 6. *tantum* fehlt; *minores sunt tanto, quantum.* — 7. *illud, ni fallor.* — 8. *est* fehlt. *Multis movere solet scrupulum.* — 9—10. *aequos habere duobus rectis.* — 11. *His vero.* — 12. *an acutus.* — 13. *certius etiam; requirenti* fehlt. — 17. *angulo* fehlt. — 22. *esse* fehlt. — 23. *quaesiveras.* — 24. *sin autem.* — 28. *aequa mensura distiterint.*

417. 1. *Phittagorae* und so immer. — 2. altera eiusdem. — 3. *utrimque.* 4. *deducito.* — 5. *pedes* fehlt; *dubitabas.* — 8—9. *usque ad G quatuor mensuro, dein lineam rectam ab F ad G duco.*[1]) — 10. *E angulum*; *id cogente.* — 11. *eum deputari.* — 12. Das neue Capitel beginnt im Manuscript mit den Worten: *Lineae vero rectae.* — 17. *Directim et non oblique.* — 18. *accipit; quasi fundamenta sit.* — 21. *Katheti* und so immer; *nomen.* — 25. *Ex harum autem lineari mensura.* — 27. *superius quoque.* — 28. *maiorem angulum.*

418. 1. *putetur; regulis suis.*[2]) — 2. *speciebus* fehlt; *primatum.* — 9—10. *manifestabitur.* — 12. *sit; pedes III;* — 13. *mensuras, basis IIII, hypotenusa V seu alias quaslibet plures in eisdem proportionibus mensuras.* — 16. *Quia vero interdum quaedam vel omnia.* — 17. *admixtis; geometram.* — 18. *etiam non ab re erit.* — 19. *itaque* fehlt. — 20. *scilicet; per kathetum alia invenire latera.* — 23. *Si eandem, quam abstulisti, nonam.* — 25. *novem facit.* — 25—26. *reliqui, id est VIII, dimidia; basi* fehlt. —

419. 1. *superius dicta.* — 2—3. *sive de minutiatis.* — 3. *compacta; ut in hoc, qui IIII in katheto tenet.* — 4. *parte* fehlt. — 4—5. *et triente ablata.* — 5. demonstrat. — 10. *senarium habet.* — 10—11. *in se* fehlt. — 13—14. *duo* ς£. — 14. *VII* £ ςςς. — 5. *id est* £ ςςς; *basi.* — 16. *VIII et* ςς. — 18. *reliqui.* — 19. *habeat in katheto.* — 20. *IIII* ς. — 21. *Cui tribus.* — 23—24. *III et* ʒ. — 24—25. *II,* ↿, ⌣⌣. — 25. *XVI,* ςςς £ ⌣. — 26. *VIII* ςς ⌣⌣. — 27. *II* ↿ *et* ⌣⌣. — 27—28. *podismum in X* ς *et* £⌣ *consumat.* — 29. *quae et in.*

420. 1. *orthogonio trigono.* — 4. *coniungatur et huius.* — 8. *alio quolibet.* — 9. *generatur.* — 12—13. *in se ducto.* — 16. *reliqui latus.* — 20. *ducta* fehlt; *tetragoni, id est.*[3]) — 21. *faciunt* fehlt. — 22. *quinque* fehlt; *XXV faciunt.* — 24. *investigo.* — 25. *id est ex; ductum id est.* — 30. *numero* und *dem* fehlen.

421. 8. *VI* ςς; *Ipsumque.* — 9—10. *XL* ↿ ⌣⌣. — 10—11. *VIII* ςς ⌣⌣.

---

1) Die Ergänzung ist, wie man leicht sieht, nöthig. Ich bemerke noch, dass die Handschrift überall im Texte sowohl, als an den Figuren grosse Buchstaben hat. 2) Auch hier dürfte die richtige Lesart getroffen sein. 3) Hier ist offenbar von Olleris die Abkürzung *.i.* für *id est,* welche in unserer Handschrift nirgends vorkommt (es ist dafür stets *id* gesetzt), fälschlich mit *tetragoni* verbunden worden.

— 11—12. *LXXI* ᛋℒᴗ∖ *III scripuli et tria siliquae.* — 13—14. *CXI tertiam scripuli et tertiam siliquae continentem.* — 15. *X* ᛋℒᴗ. — 16. *et* fehlt; *eodem autem.* — 17—18. *ducto, id est CXI* ᛋᛋ∖, *duabus siliquis et tertia siliquae.* — 18—19. *ductum* fehlt; *XL* ⸔ᴗᴗ. — 19—20. *reliqui LXXI* ᛋℒᴗ∖ *duarum siliquarum et trientis siliquae latus, quod.* — 20—21. *VIII et* ᛋᛋᴗᴗ *basis erit. Si autem basis in se ducta, id est LXXI* ᛋℒᴗ∖ *bissiliqua et tertia siliquae.* — 23. *in se numero; remanentis XL* ⸔ᴗᴗ. — 24. IV ᛋᛋ. — 25. *quoque huius modi.* — 26. *libuerit.* — 28. *huiuscemodi tradunt.* — 29. *katheti videlicet.* — 31. *duplicataque.*

422. 2. *id est* fehlt. — 2—3. *duplicati XII faciunt.* — 3. *partem* fehlt. — 4. *Horum si.* — 5. huius. — 7. *et* fehlt. — 8. *ablata et; II* ᛋᛋ. — 9. *et* fehlt. — 10. *per quartam sui.* — 10—11. *latus tetragonale.* — 13. *facilior.* — 14—15. *universalis.* — 16. *concreverit, pro embado habeatur.* — 17. *basis integra multiplicetur; natum embado detur.* — 19—20. *per latitudinem longitudo.* — 21. *sibi invicem* fehlt. — 23. *Sed ut exempla huic.* — 25. *quindecies XX fiunt.* — 26. *certo certius indicant.* — 28—29. *regulariter.* — 29. *LIII* ᛋᛋℒ϶∖ ♪♪. —

423. 1. *constrati pedis capiat quantitates.* — 2. *vero* fehlt. — 4. *multiplica.* — 7. *In sequenti vero, cuius area constratos.* — 8. *et* hinter *CCCCXXVII* fehlt. — 9. Das erste *et* fehlt; $\overline{VI}$*. DCCCXLV* ᛋℒ; *contineri.* — 14. *fiunt.* — 15. *quotiens.* — 20. *partem* fehlt. — 23. *adhuc regulam.* — 24. *subiiciendam.* — 26. *basis.* — 27. *Ut autem.*

424. 9. *iuncta in.* — 11. *ductae* fehlt. — 12. *utrorum.* — 14. *latus, quod.* — 18. *XIIII est.* — 20. *ductus* fehlt; *et* fehlt; *Cui si IIII embada.* — 21. Beide *et* fehlen. — 22. Das erste *et* fehlt; *Quae ut.* — 23. *ducto* fehlt; *et* fehlt. — 24. *et* fehlt. — 25. *I* ᛋᛋ; *VIIII et* ᛋᛋ. — 27. *I* ᛋᛋ *adeundem.* — 28. ᛋᛋ *adiunctum; X* ᛋᛋ; *quae est V et* ᛋᛋ, *basim.* — 31. *diximus orthogonii tripleuri.* — 32. *quantitatem* fehlt. — 33. *acceperat; sibi quantitatem.*

425. 1. *patet* fehlt; *horum.* — 3. *dinoscendam.* — 4. Das erste *sunt* fehlt. — 5. *eam consequentiam.* — 5—6. *tantum quod quibusdam.* — 7. *ad basim; meminerit.* — 8. *ne iam dicta.* — 28. *continuet.* —

426. 3. *vel minutiatos; item ad minutiatas* fehlt. — 4. *offendere scrupulum.* — 5. *et* fehlt. — 6. *sesquitertia alterutros habitudine copulet.* — 7. *aspicias;* beide *est* fehlen. — 10. *modo in se.* — 11. *in se* fehlt. — 15. *geometricam scilicet.* — 28. *dinoscitur.* — 29. *volo in his.* — 31. *eorum latera; podismusque.* —

427. 3. *sesquialtera, si sesquitertia sesquitertia.* — 5. *Fiunt.* — 8. *orthogonios efficiunt.* — 10. *ostendat, ut sunt subiecti.* — 11. *germani. Item isti, sed aliis laterum proportionibus compacti.* Dann folgen die bei Olleris in Fig. 37 abgedruckten Dreiecke. — 12—17 fehlen.

Bis hierher, das heisst bis zum Ende des sogenannten ersten Theiles, stimmt der Text der Angaben im Allgemeinen mit dem Manuscripte, jedoch wird man leicht bemerken, dass sehr viele der angeführten Varianten einen bei weitem reineren und verständlicheren Text geben, als der gedruckte ist. Wir haben ja an einigen Stellen in den Anmerkungen darauf hingewiesen. Der Fortsetzung ist von vielen Seiten der Vorwurf gemacht, dass die Anordnung der vorgetragenen Lehren ein wüstes Durcheinander sei, voller Wiederholungen und dergl., so dass es eines Gerbert für unwürdig und deshalb für untergeschoben gehalten werden müsse. Unsere Handschrift hat nun eine Reihenfolge der Capitel, welche den Fehler des wüsten Durcheinander vermeidet, und einen Text, welcher bedeutend besser ist, als derjenige, welcher bis jetzt gedruckt wurde. Sie ist ja auch die älteste der bis jetzt bekannten Handschriften, welche die ganze Geometrie Gerberts enthalten. Ich werde daher im Nachfolgenden den zweiten Theil der Geometrie, die Feldmesskunst, nach unserem Codex vollständig abdrucken lassen. Ich bin fest überzeugt, dass dadurch der Verfasser derselben, mag es nun Gerbert sein, oder wer es sonst will, in ein ganz anderes Licht gerückt werden wird.

Ich fahre also mit dem Texte so fort, wie unsere Handschrift ihn giebt. Die am Anfange stehende römische Nummer ist die aus dem Manuscripte folgende, die hinten stehende arabische diejenige der Ausgabe von Olleris. Um jedem Missverständniss entgegen zu treten, mache ich nochmals darauf aufmerksam, dass die Capitel- oder Paragraphenzahlen erst durch die Herausgeber eingeführt sind, sich aber in keinem Manuscripte finden.

| I. DE MENSURIS. 15. 45r

Mensurarum appellationes, quibus utimur, sunt hae: Digitus, Uncia, Palmus, Sextans, quae et Dodrans appellatur, Pes, Laterculus, Cubitus, Gradus, Passus, Decempeda, quae et Pertica appellatur, Clima, Actus, qui
5 et Aripennis dicitur, Iugerum, Centuria, Stadium, Miliarium.

Digitus est minima pars agrestium mensurarum.

Uncia secundum quosdam digitos habet tres, secundum quosdam, quod verius est, digitum unum et tertiam digiti.

Palmus habet digitos quatuor, uncias tres.

10 Sextans digitos duodecim, uncias novem, palmos tres.

Pes digitos XVI, uncias XII, palmos IV, sextantem unam et tertiam eius.

Laterculus pedem unum in latitudine, uncias XXIIII in longitudine.

Cubitus sesquipedem, sextas II, palmos VI, uncias XVIII, digitos XXIV.

Gradus habet III pedes; passus V. Pertica X. Clima LX.

Actus in latitudine CX, CXX in longitudine:

Iugerum, quod sit iunctum duobus actibus, in longitudine CCXL, in latitudine CCXX.

Centuria CC.

Stadium pedes DCXXV, passus CXXV. 5

Miliarium passus M, stadia VIII.

II. INCIPIUNT EXCERPTA DE GEOMETRIA. 14.

Geometricales tractandi diversitates praemonstrandum est, quas ipsius artis tractatus spondeat utilitates, quatinus lectoris ingenium insinuationis trifida ratione incitatum, promtius ad legendum, studiosius sequentis operis 10 perscrutetur tractatum. Est enim huius disciplinae scrupulosa descriptio, 45v sed totius dimensionis in|dagatione indagationisque commoditate copiosa descriptio. Quam tamen, quamvis arduum sit, consequi potis erit, qui in ea infatigabili sudaverit studio. Quae ut facilius a studiosis consequatur, cuique theoremati sua figura subiungatur. 15

III. AD ALTUM UT METIATUR. 32.

Ad rem inaccessibilem nobis altioribus ut metiatur, quamvis laboriose, huiusmodi figuram facimus. Sit quantitas rei metiendae AB, et quot cubitorum, vel ulnarum, vel pedum, vel digitorum, vel etiam unciarum, vel cuiuslibet alterius mensurae sit, sit nobis propositum scire. Re orthogo- 20 naliter constituta sit spacium immeabile inter nos et rem, ut est GB. Erigatur nobis orthogonium DG, et sit linea sursum ducta de G ad D, sicut primo dictum de A ad B. Ducatur planiter linea de D ad Z, sicut plana iacet linea de G ad B, et sit notum, quanta est linea GD et linea DZ, nos enim eas facimus. Erigamus orthogonaliter lineam de Z 25 sursum ad V, et ponamus oculum in linea ZV orthogonaliter erecta, ut exeat visus noster per D ad B; et locus lineae istius, ubi stetit oculus, notetur puncto ipso V, et metiamur ZV, quanta sit. Et post haec iterum ponamus oculum in linea ZV ita, ut valeamus videre per D ad A; et locus, in quo visus steterit, notetur puncto H, et videamus, ubi haec 30 linea tangens terram coniungitur lineae GB, et sit punctum E, ita ut linea GE sit recta. Et post haec notemus, quantum sit inter Z et H. Et quota pars est ZH ad ZD, tanta est DG ad GE, et nota est linea HZ et ZD et DG, quia nos eas fecimus. Igitur notum est, quanta est linea GE; 46r et quanta | est linea VZ ad ZD, tanta est linea DG ad lineam GB, et 35 lineae VZ et ZD et DG nobis notae sunt: notum igitur erit, quanta

est linea GB. Et quia sapivimus dudum lineam GE, et sapimus modo lineam GB, possumus sapere, quanta est linea BE. Et quanta est linea DG ad lineam GE, tanta est linea AB ad lineam BE, et lineae DG et BE notae sunt: igitur AB linea nota est, et haec est, quam quaerebamus. Et
5 ut brevius, quod superius diffuse dictum est, comprehendatur compendium, quo philosophia gaudet, ponatur. Qualis comparatio fuerit ZV ad HV, talis erit GD ad BA. Sit et ZV duplum ad HV, erit GD duplum BA. (Fig. 1.)

IV. ALIA FIGURA DE EADEM RE CUM HOROSCOPO. 17.

Ad altitudinem inaccessibilem ob fluvii vel vallis impeditionem sit
10 altitudo quaelibet, ut sit AB, sit fluvii vel vallis impeditio, ut est BC. Sume horoscopum stans in ripa C, et per utrumque foramen mediclinii summitatem A diligenter inspice. Considera numerum graduum in mensurae quadrato, qui verbi gratia notatur quaternario numero, per quem summa totius quadrati, scilicet CXLIIII, | diuidatur, et quarta pars reperta, vide- 46v
15 licet XXXVI, conscribatur. Post haec de C ad D certa spatii quantitas metiatur, quae exempli gratia quadragenario numero praenotatur. Iterum sume horoscopum stans in fine D, et per utrumque foramen, ut prius, summitatem A inspice. Perpende iterum numerum graduum in quadrato, qui signatur in figura ternario numero, per quam denuo summa totius
20 quadrati dividatur, et pars tertia, quae est XLVIII, iuxta quartam, quae est XXXVI, conscribatur, et minor numerus de maiore, id est XXXVI de XLVIII, tollatur, et quod remanet, id est XII, cum latere quadrati, quod XII est, comparetur, et numerus remanens et latus quadrati aequalis pronuncietur. Et sicut ultimum remanens XII lateri quadrati XII aequalis
25 habetur, sic spacium CD spacio AB aequale affirmetur; et quota pars ternarius, qui est ultimus numerus graduum, in XII iudicatur, eadem pars AB in BD spatio sine dubio dicatur. Est igitur XL AB, sicut est XL CD, et est CLX totum BD, et est CXX BC. (Fig. 2.) | 47r

V. AD ALTITUDINEM CUM SPECULO VEL AQUA METIENDAM. 24.

30 Posito in speculo centro, vel in media scutella plena aquae, constituatur in plano arvo, et tam diu a geometra huc illucque diligenter trahatur, donec per medium centrum unius supradictorum cacumen rei metiendae aspiciatur. Cacumine invento spatium, quod continetur inter pedes mensurantis et centrum speculi vel medium vasis limphae pleni diligenter mensu-
35 retur, et post haec non minus caute metientis statura comparetur, et ut fuerit illud spatium ad metientis staturam, sic erit linea a medio centro speculi usque ad radicem altitudinis ad altitudinem rei metiende.

Exempli cura subdatur plana figura. (Fig. 3.)

VI. AD ALTITUDINEM CUM ASTROLABIO METIENDUM. 16.

Si altitudo fuerit in aequalitate, tali poterit mensurari inspectione. Sumatur ab altimetra astrolabium, et constituatur in medietate quadrati mediclinium, ut hac scilicet positione sit mediclinium alterius partis astro- 5 labii in numero graduum dierum XLV, et tamdiu ab eo ante et retro aestimando pergatur, donec per utrumque ambulatoriae pertusum altitudinis summitas inspiciatur. Qua inspecta loco, in quo stetit mensor, nota impri- 47ʳ matur, et huic impressioni | statura mensoris adiungatur. Post haec locus ipse diligenter notetur, et ab eo usque ad radicem altitudinis tota planities 10 caute mensuretur, et quot pedum ipsa planities fuerit, tot sine dubio altitudo erit. (Fig. 4.)

VII. AD ALTUM METIENDUM CUM ORTHOGONIO. 30.

Componatur a geometra orthogonium basi kathetoque eiusdem numeri compositum, hypotenusae vero proportio praetermittatur, quae ad altum 15 investigandum prorsus inutilis iudicatur. Compositum autem tam diu per planum a mensore trahatur, donec oculo humi apposito per katheti summitatem summitas altitudinis investigandae cernatur. Qua visa a loco, cui visus inhaeret, planities ad radicem usque metiatur, et quanta fuerit, tanta altitudo dicatur. Quod ut apertius intelligatur, orthogonium cum altitu- 20 dine metienda figuraliter visui anteponatur. (Fig. 5.)

48ʳ VIII. DE EADEM RE ALIUD ORTHOGONIUM. 31.

Est etiam aliud aestimandae altitudinis orthogonium, quod ab inventore denominative nuncupatur Pythagoricum, naturalibus proportionibus katheti, basis, hypotenusae compaginatum, katheto ternario insignito, basi insignita 25 quaternario, hypotenusa vero praenotata quinario, scilicet ut basis katheto sesquitertio proporcionetur, et hypotenusa basi sesquiquarto comparetur. De quo cuncta fiunt, quaecumque dicta sunt in praecedenti figura, hoc solo excepto, quod in hoc de mentita planitiei quantitate quarta pars est auferenda hac videlicet ratione, quod basis iacens kathetum erectum superat 30 cum sua quarta parte. Quod ut melius animadvertatur etiam istud orthogonium subternis depingatur. (Fig. 6.)

IX. AD METIENDUM ALTITUDINEM CUM UMBRA. 25ᵃ.

Quaecumque res, si fuerit sub divo posita, umbram emittit, sed non sibi semper aequalem. Quapropter umbrae quotam partem volueris eliges, 35 deinde virgam coaequatam huic parti in terra statuas, et umbram exinde

cadentem seu per pedes, seu per palmos, seu per uncias dividas. Si maior inventa | fuerit umbra, quantum umbra virgam superat, tantum a singulis 48v partibus, quarum virga mensuram habet, subtrahas. Si autem minor, quantum a virga superatur, tantum dictis partibus adicias. Quod autem in 5 umbra vel ex augmentatione accreverit, vel ex subtractione remanserit, pro mensura illius rei habeto. (Fig. 7.)

X. AD ALTUM CUM ARUNDINE METIENDUM. 25b.

Componitur etiam instrumentum ad altitudinem sine difficultate inveniendam, quod hac de causa a sapiente inventum putatur, quia visum 10 humi adiungere difficile mensori, inconveniens spectatori putabatur, sumitque quantitatem suae magnitudinis a magnitudine staturae metientis. Constituamus arundinem tali magnitudine, ut duplari comparatione proportionetur mensoris longitudine. Cuius medio altera arundo orthogonaliter coniungatur, quae, statura mensoris aequalis, ei, cui coniungitur, subdupla habeatur. 15 Quatinus in hac coniunctione completum comprobetur, quod in prima figurarum ac curvo praeceptum videtur: *omnes lineae a medio circuli procedentes et videntur, et sunt parili magnitudine aequales.* Igitur hoc instrumentum sic compositum tamdiu ducatur a mensore per planum, donec per summitates istarum virgarum rei metiendae conspiciatur summum. Quo conspecto 20 tanta altitudo dicatur, quantum spatium a mensore ad radicem altitudinis statura adiuncta mensu|ratur. Verbi gratia sit statura mensoris AB, arundo 49r sibi dupla CD, altera arundo istius medio orthogonaliter iuncta AE, altitudo metienda FG, spatium a mensore ad radicem altitudinis BG. Hoc tamen nullo modo mensor obliviscatur, quin et huic omnique perpendiculo 25 aequipendium appendatur, quod geometricaliter institutum ad mensuram paratur. (Fig. 8.)

XI. AD PLANITIEM CUM HOROSCOPO METIENDAM. 19.

Si vis cum horoscopo quamlibet metiri planitiem, dirige intuitum per utrumque mediclinii foramen, donec terminatur intuitus in metiendae quanti- 30 tatis limite. Post haec, in quoto gradu quadrati mediclinium steterit, inspiciatur, et ipse numerus graduum cum XII conferatur: et qualis comparatio erit graduum ad XII, talis comparatio erit staturae metientis ad planitiem totam. Verbi gratia sit statura mensoris AB, planicies BC, numerus graduum ternarius, qui ad XII comparatus quarta pars eius dubie- 35 tate sublata invenitur. Igitur AB, quae est statura metientis, sic BC planitiei quarta pars computatur, sicut ternarius quarta pars XII computabatur. (Fig. 9.)

XII. AD PLANITIEM CUM VIRGA VEL ARUNDINE METIENDAM. 26.

Stabiliatur arundo visui aequiparata metientis in termino epiphaniae, cui altera coniungatur cuiuslibet quantitatis orthogonali ratione, quae scilicet susum iusumque tamdiu a planimetra ducatur, donec per utriusque arundinis summitates oppositus limes planitiei cernatur. Quo inspecto 5
49ᵛ ipsa coniunc|tio arundinum diligenter notetur, et superior pars fixae arundinis a coniuntione alterius cum tota sui quantitate comparetur, et eadem comparatio pendentis virgae planique incunctanter dicatur, quae superioris partis a coniunctione cum tota quantitate fixae arundinis superius dicebatur. Et ut clarius reddatur, quod litterari inflexione computamus, picturam apertius 10 obsccura demonstrantem visui legentium supponamus. Sit arundo stans visui metientis aequiparata AC, sit planities metienda CD, virga orthogonaliter pendens BC; sit igitur AB medium AC, erit ergo BC medium CD. (Fig. 10.)

XIII. AD PLANITIEM CUM QUADRATO MEDICLINIORUM METIENDAM. 33. 15

Si fuerit nobis propositum, quodlibet quolibet modo metiri planum, sumamus cubiti longitudinis lignum, cui tria alia in dimensione aequalia tali coniunctione innectantur, ut coniuncta quadrati diffinitionem suscipere videantur, quod quatuor lateribus aequale, quatuor angulis est orthogonale. 20 Cuius unius lateris summitatibus duo semipedalia ligna erecta infigantur, quae in summitatibus perforata per utrumque foramen visum metientis admittere videantur. Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium, ut in horoscopo, sic copuletur, ut, dum per oppositum sibi latus certis dimensionibus distinctum trahitur, formam orthogonii Pythagorici imitetur, 25
50ʳ vel imitari videatur. Verbi gratia | sit quadrati figura $ABCD$, duo semipedalia ligna in summitatibus unius lateris posita E, F; mediclinium in lateris oppositi summitate locatum per oppositum sibi latus discurrens DG in hunc modum (Fig. 11). Composita quadrati figura hac ratione ponatur iacens in metiendae planitiei extremitate, et tamdiu a metiente ex altera 30 parte erigatur, donec per foramina E, F opposita extremitas plani cernatur, et in loco, quo visus steterit, nota ponetur. Post haec per mediclinium ex adverso constitutum visus mensoris dirigatur, donec iam notata extremitas videatur. Quo facto locus, in quo steterit G, notetur, et CG ad GB comparetur; et qualis comparatio CG ad GB fuerit, 35 eadem comparatio AB ad totam planitiem erit. Verbi gratia tota planities BH dicatur et CG GB aequalis constituatur: et AB BH aequalis non dubitatur. (Fig. 11.)

XIV. AD ALTUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 27 u. 28.

Si quis superioris figurae, retro positae figurae, qua planitiem mensurabamus, subtiliter inspexerit vim, istius quoque figurae vis, qua altitudines metimur, eum prorsus latere non poterit. Parum enim distat haec a
5 superiori figura excepto, quod superior in planitie, haec operatur in altitudine mensuranda. Sit altitudo mensuranda *AB*; statura metientis *CD*; arundo, cum qua altitudo metiatur, statura longior *EF*; virga orthogonaliter ducta *DG*, linea a visu metientis per arundinem usque ad altitudinem metiendam | *DFA*. His peractis *DG* ad *GF* comparatur, et eadem com- 50v
10 paratio *DH* ad *AH* pronuncietur, quae *DG* ad *GF* pronuntiabitur. Verbi gratia *DG* ad *GF* dupla ponatur, et non minus *DH* ad *AH* dupla indubitanter dicatur; quod si *BH HA* mensurabiliter copulantur, quae *DC*, statura metientis, aequalis habetur, tota altitudo *AB* mensurata non dubitatur. Sed quia potest evenire, quod *CB* sit interdum non meabile, *HA* non
15 est omnino nobis notum, quamvis sit proportionale. Qua de causa planities *BC* in retro erit metienda, et similis superiori alia componenda erit figura. Metiatur planities *CI*, sitque statura metientis *IK*; sit arundo aequalis superiori *LM*, sit virga orthogonaliter ducta *KN*, linea a visu metientis tendens ad altum *KLA*. Post haec *KN NL* in quadrupla proportione
20 conferantur, et similiter totum *KH HA* quadruplum indubitanter dicatur. Et quia superius iam *DH HA* duplum habebatur, modo autem *KH AH* quadruplum pronuntiatur, sublato *DH* de toto *KH* manet *KD*, quae est mensurabile, duplum ad *HA*. Quod si ad *AH*, *KI* statura metientis, quae est aequalis *NM* et *DC* et *FG* et *HB*, mensurabiliter apponatur, totum
25 *BA*, quod est altitudo, mensuratum nullo modo dubitatur. (Fig. 12.)

XV. AD PLANITIEM CUM ARUNDINE METIENDAM. 29.

Stans mensor in metiendae planitiei extremitate componat | sibi arundinem 51r minorem suae longitudinis prolixitate, quae scilicet tam diu diversis locis planitiei directa figatur, donec per summitatem ipsius arundinis altera
30 extremitas planitiei ex opposito cernatur. Quo facto a summitate arundinis orthogonalis linea usque ad mensoris staturam ducatur, et locus ipsius staturae, in quo linea terminabitur, diligenter signetur, et ipsa pars staturae ab ipsa nota usque ad visum cum linea orthogonaliter ducta conferatur. Et qualis comparatio ipsius partis staturae cum tota linea orthogonaliter
35 ducta habebitur, eadem comparatio totius staturae ad planitiem totam pronuntiabitur. Verbi gratia sit statura metientis *AB*; planities metienda *BC*; canna, cum qua mensuratur, *DE*, linea orthogonaliter ducta *DF*. Quota

pars fuerit *AF* in *FD*, tota pars erit *AB* in *BC*. Sit *AF* quarta pars in *FD*, et in eodem modo est *AB* quarta pars in *BC*. (Fig. 13.)

XVI. AD METIENDUM CUM HOROSCOPO PATEUM. 20.

Primo a geometra diligenter perpendatur, quatinus circulatio putei perpendiculo perpensa aequalis habeatur. Deinde cuius quantitatis sit eius 5 diametrum inquiratur. Invento diametro stans metiens super putei labrum despiciat per mediclinium lateris oppositi terminum. Quo peracto numerus graduum, in quo mediclinium steterit, in quadrato, cum XII comparetur, et eadem comparatio diametri et profunditatis cum statura geometrae indu-51v bitanter | pronuntietur. Qua statura abstracta de profunditatis numero quod 10 superest, ipsius est altitudo putei. Verbi gratia sit putei altitudo *AB*; sit eius diametrum *AC*; sit statura geometrae trium pedum *CD*. Eia, constituamus trium pedum *AC*, et dirigamus intuitum per mediclinium de *D* ad *B*. Post haec gradus, qui causa exempli III sint, cum XII in quadrupla proportione conferamus, et *AC*, qui et ipsi III sunt, ad *BC* in 15 eadem proportione ponamus. Est igitur III pedum *AC*, et XII pedum *DE*, et trium pedum *DC*, quae est statura metientis; quibus tribus sublatis de *DE* remanet VIII pedum *CE*, quod est putei altitudo. (Fig. 14.)

XVII. AD PUTEUM CUM ARUNDINE MENSURANDUM. 21.

Ut in superiori figura putei dictum est, primo a geometra diligenter 20 perpendatur, quatinus circumductio putei circularis habeatur, deinde cuius quantitatis sit diametrum inquiratur. Quo invento stans mensor super putei summitatem supponat pedibus suis cuiuslibet longitudinis scorpionem, quem tam diu ante et retro pedetemtim ducat, donec per summitatem ipsius scorpionis alterius partis putei profunditatem cernat. Quo facto 25 pars ipsa scorpionis, quae puteo superiacet, a pedibus mensoris impressa nota caute notetur, cui statura metientis non minus diligenter comparetur. 52r Et quota comparatio ipsius partis fuerit ad meti|entis figuram, eadem comparatio erit diametri cum statura metientis ad putei totam summam. Verbi gratia sit profunditas *AB*; diametrum eiusdem putei *AC*; statura 30 metientis *CD*, arundo, quae staturae comparetur, et per quam putei profunditas investigatur *CE*; altera pars putei *CF*; sit *CD* quadruplum ad *CE*; igitur *DF* quadruplum est ad *AC*.

Sumas mensuram si vis, auferre staturam.[1]) (Fig. 15.)

XVIII. AD ALTUM INACCESSIBILE CUM HOROSCOPO METIENDUM. 18.

Si quid eminens inaccessum fuerit aestimandum cum horoscopo, stet
5 alti mensor in metiendi eminentis arcifinio, suspiciatque per utrumque mediclinii foramen, quousque intueatur altitudinis mensurandae cacumen. Quo inspecto gradus quadrati numerentur, qui exempli manifestatione III computentur, qui in XII, quadrati latere, quater continentur. Hoc peracto tam diu ante et retro pergatur, donec iam visum cacumen altitudinis
10 mensurandae iterum videatur. Quo viso numerus graduum quadrati denuo inspiciatur, et verbi gratia II habeantur, qui in XII, quadrati latere, sexies contineri non dubitantur; et intervallum stationum mensoris scilicet XII pedum notabile habeatur. His peractis minus continens ternarii, id est 52ʳ· quaternarius, ab maiori continenti, id est senario, semel tollatur, et binarius,
15 qui remanet, in mente teneatur, et ipsum intervallum stationum mensoris inaccessibilis alti duplum ponatur. Subtractione continentium facta si unus tantum remanserit, intervallum stationum mensoris alto aequale est, si duo duplum, si tria triplum et sic in sequentibus.

Tali pictura fit declaratio pura. (Fig. 16.)

20 XIX. (AD PUTEI ALTITUDINEM METIENDAM.[2])) 34.

Putei aut cuiuslibet fossae altitudinem sic probabis. Accipe lignum directum | et pone super buccam putei, cuius umbram videbis in CF, id est 53ʳ in profunditate putei, et lignum quatuor cubitos aut plus habeat; et exeat subtus eius pedes alia hasta directa similis sibi. Et est profunditas putei AE;

---

1) An dieser Stelle hat Herr Weissenborn (Gerbert, Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters. Berlin 1888, S. 23) seine Kunst im Versemachen gezeigt. Dass ein leoninischer Vers beabsichtigt war, ist deutlich; sobald, wie in unserer Handschrift, das Wort *putei* weggelassen wird, ist auch der Vers in Ordnung. Der betreffende Verskünstler hat als selbstverständlich vorausgesetzt, dass jeder ihn so verstehen würde:

Sumere mensuram si vis, auferas staturam,

auch wenn er die Verbalformen von *sumere* und *auferre* mit einander vertauschte. Unsere Handschrift liefert ausser den drei bekannten leoninischen Versen noch einen vierten, der in den Druckausgaben durch Abänderung eines Wortes als solcher nicht mehr vorhanden ist. Am Ende von Cap. IV; 24 steht nämlich im Manuscripte, wie ich auch oben habe drucken lassen:

Exempli cura subdatur plana figura,

wo die Ausgaben das gewöhnlichere *causa* lesen. 2) Die nicht im Manuscripte vorhandenen Ueberschriften, welche sich aber auch in keiner andern Handschrift finden, sondern von Pez hinzugefügt sind, habe ich eingeklammert.

et hasta directa *AD*; et alia hasta *ABC* iacens super buccam putei truncat *DE* super angulos rectos. Et intuere in aqua putei umbram *AC* de *D* usque ad *F*, et invenies *AC* cubiti quot sint vel palmi, ac quotiens sit in *DA*, tociens est *ACB* vel *EF* in *DAE*.[1]) Utputa, si *AC* habeat unum palmum et *DA* tres, tribus vicibus est *AC* in *DA*, sicut est tribus 5 vicibus *ACB* in *DAC*. Abstrahe *AD*, remanet *AE*. (Fig. 17.)

XX. (AD ALTITUDINEM MONTIS INVENIENDAM.) 35.

Dum quaeris altitudinem alicuius montis, pone hastam ante te in plano pro monte longiorem te: et est hasta *AB*, et tu *CD*. Postea contemplare huc illuc te movens, donec recto oculorum visu per *A* usque *F* 10 53ᵛ videas. Tunc con|sidera, quanta sit *GC* ad *GA*, tanta est *CH* ad *HF*. Utputa, si *GC* dupla est ad *GA*, dupla est *CH* ad *HF*; et quantalibet *GC* ad *GA*, tanta est procul dubio *CH* ad *HF*; et quanta est *AG* ad *GC*, tanta est *FH* ad *HC*, et *HF* est mons.

Quod si fluvius habetur aut aliud obstaculum inter *C* et *H*, et non 15 possis pertingere ad montis radicem, ut praedictam invenias mensuram, accipe hastam, id est *AGB*, et ambula retro XXX cubitos aut quantumlibet, et iterum contempla recto visu de *M* per *K* usque *F*, quod est 54ʳ montis summitas, et | postea vide, quanta sit *MO* vel *NL* ad *OK*, tanta est *MH* vel *NI* ad *HF*. Abstrahe de *MH* vel *NI* *CH* vel *DI*, et vide, 20 quod remanet, tanta est altitudo montis. Utputa, si invenisti *CH* duplum ad *HF*, et post *MH* quadruplum ad *HF*, tolle *CH* de *MH*, id est duo de quatuor, remanent duo, quod *MC* dices. Quia *MC* duplum est *HF*, dona XX cubitos ad *MC* et X ad *HF*. Et si *CB* triplum est ad *HF*, et *MH* septuplum est ad *HF*, abstrahe de *MH* *CH*, id est III de VII; 25 quadruplum est *MC* ad *HF*. Sic in aliis. (Fig. 18.)

XXI. (DE EADEM RE SINE MUTATIONE HASTAE.) 36.

Si quaeris sine mutatione hastae, sic facies. Est mons *AB*. Accipe hastam duorum cubitorum longiorem te, et pone ante te in plano. Postea considera ipsam hastam, quae est *CDE*, et visum tuum recte mitte de *F* 30 per *D* usque *A*, dividens ipsam hastam super unum cubitum; et vide, quantum sit *FE* ad *ED*, tantum est *FG* ad *GA*. Ambula retro, quous-54ᵛ que videas de *H* per *C* usque *A*|, ubi est summitas montis, et vide, quantum sit *HE* ad *EC*, tantum est *HG* ad *GA*. Invenisti forsitan antea *FG* quadruplum *GA*, et *HG* decuplum ad *GA*: minue *FG* de *HG*, id est 35

1) Dass durch die Einschaltung unsrer Handschrift erst die ganze Darstellung richtigen Sinn erhält, ist leicht einzusehen.

IV de X, remanent VI. Sic est *HF* sescuplum ad *GA*, vel *GA* sexta ad *FH*. (Fig. 19.)

XXII. (AD INVENIENDAM PER SPECULUM ALTITUDINEM.) 37.

Si per speculum aut per concham plenam aquae quaeris scire alti-
5 tudinem montium vel turrium, accipe speculum, et pone prope montem[1]) in plano, et in tantum te ipsum et speculum positum in terra moveas huc et illuc, quousque videas *A* in *B*, id est summitatem montis in medio speculo. Et, quomodo sint invicem *BC* et *CD* vide, sic sunt invicem *EB* et *EA*. Et si sit obstaculum, quod non possis probare hoc, ambula
10 retro cum ipso speculo, et pone in terram, ut videas mo|vendo[2]) te a *D* 56r in *Z*. Et quantam proporcionem habent invicem *PK* et *KZ*, eandem habent *EA* et *ZE* invicem. Minue inde *BE*, et remanet *BZ*. Et vide, ut antea in superioribus figuris, quantum habeant proportionem *BZ* et *EA*.[3]) (Fig. 20.)

15 XXIII. (AD LATITUDINEM FLUVII INVENIENDAM.) 38.

Si quaeris scire latitudinem fluvii vel alicuius campi vel curtis vel cuiuslibet rei, accipe lignum, quod pertingat usque ad tuos oculos, secundum alios minus uno cubito, et pone eum in ripa fluvii, et sta prope eum, et est lignum, ut subtus vides, quasi *AB*, et pone aliud lignum
20 super ipsum erectum, sicut est *CD*. Postea contemplare recto oculorum visu per *AD* usque videas *E*, id est ripam vel terminum ex altera parte. Nam *BE* est fluvius, et *ADE* visus directus. Postea considera, quantum sit *AC* | ad *CD* vel e contra, quantum est *DC* ad *AC*, tantum est *ACB* 56v ad *BE* vel e contra *BE* ad *ACB*. Utputa, si *DC* est duplum *AC*,
25 duplum est *BE* ad *BCA*; si triplum, triplum et cetera. (Fig. 21.)

XXIV. (AD IDEM ALIUS MODUS.) 39.

Si quaeris aliter scire, pone hastam minorem te quasi ad pectus, et pone in ripa fluvii, et accipe aliud lignum pertingens usque ad oculos, sicut est *CD*. Et ambula retro quantumlibet, et pone ipsum fustem.

---

1) Dass dies die richtige Lesart ist, dürfte von selbst einleuchten. 2) Blatt 55 ist für die Figuren eingeheftet und enthält keinen Text. 3) Nach Herrn Weissenborn, *a. a. O.*, S. 84, soll dieses Capitel erst im 12. Jahrhundert durch Savosarda in das Hebräische und aus diesem durch Plato von Tivoli in das Lateinische übersetzt sein. Da es sich aber schon in einer Handschrift des 11. Jahrhunderts befindet, so dürfte das von Libri erwähnte Stück doch wohl ein anderes sein als das vorliegende, und alle daraufhin von Herrn Weissenborn gezogenen Schlüsse verfehlt.

Et tu tantum move te huc et illuc, quousque videas de *C* per *A* usque *E*, id est alteram fluminis ripam. Dehinc minue *AB* de *CD*, remanet *FC*. Vide, quomodo sint *AF* ad *FC*, sic sunt *BE* ad *BA*. Si triplum est *AF* ad *FC*, triplum est *BE* ad *BA*. (Fig. 22.)

XXV. AD ALTUM CUM SAGITTIS ET FILO MENSURANDUM. 40. 5

57r Dum geometricis figuris intenti philosophorum iam fatigabundi inven|tionibus inhaeremus, ne omnino deficiamus militaribus exercitiis animum relevemus. Sicut enim corpus cottidianis sumptibus fastidiens inusitato recreatur cibo, sic mens philosophicis onerata austeritatibus coniecturali poetarum relevatur figmento. Quapropter, ut animam nostram reficiamus, 10 militare inventum post multa supponamus.

Si cuiuslibet rei altitudinem investigare volueris, huiusmodi militari ingenio investigare poteris. Sume arcum cum filo, et una fili summitate, sagittae postremitati inhaerente, altera in manu remanente sagitta arcu 57v emissa altitudinis | mensurandae cacumen contingat. Post haec alterius fili 15 summitas eodem modo sagittae alteri vel alicui iaculo alligetur, et horum utrumvis proiectum altitudinis radicem, ut prius cacumen, feriat. Quo facto utrumque filum retrahas, et, quot pedum vel cubitorum sit utrumque, diligenter mensuratum inspicias. Deinde cuiusque fili numerus in se ductus multiplicetur, et, quanta utriusque multiplicationis summa fuerit, perpendatur, 20 ac minor summa de maiore subtrahatur, et tunc eius numeri, qui remanserit de maiori summa, tetragonale latus diligenter inquiratur. Hoc vero inquisito ac diligenter invento, sapienter tot pedum vel cubitorum ambiguitate semota altitudo, de qua inquiritur, pronuntietur, quot pedum vel cubitorum tetragoni illius latus unum habet. Et ut, quae dicimus, apertius 25 cognoscantur, altitudo et fila cum notis et numeris figuraliter subiiciantur. Sit altitudo, quae investigetur, *AB*; sit prioris fili, quod summitatem tetigit, quantitas quinario numero determinata *AC*; sit alterius fili, quod altitudinis radicem percussit, longitudo quaternario numero diffinita *CB*. Post haec vero prioris fili numerus in se multiplicetur, in XXV concrescit; quatuor 30 vero posterioris fili numerus in se ductus in XVI consurgit. Dein minore numero, id est XVI, de maiori, id est XXV, sublato erit remanens IX, cuius tetragonale latus III invenitur, quia III in se ductus in IX cumulatur. Trium igitur pedum erit altitudo *AB*. Sed quia potest accidere, quod remanentis tetragonale latus interdum integris numeris nequit inveniri, 35 subtilitas minutiarum necessario debet adhiberi, de quibus, quia longum est disserere, praetermittatur, et figura cum numeris et notis supponatur.

Rebus in obscuris oritur lux clara figuris. (Fig. 23.)

Bis zu unserm Cap. XVII hat ein und dieselbe zweite Hand geschrieben, bishierher sind auch die mitgetheilten Ueberschriften der einzelnen Capitel mit rothen Versalien geschrieben vorhanden. Die weitern Abschnitte XVIII bis XXIV (34—40) sind dann ohne Unterbrechung, aber auch ohne jede Ueberschrift, nur durch grosse in rother Farbe ausgeführte Anfangsbuchstaben als solche kenntlich gemacht, geschrieben. Nur bei Cap. XXIV (40) ist wieder die Ueberschrift hinzugefügt. Die Hand, welche zuletzt schreibt, ist deutlich von den beiden vorhergehenden unterschieden, dass aber die Fortsetzung der vorhergehenden Capitel beabsichtigt ist, wird dadurch klar, dass Blatt 52 unten in der Mitte die lateinische Nummer VII trägt, während, abweichend von allen früheren Bezeichnungen, das folgende Blatt 53 auf der Vorderseite in der Mitte des unteren Randes die Bezeichnung VIII hat und rechts in der unteren Ecke die arabische Ziffer 9.

Betrachten wir nun für einen Augenblick zunächst den Inhalt der von der zweiten Hand geschriebenen zusammengehörigen Nummern, so sehen wir, dass die in den Druckausgaben als 22 und 23 bezeichneten Capitel oder Paragraphen vollständig fehlen. Von ihnen ist 22, nebenbei gesagt, das einzige Capitel, in welchem dreimal das Wort *alhidada* statt *mediclinium* vorkommt, und auf welches Weissenborn[1]) ein so grosses Gewicht gelegt hat. Nach den beiden einleitenden Paragraphen haben wir nun zunächst sieben Methoden der Höhenmessung, dann folgen drei Längenmessungen, eine Höhenmessung, welche auf die bei der einen Längenmessung benutzte Methode ausdrücklich Bezug nimmt, wieder eine Längenmessung, zwei Tiefenmessungen und zum Schlusse noch eine Höhenmessung.

Ausser den beiden schon genannten Capiteln 22, 23 fehlt vor allem die zweite Erklärung des *quadratum geometricum* nach der Darlegung einer Höhenmessung mit Hilfe eines beweglichen, aus Stäben zusammengesetzten rechtwinkligen Dreiecks ohne feste Hypotenuse in Cap. 28. an einer Stelle, wo diese Erklärung gerade so hinpasst, wie die Faust aufs Auge. Damit entfällt ein zweiter Vorwurf, welchen Herr Weissenborn[2]) der Darstellung dieses zweiten Theiles macht. Auch diese Erklärung findet sich nur in einer einzigen späten Handschrift, und dürfte ebenso wie Cap. 22 auf

1) A. a. O., S. 86 u. 92. Ich habe schon an anderem Orte (Deutsche Litteraturzeitung 1888, No. 22, Sp. 818) darauf hingewiesen, dass nur eine einzige Handschrift das Capitel 22 enthält, und dass, da diese erst dem XII. Jahrhundert angehört, man den Zeugnissen der übrigen Codices gegenüber wohl berechtigt sei, diesen Paragraphen als Interpolation eben dieser einzigen Handschrift anzusehen. 2) A. a. O., S. 104.



Interpolation beruhen. Es fehlt die Bemerkung in Cap. 25ª: *Est etiam alia altitudinis metiendae regula etc.,* welche auch Pez nicht kennt, obwohl sie in den von Cantor[1]) als Fortsetzung der Gerbertschen Geometrie aus dem Salzburger Codex mitgetheilten Paragraphen sich befindet. Es fehlen die von Olleris in Parenthesen eingeschlossenen Zusätze, und die von Weissenborn[2]) richtig als Glosse erkannte Stelle am Schlusse von Cap. 16.

Alles in allem stellen diese XVII Capitel in der von unserem Manuscripte gegebenen Reihenfolge eine wohlgeordnete Anleitung zum Höhen-, Längen- und Tiefenmessen dar, nur muss man nicht verlangen, dass zwei Methoden, welche dem Wesen nach gleich, sich nur durch das angewendete Messinstrument von einander unterscheiden, von dem Verfasser oder Compilator auch als ein und dieselbe Methode erkannt werden. Wie soll der Mann, der nicht einmal die beiden Messungen mit den gleichschenklig rechtwinkligen und mit dem Pythagoreischen Dreiecke als ein und dieselbe Methode erkennt, dazu kommen, die in § 25ᵇ bei Olleris, unserem Cap. IX, abgehandelte Höhenmessung z. B. als im Princip auf dieselbe Methode wie die beiden vorhergehend abgehandelten beruhend anzusehen? Und wenn Herr Weissenborn[3]) behauptet, das in Cap. 33 bei Olleris, unserm XII, beschriebene geometrische Quadrat sei mit dem Horoscope und dieses wiederum mit dem Astrolabium identisch, so steht dem die Beschreibung selbst entgegen, in der es ja heisst: „*Post haec extremitati oppositi lateris mediclinium, ut in horoscopo, sic copulatur*", wodurch deutlich genug gezeigt wird, dass das Horoscop von dem Schreiber für ein anderes Instrument gehalten wird, als das hier beschriebene *quadratum geometricum.*[4]) Um jene Zeit gab auch die kleinste Verschiedenheit eines Apparates Grund, denselben anders zu nennen, als den ähnlichen. Ich will nur an das *Instrumentum Albion* erinnern, das sich von dem unter dem Namen *Cylindrus* beschriebenen Zeitmesser Hermanns des Lahmen in fast gar nichts unterscheidet, aber eine ganze Litteratur hervorgebracht hat, wie jedes Handschriftenverzeichniss ausweisen wird. Wir von unserer bessern Kenntniss aus sagen, Astrolabium, Horoscop und Quadratum geometricum sind ein und dasselbe; zu Gerberts Zeiten war das eben nicht der Fall; speciell unterschied sich ja das Astrolabium vom Horoscope, wie Herr Weissenborn[5])

1) Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig 1875. Anmerkung 283. Hier hat Cantor jedoch nicht bemerkt, dass dieser Passus in der Ollerischen Ausgabe sich findet. Er hat freilich den Pezschen Thesaurus benutzt. 2) A. a. O., S. 111. 3) A. a. O., S. 104. 4) Dass das *Quadratum geometricum* stets für etwas anderes gehalten ist, als das *Astrolabium,* bezeugt auch Peurbach, dessen ebenso benanntes Instrument nichts weiter ist als eine verbesserte Form des Gerbert zugeschriebenen. 5) A. a. O., S. 109.

selbst hervorgehoben hat, durch seine Eintheilung nach *gradus dierum* statt der Zwölftheilung des Horoscopes.

Die von der dritten Hand geschriebenen 7 Capitel fügen den vorhergehenden nach, was die Hilfsmittel betrifft, neuen Methoden noch eine Reihe von Tiefen-, Längen- und Höhenmessungen hinzu. Die Längenmessungen, in die Form der Breitenmessung eines Flusses gebracht, sind wie die Höhenmessungen durch CANTOR[1]) als Messung mit der festen Stange charakterisiert worden. Den Schluss macht die militärische Höhenmessung. Von ihr meint Herr WEISSENBORN[2]), sie sei wohl von dem Verfasser nur zur Verspottung aufgenommen worden. Ich glaube gerade im Gegentheile, dass ähnliche Versuche wirklich gemacht worden sind, und dass, wenn alle Militärschriftsteller vor GERBERTS Zeit und ihre Werke auf uns gekommen wären, sich auch für diese Methode die Urquelle auffinden lassen würde, jedenfalls aber nicht bei einem Araber, sondern aus römischen Quellen.

Von derselben Hand, welche die Paragraphen 30—40 (unser XVIII bis XXIV) geschrieben hat, schliessen sich nun von den Ollerischen noch die folgenden an: 53—64; 66—84, 90, 93, 94. Darauf folgt wieder eine von allen vorhergehenden Händen verschiedene Hand, welche noch Folgendes hinzufügte: Cap. 41; 43; 46; 47—52; 64 nochmals; 65. Von den in CANTORS Agrimensoren, Anm. 283 veröffentlichten Stücken Absatz 1; Cap. 85—89; 91; 93; Agrimensoren, Anm. 283, Absatz 2 u. 3; Cap. 49, 2. Absatz; 46, 2. Absatz.

Ausser den Capiteln 22 u. 23 fehlen also noch gänzlich: Cap. 42; 44; 45; und von Cap. 56 die fünf letzten Absätze.

Für das Folgende begnüge ich mich wieder in der Reihenfolge, wie unsere Handschrift sie giebt, die *Varia lectio* mitzutheilen, wobei ich jedoch oftmals darauf aufmerksam machen werde, wann entweder durch die Anordnung der Capitel, oder durch die Lesart des vorliegenden Manuscriptes der Sinn des Ganzen gebessert wird, speciell auch Dittographien vermieden werden.

Seite **452.** (Cap. 53.) 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.*[3]) — 8—9. *numerum arborum, quam et alia inveniendi regula est.* — 10. *diuisis.* — 14. *id est.*

(Cap. 54.) 18. *Rumbi, cuius sint.* — 21. *rumbi.*

(Cap. 55.) 25. *Omnis trigonus aequilaterus unum latus.* — 26. ipsum latus.

453. 1. *similiter* fehlt. — 3. *Omnis* fehlt. — 4. *expostulat.* — 5. *medietatem reliqui.* — 6. *Omnis* fehlt; *qui aequis continetur lateribus* fehlt; *quater lateris.* — 7. *unius lateris* fehlt; *in se multiplicat.* — 8. *et*

1) Agrimensoren, S. 163. 2) A. a. O., S. 23—24. 3) Die Lesart: *sic quaeratur. Utriusque partis quinta sumenda est* ist jedenfalls richtig. Sie giebt erst einen vollständig zutreffenden Sinn.



reliqui. — 9. *Omnis* fehlt; *multiplicationem lateris* fehlt; *aream ter.* — 10. *Octogonus septies, aream quater.* — 11—12. *Ennagonus septies, aream quinquies.* — 13—15. *Decagonus octies, aream sexies, et caeteri ad hanc consequentiam.*

(Cap. 56.) 18. *rotundi vel circuli; et embadum invenire.* — 19 *XXII*da *unitate sublata.* — 23. *integrum, et tunc medietas vel quarta pars circuitus perdiametrum, et tunc totum, et idem.* — 25. fehlt.

454. 1—14 fehlen.

(Cap. 57.) 17. *emiciclo; diametrum XIIII.* — 19. *quarta decima fiunt CCCVIII.* — 20. *emicicli.*

(Cap. 58.) 23. *longitudo est pedum.* — 24. *Hi.* — 25. *Hi* fehlt; fient CXXXIIII ss. — 26. *pedes VIIII, unciae VII et* £; *semis* bis *semuncia* fehlt.

455. 1. *sphaera.*

(Cap. 59.) 6. *trigono.* — 8. *dinoscere.* — 9—14. *embado totius circuli per supradictas regulas invento XI vicesimas primas subtrahas, id est, tolle vicesimam primam et multiplica undecies, fit area circuli, multiplica decies, fiunt excessiones trigoni.*

(Cap. 60.) 21. *permixtio; unitate sublata.* — 23. *superficiei multiplicatae.* — 24. *demus de singulis.* — 25. *singula latera.* — 26. *sit embadum.* — 28. *id est CCXX.*

456. (Cap. 61.) 4. *Tetragoni; latera singula pedum X.* — 8. *fientque CCX.*

(Cap. 62.) 11. *aequis.* — 12. *eandem.* — 14. *augmentata.* — 15. *fient.* — 16. *exagonis.*

(Cap. 63.) 24—25. *uno interius, uno exterius.*

457. *tres decimas quartas.* — 2. *regulam, id est dimidio.* — 3. *scias* fehlt. — 4. *tribus decimis quartis superari. Ex.* — 5. *et ei quatuor.* — 6. *cuius quantitatis; demptae.* — 8. *et eam.* — 13. *L et VI.*

(Cap. 64.) 16. *habeat circuitu pedes CCC, in.* — 19. *totius montis. Sed ad iugera invenienda per pedes unius iugeri, id est $\overline{XXVIII}$ · DCCC ille supradictus.*

458. (Cap. 66.) 28. *maius XV.* — 29. *in se fiunt.* — 30. *fiunt; hypotenusa.* — 31. *fiunt.*

459. 1. *minor praecisura.* — 2. *quam cadit kathetus. Haec.* — 3. *CXLIIII.* — 6. ss. — 7. *minoris facito.*

(Cap. 67.) 10. *si vis oves.* — 11. mittere sic. — 12. *duc bis vicenus; de CC.* — 14. *implebis numerum.*

(Cap. 68.) 17. *quacumque.* — 24. *numerum XXXVIII.* — 25. *autem fuerit.* — 26. *latitudine; erunt LXXVI.*

460. 2. *Semotim ducas longitudinem.* — 3. *si vis perpendere.* — 5. *invenies embadum.* — 6. $\overline{V}$. *D* fehlt.

(Cap. 69.) 9. continet. — 10. una XXXIV, in altera XXXII; *agnoscas*. — 15. *VII tunc esse*. — 15—16. *in illud campo* fehlt.

(Cap. 70.) 19. *in secundo*. — 22. *perticas* fehlt. — 23. *hoc autem; unus et* ϛ, *remanentibus*. — 24. ubique fehlt.

(Cap. 71.) 28. *habet*.

461. 1. *comprehende. De*. — 2. Das dritte *id est* fehlt. — 6. *XCVI* ϛ*C*ϛϛ *et nichil*.

(Cap. 72.) 9. *in altero* $\overline{I}$. — 10. pedes fehlt. — 11. *fac*. — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt; duae* fehlt. — 13. *fiunt*. — 16. *sume*.

(Cap. 73.) 21. *capiantur; ut unaquaeque; domus* fehlt. — 22. fac. — 23. *fiunt XLV*.

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare*. — 8. quinquies millies $\overline{CI}$. XCVI. — 8—9. *trigesies XX*.

(Cap. 75.) 12. *est pedum*. — 13. *implere*. — 16. *CXLIIII; per longitudinem et latitudinem multiplicans*. — 16—17. quater millies millia $\overline{CXLVII}$. CC. — 19. *pavimentum dictae basilicae; queunt*.

(Cap. 76.) 22—23. Die Glosse fehlt. — 23. *habet pedes*. — 24. *velis locare; pervius*. — 25. *quotiens sint; habeantur* fehlt. — 26. *quatuordecies; remanentibus duobus* fehlt. — 27. *sunt IV*. — 27—28. *VII quatuordecies*.

463. (Cap. 77.) 3. *XIV pedum*.

(Cap. 78.) 8. *ducas XIV*.

(Cap. 79.) 12. *emiciclo; basis sit*. — 13. *XXXVIIII et duabus*. — 14—15. *remanentibus, id est VIII* fehlt; *Quod idem*. — 18. *area sit*. — 18—19. *Ducatur quatuordecies, fiunt* $\overline{VIII}$. *DCXX IIII*.

464. (Cap. 80.) 1. *et his*. — 2. *hypotenusa*.

(Cap. 81.) 5—6. Die Glosse fehlt. — 7. *laevum, iugera sic*. — 8. *iugera* fehlt; *fit* fehlt. — 9. *pedibus constat. Ascensiumque in unum sume dimidiam, quae fit DCCC pedibus*[1]); *fiunt* $\overline{DCXL}$. — 10. repperies.

(Cap. 82.) 14. *in* fehlt. — 17. *cius* fehlt. — 22. *hypotenusa*. — 23. *ad summum; illic*. — 25. *visum tamdiu*.

465. 2 *illius rei, quam quaesiisti, tene*. — 2—3. *altitudinis inveniendi certa ratio est*. — 3. *erectus* fehlt. — 4. *plana sit*.

(Cap. 83.) 8. *in* fehlt.

(Cap. 84.) 22. *in se invicem ductis*. — 24. *fit*. — 25. Das zweite *de* fehlt. — 27. *diversitas* statt *profunditas*.[2])

1) Hier ist durch die Ergänzung der Sinn erst klar geworden. 2) Dass es *diversitas* heissen muss, wie auch Pz liest, ist klar. Wenn die Durchmesser des Fasses zu grosse Verschiedenheit zeigen, so ist die entwickelte Formel eben nicht mehr anwendbar.

467. (Cap. 90.) 22. *XX pedum.* — 23. *adicias.* — 24. *fiunt.* — 26. *id est* fehlt. — 27. *XLIV* fehlt.

468. (Cap. 93.) 21. *itemque.* — 22. *nosse; huius artis* fehlt. — 23. *tenuit.* — 24. *Syene usque Meroen; dispositique per.* — 25. *locorum* fehlt.

469. 1. *tot.* — 4. *notareque unumquemque.*[1]) — 8. *est mensurae.* — 9. *quingentorum.* — 10. *pertineat.* — 14—15. *portio.* — 17. *sextae horae.* — 18. *ut et.* — 19. *scribemus.* — 20. *sciroterum.* — 21. *exeat et aliquando* fehlt. — 22. *umbras* fehlt. — 24. *ingressum umbrae* fehlt.

470. (Cap. 94.) 7. *C, D, E.* — 8. *longissima erit umbra.* — 10. *describamus; stat.* — 11. *gnomo **AB** planitie **B**.* — 11—13. *umbram, et in planitie notemus signo D, sic et terram signo E, ut sint in vasi proportione longitudinis suae BEDC. Eiciamus hypotenusas.*[2])

446. (Cap. 41.) 6. *In ampligonio.* — 7. *super quam.*

447. 1—2. *hypotenusae minoris multiplicatione aggregata.* — 3. *multiplicationem; superhabundaverit adiecto uno.* — 4. *quotiens.* — 6. *nisi eiecturam.* — 7. *sumas latus, quod.* — 10. *fiet CL numerus embadi.*[3])

(Cap. 43.) 25. *trigonum orthogonium.*

448. 2. *superhabundaverit.* — 3. *videlicet iuncto.* — 5. *de* fehlt.

449. (Cap. 46.) 8. *scilicet* fehlt. — 11—17. fehlen.[4])

(Cap. 47.) 22. *adicias.*

(Cap. 48.) 28. *Trapitenii, cuius; embadum.*

450. 1. *dinoscere.* — 2. *basis plus quam coranstum ducas.* — 3. *sunt CCCCL; XX medium.* — 4. *invenitur* fehlt.

(Cap. 49.) 8. *singula latera.* — 9. *si vis prius; in se duc.* — 10. *DCCCC. Item alterius lateris mediam in se fient CCXXV. Hos detrahas de DCCCC remanebunt.* — 11. *basis.* — 13—25. fehlen.

451. (Cap. 50.) 3. *ysoscelis.* — 5. *in se, id est.*

(Cap. 51.) 12. *utrisque.* — 14. *CCCCL; dimidio, id est.*

(Cap. 52.) 24. *fient VIIII.*

452. 2. *et* fehlt.

Es folgt hier nochmals Cap. 64, genau in derselben Fassung, welche wir oben nachgewiesen haben.

457. (Cap. 65.) 25. *ducta.* — 27. *ducta.* — 29. *vel dempto uno et ducta.* —

---

1) Daraus folgt, dass die Pezsche Lesart *et notare* statt der von Olleris *notare etiam* die richtigere ist. 2) Der erste Abschnitt von Cap. 93 findet sich in der Ausgabe des Macrobius von Jan I, 219 Anmerkung zu 7, der zweite Theil, sowie das Cap. 94 ist aus Hyginus. (Siehe Gromatici veteres ed. Lachmann S. 188, 14—191, 11, wo auch der Schluss des Capitels gegeben ist.) 3) Es folgt noch offenbar ein Stück aus dem nächsten Capitel vorweggenommen: *Kathetus et basis sic quaerantur. Hypothenusae.* 4) Dadurch ist wieder ein Anstoss, welchen Weissenborn an diesem Capitel genommen hat, durch unsere Handschrift beseitigt. (Gerbert, S. 29 u. 33.)

458. 2. ducta. — 3—4 fehlen. — 6. *ducta.* — 8. *ducta.* — 9. *XXXVI facit quadratum, cuius quadrati latus acceptis VI et ducta.* — 12.. *ducta; decima octava.* — 14. *ducta.* — 15. *accrescat numero.* — 16. *augmentationes* bis *naturaliter* fehlt. — 18. *et sic in caeteris.* — 19—20. *Inter* bis *caeteris* fehlt, steht aber von andrer Hand geschrieben auf dem obern Rande. — 20. *incipienti auctiones.* — 21—22. *Nam pentagoni multiplicatio.* — 23. *id est I et IIII.*

Es folgt hier mit der Ueberschrift: *Quotiens in leuga rotetur rota* der erste Absatz der Anmerkung 283 in den Agrimensoren Cantors mit folgenden Abweichungen[1]): 2. *a primis; habeat.* — 8. *Utali, Bawarii.* — 10. *sint in Mille ut quadragies quinquies; fiunt* $\overline{IX}$. — 11. *scilicet unus.* —

Daran schliesst sich der erste Absatz von Cap. 55 nochmals an, ohne Abweichung von dem Drucke. Nun folgt von Cap. 25 der vorletzte Absatz in folgender Fassung, zugleich Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 3.[2])

Est etiam alia metiendae regula, qua cum umbra ipsius altitudinis ipsa altitudo mensuratur, quam sic notam putamus, ut expositione carere aestimemus. Hae duae figurae principatum debent optinere cum suis regulis, sed parvitas spatii sic fieri vetuit.

Dazu sind die beiden Figuren 4 (Cap. V, 16) und Fig. 2 (Cap. III, 17) nochmals gezeichnet. Die Worte *Hae* bis *vetuit* sind aber wieder durchgestrichen, denn der Raum hätte sicher erlaubt, jene beiden Methoden nochmals abzuhandeln. Jedenfalls stand das genau so in der Vorlage, aus welcher abgeschrieben wurde, ist einfach übernommen, dann das nun Folgende ebenso mechanisch abgeschrieben, und ein späterer Ueberarbeiter, von dem mehrfach Randglossen vorhanden sind, hat diesen Passus gestrichen. Es folgen nun zunächst aus Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 4 und 5 mit folgenden Abweichungen:

31. *origenis.* — 34. *egresipum vel eugepium.* — 36. *decies quam tantum.* — 37. *est in latere a dorso.* — 38. *metieris.* — 39. *ad dexteram in sinistram, vel ad sinistram in dextram.*

Dann weiter

466. (Cap. 85.) 4. *Ex coadunatione.* — 5. *quanta summa concrescat.* — 7. *numerus terminorum.* — 8. *velis scire.* — 10—11. *impar autem numerus terminorum.* —

---

1) Jedenfalls geht aus dem Vorkommen dieses Absatzes in einer Handschrift des XI. Jahrhunderts hervor, dass er schon um jene Zeit vorhanden sein musste, also nicht erst im XII. Jahrh., wie Cantor und nach ihm Weissenborn annehmen, verfasst sein kann. 2) Dass sich der Passus bei Gerbert findet, war Cantor a. a. O. entgangen.



(Cap. 86.) 19. Ueber *inauraturam* ist übergeschrieben *id est soliditatem vel spissitudinem.* (Hierüber sehe man die Bemerkung am Schlusse der Abhandlung.)

(Cap. 87.) 3. *pedes* fehlt.

(Cap. 88.) 7. *facies.* — 8. *aequalis* statt *et qualis.* —

(Cap. 89.) 13. *octogonium.* — 14. *circulum;* die Glosse fehlt. — 15. *et* fehlt. — 17. octogonium.

468. (Cap. 91.) 3. *fuerit prisma; pedum VIIII.* —

(Cap. 92.) 11. *vel longilatero.* — 12. *summarum inde.* — 13. *diagonio.* — 17. *ducatur, de ea summa nona tollatur, remanet.* —

Nun folgt von Cantor: Agrimensoren, Anmerkung 283, Absatz 2 mit folgenden Abweichungen:

15. *genera sunt.* — 16. *est exterior.* — 17. *videre vis.* — 18. *triangulus* bis *duobus* fehlt. — 20. IIIes; *quidem.* — 21. *determinent.* — 23. *descendant.* — 26. *tres circulos lineas.*

Hieran schliesst sich von gänzlich anderer Hand Cap. 49, 2. Absatz:

450. 14. *iterum basim et.* — 15. id est V, in se, qui. — 16. *fient.* — 18. *id est ex CLXIX; XIII* bis *fiunt* fehlen. — 19. *autem si.* — 21. *katheton quoque.* — 24. *dimidiam.* —

Endlich findet sich noch Cap. 46, Absatz 2:

449. 13. *orthogonis, vel oxigoniis, vel ampligoniis.* — 16. Die Glosse fehlt.

Damit schliesst Blatt 75^{v}. Auf dem untern Rande desselben steht die römische Zahl X, die letzte, welche als Bezeichnung der verschiedenen Lagen vorkommt. Auf Blatt 76^{r} steht schon die arabische Nummer 13. Zwischen den Blättern 41 und 47 sind fünf Blätter eingeheftet worden, welche die lateinische Ordnungszahl mit den arabischen in Widerspruch gebracht haben. Wie das gekommen sein dürfte, möchte ich hier noch auseinandersetzen:

Diejenige Hand, welche die ersten 13 Capitel des Gerbert abschrieb, sollte auch noch die Blätter 45 und 46 abschreiben. Da sie jedoch, vielleicht durch die eingeschalteten Figuren, zu weit vorgerückt war, — es blieben dem Schreiber nur noch $2\frac{1}{3}$ Seiten übrig, während er noch 4 Seiten schreiben musste —, so benutzte er die beiden noch übrigen Seiten zu andern Zwecken. Die zweite Hand hatte schon auf die ersten beiden Blätter einer vierblättrigen Lage ihr Pensum zu schreiben angefangen, nahm nun eine weitere vierblättrige Lage, schrieb auf die letzten beiden Blätter das von der ersten Hand Versäumte nach und benutzte die beiden ersten Blätter zu einem andern Stücke. Da aber der Raum von 4 Seiten nicht reichte, so wurde noch, wie deutlich zu sehen ist, ein 5tes Blatt eingeheftet. Nehmen wir die fünf Blätter heraus, so ist die durch die lateinische Custodenbezeichnung angeordnete Reihenfolge der Quaternionen vollständig gewahrt.

Der 7. Quaternio hat dann 6 Blätter, der 8. ebenfalls 6 und ist ihm, um für zwei Figuren, für welche sonst der Platz mangeln würde, einfügen zu können, ein etwas kleineres Blatt eingeheftet worden; der 9. besitzt 8 Blätter, ebensoviel der 10. — Die fünf eingehefteten Blätter tragen die arabische Nummer 7, der mit VII bezeichnete Quaternio hat arabisch 8, der mit VIII bezeichnete, wie schon oben gesagt wurde, besitzt die Nummer 9, der mit VIIII bezeichnete die Nummer 10. Bei dem X. Quaternio hat der Schreiber wieder aus Versehen das ganze Blatt, welches das erste und achte desselben bilden sollte, hintereinander beschrieben; es musste daher einzeln eingebunden werden, und so haben denn die Blätter 68 und 69 die arabische Nummer 11, die 6 andern des Quaternio X aber 12. Damit schliesst aber nach unserer Ueberzeugung die ursprünglich beabsichtigte Handschriftensammlung ab, wie schon aus dem Fehlen der römischen Custoden im Folgenden einleuchtend sein dürfte. Wir werden später noch einen weitern Grund für unsere Behauptung aus der Beschaffenheit der Handschrift beibringen.

Auf den $2\frac{1}{3}$ Seiten, welche der erste Schreiber mit andern Sachen ausfüllte, und den drei Blättern, welche der zweite Schreiber einfügte, steht nun Folgendes:

9) Bltt. 40ᵛ, 14—23: Gedicht über die Farbe der Lämmer.

Quis color in pullis pecodum si forte requiris,
His poteris signis sine visu noscere certis.
Agnus enim natus **be** *statim clamitat albus,*
Me *referat nigrum repetitis vocibus agnum,*
5 *Alternat varius* **be, me** *sic voce canorus.*
Talibus indiciis protendunt signa coloris.
Si sexum quaeris, his sensum decoque curis.
A *feminas notat, mares* **e** *voce serenat.*
Hoc habeas studium, si vis dinoscere verum,
10 *Numquam falleris, si sic vigilabis in istis.*

10) Blatt 41ʳ enthält zunächst das Fragment einer Anleitung, eine von einem andern gedachte Zahl zu errathen. Ich setze dasselbe hierher, vielleicht gelingt es jemandem, die Herkunft desselben festzustellen.

et ex quincuplatione natum numerum decies ducere. Postea quot centenarii exinde concreverint interroges, et quotquot centenarii fuerint, tu L superesse sciens, ipsosque L cum ducentis auferens, quot centenarii his sublatis remanserunt, tot tu unitates collige, et ex his numerum, quem ille concepit, minime 5 *cuncteris edicere.*[1])

1) In dem CLM. 14908, Bltt. 38ᵛ findet sich aus dem XV. Jahrhundert folgende ähnliche Betrachtung. *Nota nym fur dich ein zal, wye uil du wilt, exempli gracia Ich nem fur mich 17. illa duplica; erit 34, adde 5, erit 39; nunc multiplica 39*

11) Daran schliesst sich Bltt. 41r, 7 bis 41v, 18, das aus den *Carmina Burana* No. 92 bekannte Gedicht „*Ludus scacorum*“. So heisst bei uns ebenfalls die Ueberschrift.

Anfang: *Qui cupit egregium scacorum noscere ludum,*
Audiat, ut potui carmine composui.

Schluss: *Sepius est mattus servorum turbine septus,*
Et mattum suffert, si via nulla patet.

12) Darunter stehen die beiden Verse

Quatuor. et penta. duo. monas. tris. mias. unus.
Hinc dias. ambo. trias. unus. dias. et duo. monas.

Sie sind an späterer Stelle (Blatt 80v) wiederholt und ihre Gebrauchsanweisung beigefügt. Es sind Verse, welche die Anordnung enthalten, um das sogenannte Josephspiel, *ludus Joseph*, mit Christen und Heiden, von denen die Hälfte über Bord geworfen werden soll, so durchzuführen, dass nur Heiden das Loos trifft.

13) Bltt. 42r—44v enthalten einen arithmetischen Tractat, welchen ich, seines hohen Interesses halber, vollständig folgen lasse. Von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss schrieb, ist übergeschrieben „*Wirceburgensium*“. Worauf sich das gründet, wird später klar werden.

42r | DE AGGREGATIONE NATURALIUM NUMERORUM.

Si naturales numeros, id est I, II, III, IV, V et ceteros quotlibet ordinatim volueris aggregare, et quotum pariter conficiant numerum invenire, ultimum aggregandum, si par sit, in duo aequa divide, et per medietatem eius imparem sequentem multiplica. Si autem impar sit, eum nichilominus 5
in duo seces, et per maiorem partem ipsum imparem ultimum scilicet aggregandum multiplices, et numerum totius aggregationis invenies. Taliter autem nati numeri trigoni vel trianguli solent nuncupari.[1])

cum 5 erit 195; adde 10, erit 205; illa multiplica cum 10 facit 2050. Nu merck sein regel, et est 350, dy zeuch ab von der sum, vnd waz vber pleibt; daz tail in 100, et sic factum est. Et idem est, cum vis scire, quid unus iaceret cum tribus taxillis. Noch näher dürfte folgendes aus dem CLM. 14684 dem XIV. Jahrh. angehörend dem Obigen kommen (Blatt 30v, 23—27): *Si velis scire in quota feria osculatus est aliquis amicam suam, dic ei, quod duplet feriam adiciendo 1, quot totum multiplicet per 5, post hoc productum per 10, et de tota summa reiciat 50. Post hoc quaere hanc certitudinem, quotiens possint 100 subtrahi de tota summa. Si semel sit, est dies dominica, si bis, secunda feria, si ter, tercia feria, et sic deinceps.* Würde hier 5 statt 1 addiert sein, so würde genau die Regel unseres Manuscriptes herauskommen.

1) Ist das letzte Glied $2n$, so ist die Summe $n(2n+1)$, ist aber das letzte Glied ungerade, also $2n+1$, so entsteht $(n+1)(2n+1)$ als Summe.

DE IMPARI NUMERO AGGREGANDO.

10 Si impares tantum numeros vis aggregare, idem ultimum aggregandum in duo divide ita, ut unitas tantum aequalitatem impediat, et maiorem partem in sese multiplicans, quod quaesieras, invenies. Tales quoque numeri tetragoni vel quadranguli solent nominari.[1])

DE PARIBUS AGGREGANDIS.

15 Si autem pares mavis aggregare, idem proximum imparem sequentem in duo simili modo partire, et per minorem partem maiorem multiplicans repperies, quod quaesieras. Et hii itidem numeri parte altera longiores ab Arithmeticis solent vocari.[2])

Singularis unitas in omnes articulares unitates intenditur, si per singulas 20 superparticulares species tot proportiones assumis, quot duplas a triangulari unitate ponis. Et omnes articulares unitates in singularem unitatem remittantur, si per singulas superparticulares species tot propor|tiones aufero, 42ʳ quot intendendo assumpsisti. Sicut a singulari unitate incipiendum est, cum intendis, item ab articularibus unitatibus item incipiendum est, cum 25 remittis. Quoscumque repperias in superparticulari ultimos praecedentis speciei copulativos, scias esse sequentes eodem numero non eadem parte; et tot ex illis superpatientes procedere, quot superparticulares. Sive intendas, sive remittas, copulativos, quos praedixi, invenire non neglegas. Quibus inventis, si qua incuria deviabis, per illorum inventionem ad certum tramitem 30 remeabis. Sicut pater cum parvulo puero vel filio loquitur, ut ab eo possit intellegi, sponte palbutiit, ita item vellem abacista humili et simplici sermonis mei inductione ad intelligenda, quae dicturus sum, viam parare, si pateretur hoc subtilitas et obscuritas ipsius rei, quae adhuc inculta et ab ipsius sapientiae thesauris noviter producta nemini patet, nisi in nume- 35 rorum computatione bene exercitatis, nec his, nisi omni mentis intentione intellectum exhibeant.

In requirendis copulativis memor esto, quoto loco primus subsesqualter ponatur ab unitate, et quem eodem loco triplum invenies ab unitate, sit copulativus sesqualterae et sesquitertiae et radix superbipartientium.

40 Item, quem eodem loco quadruplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquitertiae et sesquiquartae radixque supertripartientium.

---

1) Ist das letzte Glied $2n + 1$, so ist dieses nach der Regel in n und $n + 1$ zu theilen. Die Summe aber ist $(n + 1)^2$. 2) Ist wieder das letzte Glied $2n$, so soll $2n + 1$ in n und $n + 1$ zerlegt werden, und die gesuchte Summe ist $n(n + 1)$.



43r Item quem eodem loco quincuplum invenias ab unita|te copulativus sit sesquiquartae et sesquiquintae radixque superquadripartientium.

Item, quem eodem loco sescuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquiquintae et sesquisextae radixque superquinquepartientium. 45

Item, quem eodem loco septuplum invenias ab unitate, copulativus sit sesquisextae et sesquiseptimae radixque supersexpartientium.

Item, quem eodem loco octuplum invenias ab unitate, sit copulativus sesquiseptimae et sesquioctavae radixque superseptempartientium.

Item, quem eodem loco nonuplum invenias ab unitate, sit copulativus 50 sesquioctavae et sesquinonae radixque superoctopartientium.

Hac inventione copulativorum contentus numeros copulativos interpositos his praeceptis quaeras. Secundum arbitrium tuum ordinatis in radice ab unitate duplis, medietatem per ternarium multiplica, et primum sesqualterum procreabis; sic deinceps ternarii per medietatem procreati ducto 55 per solos sesqualteros ad primum copulativum ascendis.

Hic expers medietatis ad procreandum primum sesquitertium tertiam suam multiplicandam dat quaternario; sic deinceps quaternario per tertiam procreati ducto per solos sesquitertios ad secundum copulativum ascendis.

Hic expers tertiae ad procreandum primum sesquiquartum quartam 60 suam multiplicandam dat quinario; sic deinceps quinario per quartam procreati ducto per solos sesquiquartos ad tertium copulativum ascendis.

Hic expers quartae ad procreandum primum sesquiquintum, quintam suam multiplicandam dat senario; sic deinceps senario per quintam pro-
43v creati ducto per solos sesquiquintos ad quartum co|pulativum ascendis. 65

Hic expers quintae ad procreandum primum sesquisextum sextam suam multiplicandam dat septenario; sic deinceps septenario per sextam procreati ducto per solos sesquisextos ad quintum copulativum ascendis.

Hic expers sextae ad procreandum primum sesquiseptimum septimam suam multiplicandam dat octonario; sic deinceps octonario per septimam 70 procreati ducto per solos sesquiseptimos ad sextum copulativum ascendis.

Hic expers septimae ad procreandum primum sesquioctavum octavam suam multiplicandam dat novenario; sic deinceps novenario per octavam procreati ducto per solos sesquioctavos ad septimum copulativum ascendis.

Hic expers octavae ad procreandum primum sesquinonum nonam suam 75 multiplicandam dat denario; sic deinceps denario per nonam procreati ducto per tot varietates partium, per tot discrimina proportionum unitas reddit in suam formam.

Insuper haec est admirabilis consideratio huius figurae, in qua continentur tres unitates: prima ex qua intenditur, tertia de qua remittitur, 80 media per quam intenditur et remittitur, et quod per omnes assumptiones

superparticularium proportionum partes numeris, quibus partes fiunt, et forma et quantitate diversae sunt; in solis sesquinonis partes numeris suis fiunt conformes, et sicut transcensis sesquinonis unitas reddit in suam
85 formam, ita transcensis sesquioctavis in sesquinonis eadem est forma numerorum, quae suarum partium.

Nec illud praetereundum | est, quod in singulis superparticularibus 44r speciebus duae certae et legitimae partes inveniuntur in sesquialteris media et tertia, in sesquitertiis tertia et quarta, in sesquiquartis quarta et quinta,
90 in sesquiquintis quinta et sexta, in sesquisextis sexta et septima, in sesquiseptimis septima et octava, in sesquioctavis octava et nona, in sesquinonis nona et decima, ita ut prima omnium dux sit ad intendendum, secunda omnium dux sit ad remittendum. Non enim uniformiter intuenda est haec intentio ab unitate, cuius singularis et simplex assumptio fit VIIII modis,
95 quorum primus assumit in superparticulari VIII, numerus secundus XVI, tertius XXIIII, quartus XXXII, quintus XL, sextus XLVIII, septimus LVI, octavus LXIIII, nonus LXXII, ut omnes assumptiones octonario numerositate se transcendant. Sed nos computistarum sollertiae ceteros numeros relinquentes, ultimum et maximum cum omni diligentia et magna affectione
100 speciem cum suis partibus, quorum generatio talis est. Primi copulativi tertiam per V multiplica, et primum superbipartientum procreasti, sic deinceps quinario per tertiam procreati ducto ceteros superbipartientes aggregasti. Item secundi copulativi quartam per VII multiplica, et primum supertripartientem procreasti; sic deinceps septenario per quartam procreati
105 ducto ceteros supertripartientes aggregasti. Item tertii copulativi quintam per VIIII multiplica, et primum superquadripartientem procreasti; sic deinceps novenario per quintam procreati ducto ceteros superquadripartientes aggregasti. | Item quarti copulativi sextam per XI multiplica, et primum 44v superquinquepartientem procreasti; sic deinceps undenario per sextam
110 procreati ducto ceteros superquinquepartientes aggregasti. Item quinti copulativi septimam per XIII multiplica et primum supersexpartientem procreasti, sic deinceps XIII⁰ per septimam procreati ducto ceteros supersexpartientes aggregasti. Item sexti copulativi octavam per XV multiplica, et primam superseptempartientem procreasti; sic deinceps XV⁰ per octavam
115 procreati ducto ceteros superseptempartientes aggregasti. Item septimi copulativi nonam per XVII multiplica, et primum superoctopartientem procreasti; sic deinceps XVII⁰ per nonam procreati ducto ceteros superoctopartientes aggregasti.

Sufficiant haec praecepta de sola intentione unitatis huius scientiae
120 amatoribus. Quem copiosior investigatio delectet, certus sit, omnium digitorum reformationem si id(!) articulis reperturum, si per singulas super-

particulares species tot proportiones assumuntur, quot dupli a singulari digito ponuntur. Praeterea inveniuntur in hac calculatione reformationes ab omnibus speciebus multiplicis. Sed nos *Wirzeburgenses*[1]) de illis dicere differimus, donec cognoscamus, quid inde moderni iudicant philosophi, utrum nostrum an veterum aestiment inventum, tribuant ab illis residuas reformationes requirant.

Eine Reihe, wie sie der Autor fordert, ist z. B. die folgende:

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100.

Die *numeri copulativi* sind hier 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90. Zuerst ist zweimal die *proportio dupla* vorhanden, dann zweimal *proportio sesqualtera*, da aber 9 *expers est medietatis*, so tritt nun die *Proportio sesquitertia* zweimal auf; ebenso ist wieder 16 *expers tertiae etc.* Zuletzt ist 81 *expers octavae*, deshalb tritt an Stelle der *proportio sesquioctava* die *sesquinona*, welche dann nach noch zweimaliger Anwendung die 100 zum Vorschein kommen lässt, den *articulus* zu dem *digitus* 1. Anders ausgedrückt lässt sich die obige Reihe auch in der Form folgenden Produktes schreiben:

$$1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 100.$$

Geht man etwa von dem *digitus* 5 aus, so erhält man die Reihe:

5, 10, 20, 40, 60, 90, 135, 180, 240, 320, 400, 500, 625, 750, 900, 1080, 1296, 1512, 1764, 2058, 2401, 2744, 3136, 3584, 4096, 4608, 5148, 5832, 6561, 7290, 8100, 9000, 10000

oder als Produkt geschrieben:

$$5 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot$$
$$\cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{9} = 10000.$$

14) Nach der *Geometria Gerberti* folgt jetzt Blatt 76^r—77^v, 6 ein Stück mit dem Anfange: „*Tria Genera Musicae studiosis comprehensa esse feruntur*" und dem Schlusse: „*Octavum habet primum in se duplum*". Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es ein *Tractatus de mensura fistularum organicarum*, Auszug aus Aureliani *de Musica* in dem Sammelwerke Gerberts.[2])

15) Daran schliesst sich ohne irgend welchen Absatz Blatt 77^v, 7—18: ein Abschnitt *de Luna*. Anfang: „*Etatem lunae multiplica per quatuor*", Schluss: „*Ubicumque haec lunatio completa fuerit, in die sive in nocte ibi sequentis initium esse cognoscat.*"

16) In derselben Zeile fortfahrend erstreckt sich dann bis Blatt 78^r, 15 ein Stück „*de mensuris*". Anfang: „*Hora habet punctos V. Minuta X.*

---

1) Hieraus hat der spätere Glossator seine Ueberschrift „*Wirceburgensium*" genommen. 2) *Scriptores ecclesiastici de musica.* St. Blasien 1784. Bnd. I, S. 32 ff.

Uncias XII, partes XV. Momenta XL, Ostenta LX" und schliesst: „*Centuria antiquitus C iugerum erat, postea duplicium. pristinum tamen obtinuit nomen.*"

17) Von Blatt 78r, 15 bis 78v, 5 findet sich wiederum absolut anschliessend der dritte Absatz des Cap. 82 von Gerberts *Geometrie* (Olleris, 464—465). *Varia lectio:* **464.** 19. *alia* fehlt. — 20. *vel trium* fehlt; *sit* fehlt; *vel IV* fehlt. — 20—21. *vel V* fehlt; *rem illam.* — 23. *ad terram* fehlt; *in summum.* — 23—24. *illic, ubi basis hypotenusae iungatur.* — 25. *que* fehlt; *summum tibi.* — 27. *et* fehlt. —

465. 1. *illius, et hoc spatio.* — 2. *altitudine illa, de qua.* — 2—3. *Haec ratio pro altitudine certissima est.* — 4. *plana sit.* —

18) Blatt 78v, 6—80r, 17: „*Incipiunt numeri, per quos potest, qui voluerit, alterius cogitationes cognoscere de numero quolibet, quem animo conceperit.*"

Das Stück ist abgedruckt in *Bedae venerabilis opera*[1]), und ich gebe hierunter die Abweichungen der Handschrift dem Drucke gegenüber an.

Theil I, Spalte 100. 2. *assumetur.* — 3—4. *Qui triplicatus.* — 6—7. *fuerint. iterum triplicabis, quae maior fuerit.* — 8. *triplicatur VIIII; possunt.* — 10. *est autem quod postquam triplicetur.* — 13. *fuerit.* — 13—14. *remansissent.* — 14. *aliquod supra remansit.* — 16. *est numerus; mente fuerat.* — 18—19. *fiunt VI. Sex vero diuisi per binarium III fiunt. Qui triplicati in VIIII consurgunt, nec aliquid remanet.* — 20. *primum.* — 22. *et* fehlt.

101. 1—3. *in senarium* bis *dictum* fehlt. — 5. *idem* fehlt. — 8. *quilibet* fehlt. — 8—9. *ac triplicetur, triplicatus vero.* — 10. *numeri* fehlt. — 11. *esse ambas.* — 12. *unus adsumatur.* — 21. *quot novenarii in eis; interrogetur.* — 23. *quot* statt *quotquot; tot novenarios.* — 24. *ut* fehlt. — 25. *faciunt, qui divisi.* — 27. *qui divisi.* — 29. *est* fehlt. — 29. *sunt* fehlt. — 30. *tunc in maiori.* — 31. *In quatuordecim semel, de his IIII.* — 33. *fiunt VI.* — 34. *primum.* — 36. *paritati* fehlt. — 39. *quia haec bis diuiditur et triplicatur.* — 41. *vero* fehlt. — 43. *quislibet.* — 44. *Quamcumque.* — 44—45. *cuius feriae.* — 47. *iungere debet; est* fehlt. — 48. *decies totum.* — 49. *toto CCL tollere.* — 50. *teneto, ut* fehlt. — 52. *quinquies ducti; qui decies.* — 53. *de totius summae collectione* fehlt. — 54. *et* fehlt; *centenarii remanserint.* — 55. *superius dictum est.* — 60. *quinquies fiunt XLV.* — 60—61. *decies fiunt ducti.* — 62—70. *si de tertia* bis *significant* fehlt. — 70. *qui quinquies.* — 71. *fiunt* fehlt. — 72. *qui* bis *significat* fehlt; *si autem de.* —

---

1) *Venerabilis Bedae Presbyteri Anglo-Saxonis viri sua aetate doctissimi Opera quotquot reperiri potuerunt omnia. Hac ultima impressione ornatius in lucem edita.* Coloniae Agrippinae Sumptibus Johannis Wilhelmi Friessem. Anno MDCLXXXVIII. 8 Bde. fol. ist die benutzte Ausgabe.



73. *VII[a] ratio habeatur; fiunt XIIII.* — 74. *qui quinquies; fiunt CV. Hi vero decies.* —

102. 1. *multiplicati fiunt; et remanent.* — 3. *tuum* fehlt.[1])

19) Das Blatt 80[r], 17—80[v] 18 Befindliche ziehe ich seines Interesses halber vor vollständig mitzutheilen. Es lautet:

A E I O V

V ⁝ RS ∵ S + B :: N · F : C ·· ⁝ P · SC :: P · GL :: R · :: S · Q ⁙ ⁝ M : RT · R · S

Genus huius descriptionis, tam quod supra punctis V et vocalibus, quam subtus equalibus vocalibus, quam solitum est, informatum continetur, fertur, quod sanctus Bonifacius archiepiscopus et martyr de angulis saxis veniens hoc antecessoribus nostris demonstraret, quod tamen non illo inprimis coeptum est, sed ab antiqnis istius modi usus crevisse comperimus.

B · F · K · P · X · KBRXS · XPPFPRIKS · TKRPKNS TERSBFFKRP · BRCHKIF · NFNSSCKPTPRRFGNKXTDFCXS · B · O · X · R · K · A · E · I · O · V · B · F · K · P · X.[2])

20) Ad fures inveniendos scribis in quattuor foliis lauri ana ✳BAAA ÑAhAnAAABANAA, et mittis immissorio, et vocas, quem suspectum habes, et manducare non poterit. Ad fures inveniendum pingis in IIII[or] foliis lauri ᵃₐ]✳B33]355 istas formulas, et vocas eum, quem suspectum habes, manducare non poterit.

21) Quatuor · et pentas · duo · monas . tris · mias · unus.
Hinc dias · ambo · trias · unus · dias · et duo · monas.

Quorum quidem versuum universalis regula tali poterit monstrari experientia, ut non solum sicut in his versibus auferendi auferantur, sed etiam quovis numero, quos volueris tollantur. Ponantur enim quilibet numeri duplici proportione constituti, quorum, quem vis remanere, duplus ponatur, quem vero vis auferre, subduplus ponatur. Computo solummodo per VIIII, vel VIII, vel quemcumque numerum voluero, et quem VIIII, vel VIII, vel quicumque numerus, per quem computavi, monstraverit, tollo,

1) In dem bekannten Buche des Jesuiten Leurechon: *„Recreation mathematique. Composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux En faict d'Arithmetique Geometrie, Mechanique, Opticque, et autres parties de ces belles sciences. Au Pont-a-Mousson. M.DC.XXVI.“* ist das *Probleme I. Deuiner le nombre que quelqu'un aurait pensé,* nichts weiter als eine ziemlich wörtliche Uebersetzung dieser Abhandlung von Beda dem Ehrwürdigen. Ob schon der Vorgänger Leurechons, Bachet, dieselbe aufgenommen hatte, ist mir nicht bekannt. 2) Dass hier der Schreiber seine Vorlage falsch abgeschrieben hat, ist klar. Es soll überall *A* durch *B*, *E* durch *F*, *I* durch *K*, *O* durch *P*, *U* durch *X* wiedergegeben sein. Anfang und Schluss sind klar: *A.E.I.O.V. Karus Christoforius Tiro ..... architenens sciotoregni ut decus auri AEIOUBFKPX,* aber die Zwischenworte zur Lösung zu bringen, ist uns nicht gelungen.

et inde duplos tuli, subduplos pono, et eodem duplos, quo ordine positi, 25 si auferendi sunt, aufero.[1])

22) Hieran schliessen sich wieder (Blatt 80ᵛ, 19—82ᵛ) von derselben Hand ohne jeden Absatz geschriebene Wiederholungen von Capiteln der GERBERTschen Geometrie und zwar von den Olleris-Capiteln die Nummern 22, 23, 28, 32, 34, 35, von denen das letzte mitten im Satze abbricht, so dass der Schreiber des Inhaltsverzeichnisses darunter „deest" geschrieben hat. Figuren sind nicht beigegeben, die Hand ist keine von denen, welche früher in der Geometrie GERBERTS vorgekommen sind. Ich lasse die Varianten hier folgen.

433. (Cap. 22.) 4. *cuiusque.* — 5. *dumtaxat.* — 6. *halgidadae.* — 8—9. *halgidadae.* — 8. *stet* bis *supra* fehlt. — 10. *proportionum altitudo* fehlt. — 12. *habent.* — 12—13. *umbrae.* — 15. *si omnes XII.* — 17. *halgidada.* — 18. *corporis erecti.* — 20. *transversum.*

(Cap. 23.) 23. *Si vero est invenire; operatio sit.* — 24. *quacumque cuiusque diei; astrolabium.* — 25—26. *et* bis *corpore* fehlt. —

437. (Cap. 28.) Stimmt absolut mit der oben (S. 90) gegebenen *varia lectio* überein, auch darin, dass die zweite Beschreibung des *quadratum geometricum* sich nicht vorfindet.

439—440. (Cap. 32.) 5. *est* fehlt. — 6. *sit notum.* — Alle übrigen Varianten sind die nämlichen wie oben (S. 85).

442. (Cap. 34.) 5. *Puteus autem.* — 6. *et* fehlt; *in profunditate.* — 7—8. *pedes tuos hasta alia similis.* — Auch die übrigen Varianten, besonders die Einschaltungen gegen den Druck, wie sie oben (S. 92—93) angegeben sind, sind vorhanden.

---

1) Die Aufgabe wird zuerst in HEGESIPPUS *de bello judaico* erwähnt. CANTOR hat sie als Bestandtheil der mathematischen Betrachtung zuerst bei CHUQUET im XV. Jahrh. nachweisen können. Hier haben wir sie schon aus dem XI. Jahrh. und zwar offenbar nicht als etwas Neues, sondern auch schon als alten Bestand. Der Verfasser scheint sich nur die allgemeine Lösung zuzuschreiben, dass nicht, wie bei der gewöhnlichen, es immer der neunte Mann sein muss, welchen das Loos trifft. Aus dem Clm. 14908 auch dem XV. Jahrh. angehörend, wie CHUQUET, entnehme ich über dieses sogenannte Josephspiel folgende Merkverse. Die hinzugeschriebenen Zahlen besagen, der Wievielte jedesmal durch das Loos ausgemerzt werden soll. Nur die Vokale haben den Zahlenwerth $a = 1$, $e = 2$, $i = 3$, $o = 4$, $u = 5$.

Rex angli cum veste bona dat signa serena. 10.
Non dum pena minas a te declina degeas. 9
Arte parare mea veniant adistere secte. 8
Larga dei pietas bene manes omnia papam. 6
Ibant per montes, querebant desidiosa. 12 proponendo videas.
Item 15 christiani et 15 iudei.

Siehe des Weitern meine Abhandlungen in der *Bibliotheca mathematica* 1894 und 1895, wo Nachweisungen aus dem X. und XII. Jahrhundert gegeben sind.

(Cap. 35.) Stimmt ebenfalls mit der früheren Lesart überein. Der Schluss von Seite **443**, 3 *plum est* bis *in aliis* (Zeile 5) fehlt.

23) Mit Blatt 83r beginnen Auszüge aus den *Gromatici veteres*[1]), und zwar *Nomina limitum et agrorum*[2]) (I, 246, 25—249, 5), beide jedoch in folgender Weise durcheinander gemischt (Blatt 83r, 1—17):

Orientales dicuntur decumani. Ager assignatus. Septemtrionales. cardines. Ager centuriatus. Maximi k. m. Ager subseciuus. Actuarii. Ager dextratus. Intercisiui. Ager citratus. Quintarii. Ager tesselatus. Cultellati. Ager normalis. Nouali. Ager triumuiralis. Maritimi. Ager neronianus podismatus. Temporales qui solis ortum sunt secuti. Ager 5 commutatus ex beneficio Augusti. Gallici. Ager locorum. Regales. Ager sinistratus. Subruncivi. Ager ultratus. Sellati. Ager epidonicus. Linearii. Ager tetragonus. Sextanei. Ager cultellatus. Tetragonales. Ager solitarius sylanus. Montani. Ager caesarianus. Austrinales. Ager meridianus. in XXV iuga. Qui per anticam et posticam diuiduntur. In potenii salas. 10 Prefecturales. Ager ex alieno sumptus. Egregii. Ager cineribus deputatus. Undecimani. Ager intraclusus. Colonici. Ager qui finibus augustinori continet. Passivi. Solitarii et Perpetui. —

Blatt 83r, 18—83v 18 folgt *Ratio limitum regundorum* (I. 358, 15—359, 10). Die Namen der Limites *A · B · C* u. s. w. fehlen. Bei *I* fehlt die Angabe der Länge. Bei *K* steht CCCL statt ∞CL; bei *L* statt ∞ ∞, CCCC; bei *N* CC statt ∞C; bei *O* CCC statt ∞C; bei *T* MC statt MD; bei *V* MCC statt MDC; bei *Z* endlich MCCCC statt MCCC. —

Es folgt 83v, 19—20. *De mensuratione iugeri* (I, 359, 12—13). Darin steht *terram* für *terra*. Weiter

83v, 21—84v, 12. *De compositione limitum vel terminorum*. So die Ueberschrift des Codex. (I. 359, 15—360, 32): **359.** 17—18. *interpretaretur non extorquet, sed ita est.* — 20. *extorquet.* — 22. *Babylonis* fehlt. — 23. *impinguet.* — 25. *inveniuntur signa.*

360. 6. *cissuram.* — 10. *victum.* — 11. *epictaticum; massaticium.* — 15. *fontentem(!).* — 17. *scissuram.* — 18. *scissum.* — 20. *Terminus si trestas circa(!).* — 21. *nominum bifurcium samarcia.* — 22—23. *si* bis *dare* fehlt. — 25. *olivastellam.* — 26. *convallium.* — 28. *demonstrat.* — 31. *demappas.*

---

1) Die Schriften der Römischen Feldmesser bearbeitet und herausgegeben von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Erster Band. Texte und Zeichnungen. Berlin bei Georg Reimer 1848. Auch unter dem Titel: *Gromatici Veteres ex recensione Caroli Lachmanni. Diagrammata edidit Adolfus Rudorffius.* Berolini Impensis Georgii Reimer. 1848. 2) Der Titel findet sich nicht in der Handschrift. Im Folgenden wird stets gesagt werden, ob das Manuscript die betreffende Capitelüberschrift hat, oder nicht.

Ohne weitere Ueberschrift folgt (Blatt 84^{v}, 12—85^{r}, 17) Gr. V. I. 361, 3—362, 6.

361. 3. *invenies in quadrifinio.* — 4. *sunt positae in qudrifinio.* — 7. *et* fehlt. — 9—10. fehlen. — 11. *in fine.* — 14. *Pressum.* — 15. *Olirastellam.* — 20. *direxerimus.* — 21. *direxerimus.* — 25. *in fine* fehlt. — 32. *collectarium.* — 33. *picilitos.* —

362. 2. *nativales.* — 6. *observantur.* —

Nun folgt mit der Ueberschrift: *Quomodo literae latinae sive graecae terminorum rationem et locorum qualitatem designant,* erst von Blatt 85^{r}, 17—86^{v}, letzte Zeile I, 362, 30—364, 22 und daran ohne Unterbrechung anschliessend (Blatt 86^{r}, l. Z.—87^{r}, 18) I, 325, 12—327, 3.

362. 30. *in singulis terminis; quas.* — 31. *sunt nudorum sed rationes.* —

363. 3. *invenies* fehlt; *bifurcium.* — 7. *decimanum.* — 18. *rigarum.* — 20. *invenies* fehlt. — 24. *finalem.* — 28. *habentes atque a septentrione.*

364. 2. *signis aliis; finales literas.* — 3. *tytulus* beidemale. — 6. *rivum respicit.* — 7. *collicaelum.* — 9. *inveneris; possionem.* — 15. *decumano fine.* — 17. *habet* fehlt. —

325. 14. *vivas duo sub se flumina.* — 15. *aspectus.* — 16. *mordet ibidem.* — 21. *si colligit.* — 25. *iacet* fehlt. —

326. 2. *vivam, habet flumen.* — 4. *sub* fehlt. — 7. *inferius laucrum est.* — 9. *colliget.* — 10. *gramen germanum.* — 13. *vivam aquam.* — (π und ϱ sind miteinander vertauscht). — 17—18. *vivam aquam.* — 19—20. *revertitur in aquam.* — 22. *habet* fehlt. — 25. *et* fehlt. — 25—26. *et* bis *inferius* fehlt. —

Mit der Ueberschrift: *De conditionibus et mensuris agrorum* folgt nun Blatt 87^{r}, 18—89^{r}, 4; I. 354, 2—356, 10.

354. 2. *iugerum; CCLXCXVIII.* — 15. *igitur una tabula perticas quadratas.* — 6. *per unum latus.* — 27. *L, nam eum metiri; quot.* — 8. *se* fehlt. — 9. *VIII tabulas* fehlt. — 10. fehlt. — 12. *multiplica.* — 13. *si sumis.* — 14. *remaneant.* — 19. ∞ fehlt; *tabulam unam LXMDCCCLX.* — 20—21. *trigonia ysopleurus.* — 21. *unum latus.* — 22. Das erste *latus* fehlt. — 23. *quae sunt; tabulas.* — 24. *perticas.*

355. 1. *in uno latere.* — 2. Die drei *et* fehlen. — 3. *dividis.* — 5. *quem dividi.* — 8. Ueberschrift: *De agro lunato.* — 9. *aequas* fehlt. — 10. *et unam partem facis.* — 12. *II tabulae.* — 15. *habeat* fehlt. — 18. *decimam* fehlt; *DCXXVI S.* — 19. *diximus esse.* — 21. *rotundus erit.* — 22. *diametrum.* — 26. *unum pedum est V.*[1]) — 27. *perticas XXIII.* —

356. 2—3. Statt *esto* bis *basi* steht: *XX XX coniungo numerum.* —

---

1) Hier ist natürlich die Abkürzung für *quincunx* ∻ als *est* gelesen.



4—6. *horum* bis *sunt X* fehlt. — 8. *diximus*. — 8—9. *iunctus itaque numerus*. — 9. *perticas* fehlt. — 10. *hoc* fehlt. —

24) Hieran schliessen sich zunächst Blatt 89r, 5—90r, 10 einige von CANTOR in seinen Agrimensoren veröffentlichte Stücke aus EPAPHRODITUS, die ich mir erlaube unter Zuhilfenahme des Cantorschen Textes herzustellen.

89r, 5 Seite 208. § 7. | Ager est longus pedum [CXX, latus pedum] LXX in quo dispositae sunt arbores XvX inter pedes V. si vis scire numerum arborum, quae in eo consitae sunt, sumas longitudinis partem quintam, quod haec est XXIIII, similiter et latitudinis quintam partem, quod est XIIII. His adicias bases singulas, ut fient XXV et quindecim. Dehinc multiplices 5 latitudinem per longitudinem sive longitudinem per latitudinem, quindecies enim XXV sive vigesies quinquies XV faciunt trecentos LXX quinque: tot sunt enim arbores.

Daran schliesst sich folgende Fortsetzung, deren Sinn unklar ist:

Sint in agro LXX arbores CCCLXXII. Huius summae quaero latüs, fit CXCII, huic adicio VIII fit CC. sumpta parte XXa fit X. his de aglos(!). 10

Nun folgen:

89v § 25. Sphaera est, cuius diametrum pedum XIIII, quaero | huius sphaerae inauraturam, hoc est profunditatem sive spissitudinem. Sic quaero. Diametrum duco bis, fit XXVIII. Hoc multiplico in se, vigesies octies XXVIII faciunt DCCLXXXIIII. hoc duco per XI, fit $\overline{\text{VIII}}$. DCXXIIII. huius summae sumpta parte XIIIIa fiunt DCXVI; tot pedum erit huius sphaerae in- 15 auratura.[1])

§ 26. Si fuerit cyclus, cuius diametrum est pedum XIIII, quadrati huius aream quaero hoc modo. Multiplico diametrum in se, fit CXCVI, et hoc duo undecies, fiunt $\overline{\text{II}}$ · CLVI. huius summae sumo partem quartam decimam, fit CLIIII; tot pedum erit huius cycli embadum, hoc est area. 20

§ 27. Si fuerit circuitio pedum XLIIII, diametrum pedum XIIII, quaero huius areae pedes per hunc modum. Sumo circuitionis partem dimidiam, fit XXII, diametri dimidiam partem, quod est VII. hoc duco per XXII, fit CLIIII; tot erunt huius areae pedes.

§ 28. Si fuerit emicyclus, cuius sit basis pedum XXVIII, curvatura 25 pedum XIIII, quaero huius emicycli aream. Sic quaero. multiplicabo basim huius emicycli per curvaturam, id est XXVIII per XIIII, fit CCCXCII. hoc

90r duco per XI, fiunt $\overline{\text{IIII}}$ · CCCXII. | sumpta parte quarta decima fit CCCVIII, tot pedum est huius emicycli area.

§ 29. Absidem ad circinum datam sic quaero. curvaturam altitudinis 30 per basim multiplicatam duco undecies. sumo partem quartam decimam; erit embadum.

1) Ueber *inauratura* siehe die Anmerkung am Schlusse der Abhandlung.

§ 30. In trigono orthogonio circulum inscribere si vis, qui omnes eius lineas tangat sic quaere. iunge kathetum et basim, deme hypotenusam,
35 erit diametron circuli.

25) Daran schliessen sich noch einige ähnliche Paragraphen Blatt 90r, 11—90v 5.

Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere. Multiplico dyametrum, id est VII in cubo. Primo in se, fit pedes XLVIIII. Deinde hoc rursus per VII, fiunt pedes CCCXLIII. hoc semper ducimus per undecim, fiunt $\overline{\text{III}}$ · DCC · LXXIII pedum. Huius
40 sumamus partem XXI, fiunt pedes CLXXVIIII; tot pedum erit eiusdem inauratum.[1])

Si datus fuerit circulus, cuius area habet pedes VI centos XVI, et scire volueris dyametrum eius | sic invenias. ducas quater decies areae 90v pedes, fiunt pedes $\overline{\text{VIII}}$ · DC · XXXIII. Dehinc hanc summam partiaris
45 per XI, fit undecima pars DCCLXXXIIII. Huius summae latus est XXVIII; tot pedum erit diametrum.

26) Es folgt ein Abschnitt (Blatt 90v, 5—92r, 14) mit der Ueberschrift:

DE GEOMETRIA COLUMNARUM ET MENSURIS ALIIS.

Geometria columnarum hoc modo fieri debet ab artifice, ut fiat, quantum grossa possit esse, quantaque eius longitudo fuerit. Columna septimam partem longitudinis debet habere in imo, hoc est in parte, quae
5 supra pedem manet. Superior autem pars columnae, ubi capitellum insidet, octauam partem debet longitudinis tenere.[2])

Mensura columnarum, ut possit aestimari, quantam altitudinem possit tenere mensurandi in circuitu. Si habuerit collurus super stragulum in circuitu pedes V, habebis in altum colluris pedes XII et dimidiam. Si
10 habuerit vero collurus in circuitu pedes (X), habebis in altum pedes XXV, quoniam unus pes in circuitu levat in altum pedes duos et dimidiam.

Si columna fuerit, quae sit in imo lata pedum XIII, in summo lata pedum V, alta pedum XXX, si scire voluerimus, quot pedes solidos haec teneant, multiplicemus latitudinem imam in se, hoc est XIII, fiunt CLXVIIII.
15 Dehinc multiplicemus summam latitudinem in se, hoc est V, fiunt XXV. Deinde multiplicemus primam summam quinquies, quinquies enim XIII fiunt LXV. Post haec metiamur has tres summas in unum, fiunt CCLVIIII. Haec ducamus per XI. Undecies enim CCLVIIII faciunt $\overline{\text{II}}$ · DCCC · XLVIIII. Hinc igitur sumamus partem decimam quartam, quod sunt CCIII et semis.

---

1) Quelle vom 2. Absatz des Cap. 82 bei Gerbert Olleris 464. 2) Dies ist die Quelle für den ersten Absatz von Gerberts Cap. 82. (Olleris, *464*.)



illud quae ducamus per XXX fiunt $\overline{\text{VI}}$ · CV. Huius summae facimus octavam 20
partem fiunt DCCLXIII, tot erunt solidi pedes huius columnae.[1])

Pes quadratus tenetur VIII pedibus, palmis LXVIII, unciis mille DCCXXVIII, digitis $\overline{\text{IIII}}$ · XCIII. Digitus unus £, pes quadratus amphoram capit semipedem longum, semipedem latum et altum, capit congium. hac ratione semis per semum fit, et semispes fit. Semper enim longum per 25
latum et per altum 'erunt pedes quadrati.

Mensura unius pedis quadratos si habuerit in altum digitos XVI, grassitudinem digitos XVI, computa XVI digitos in se fit CCLVI, et rursus computa digitos XVI per CCLVI, fiunt in unum digiti $\overline{\text{IIII}}$ · XCVI; tantum colligit. Unus pes quadratus capit sextarios urbi CCLXCVI. 30

Si cupa, id est vagina, in imo per dyametrum habet IIII pedes, in summo pedes II, in medio V, alta pedum XII, si vis cognoscere, quot amphoras capiat, sic quaeras. Multiplica dyametrum medium in se, id est V, fiunt XXV; id duplices, fiunt L. Post dyametrum multiplices secundum in se. coniunge X et IIII, fiunt XIIII; hoc iunge ad XLV, fiunt LVIIII. Item multiplicemus 35
dyametrum imum in se, quod sunt duo, fiunt IIII. iungo cum summa superiore, fiunt LXIIII. iungo dehinc in unum dyametrum imum ac summum, fiunt V. multiplicemus per dyametrum medium, hoc est V, fiunt XXV. Hoc iungo ad summam superiorem, fiunt in unum DCCCCLXVIII. hunc numerum diuido per tertiam altitudinem, hoc est per dyametrum tertium, 40
quod est quatuor, fiunt $\overline{\text{II}}$ · XLII; tot erunt amphorae in cupa nominata.[2])

1) Ist d_1 der untere, d_2 der obere Durchmesser, h die Höhe, so würde die Anweisung auf folgende Formel herauskommen:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{8} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2),$$

während die richtige Formel heissen müsste:

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2).$$

Sollte etwa an cannelierte Säulen zu denken sein? 2) Hier ist überhaupt aus der ganzen Auseinandersetzung nicht klug zu werden; jedenfalls muss die letzte Zahl CCXLII heissen. Nach der Handschrift *„Clm. 14783“* Bltt. 479ᵛ—480 heisst die Regel so: „Multipliciere den mittlern, den obern und den untern „Durchmesser in sich selbst; dann den obern in den mittlern und den „untern und addiere alles. Darauf multipliciere die Summe mit $\frac{11}{14}$ und „dann noch mit dem dritten Theile der Höhe, so ist das Produkt der „Inhalt des Gefässes.“ Sind d_1, d_2, d_3 die drei Durchmesser die Höhe h, so lautet die Vorschrift also so

$$v = \frac{11}{14} \cdot \frac{h}{3} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_3 (d_1 + d_2)).$$

Da heisst das Beispiel $d_1 = 6$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $h = 12$, und das richtige Resultat giebt $272\frac{20}{14}$!

Si fuerit puteus, cuius dyametrum sit pedum VI, altitudo XL pedum, et quaeritur, quot amphoras capiat. Sic quaere. Primum inveniamus aream, cuius dyametrum fiat IIII m(!), et remanent DXX. huius summae tolle XIII^{am}
15 partem, quod est quadraginta. Hoc duc per altum, fiunt mille ducenti. Tot amphoras continet nominatus puteus.

27) Blatt 92^r, 14—93^r, 6 folgen zwei Abschnitte aus Hyginus *de limitibus constituendis* (I, 170, 3—8; 182, 14—183, 16) mit der Ueberschrift.

„*De limitibus constituendis secundum rationem solis*".

Abweichende Lesarten sind:

170. 3. *per mundi.* — 4. *quod in semel; ferramenta.* — 5. *postea auspicaliter.* — 7. *limites duxerunt.* — 8. *in VIam horam non continet.*

182. 14. *quia ad.* — 14—15. *usi sunt hac ratione.* — 16. *crediderint, aut fefellit scientia errorem.* — 17. *neglexerint; contenti ei.* —

183. 1. *metiri.* — 1—2. *ortum singulis regionibus rectum esse.* — 3. *descendat.* — 4. *quicquid.* — 7. *non est facile, quia.* — 9. *si* fehlt; *illa.* — 10. *altero.* — 11. *apertiori.* — 12. *quo; citius.* — 12—13. *si non longe a monte nascatur cardo sive decumen.* — 14. *cursus recte potest comprehendi.* — 15. *luceat adhuc.* — 15—16. *et eidem campis adhuc interiori parte refulgeat.* —

28) Nun kommt ein Stück aus Boethius (Blatt 93^r, 6—94^r 5) I, 378, 14—379, 21. Die ersten Zeilen stehen so:

Trilaterum nec non amplius, in quo obtusus angulus fuerit. Oxygonium vero, id est acutum angulum, in quo tres anguli sunt acuti, vero quod est obtusum angulum, in quo obtusus angulus fuerit, figurarum formae sunt. In orthogonium, id est rectiangulum, quod quidem ut triangulum, quod
5 habet angulum rectum, ambligonium vero, quod est angulum obtusum.

Weiter folgen die Varianten:

378. 20. *quadratum figuratur.* — 22—23. *sed non est aequilaterum.* —

379. 1—2. *angulos tenet compares, id est autem non rectis.* — 2. *nec comparibus continetur lateribus.* — 3. *Praeter ista.* — 4. *coloniae; cognominantur.* — 6. *coniunctae atque.* — 8. *thimata; id est* fehlt; *partitus ab.* — 9. *omnem; lineam rectam.* — 12. *aequos sub centro; sibi* bis *esse* fehlt. — 13. *et* bis *partes* fehlt. — 14. *composuerit minores.* — 15. *lineas metiri ad eas.* — 17. *ynas et nyas.* — 18. *haec, quae sunt idem sunt comparia.* — 18—19. *comparia.* — 19. *a paribus paria.* —

Es führt noch mit Gr. Vet. I. 385, 23—386, 2 fort: *Gnomon ergo parallelogrammi spatii eorum, quae circa eandem sunt dyametrum, quodlibet unum quinque cum supplementis duobus*

29) Ohne irgend welchen Absatz folgt Blatt 94r, 5—95r, 4 ein Abschnitt mit der Ueberschrift

94r, 5 | DE PROPORTIONE.[1])

Magnitudo minor maioris magnitudinis mentis, quando minor maiorem magnitudinem permetitur. Maior ergo magnitudo minoris magnitudinis multiplex est, quotiens a minore maior integra dimensione completur. Proportio est duarum magnitudinum cogunt(!) ad se invicem comparatione veniens magnitudo. Proportiones vero ad se invicem tenere dicuntur, quae 5 possunt esse invicem multiplicationem transscendere. Eandem ergo proportionem prima magnitudo ad secundam magnitudinem, tertia ad quartam tenere prohibemus, quando primae aut tertiae magnitudinum per quae multiplices eas, quae sunt secundae atque tertiae, aeque multiplices, vel simul transcendant, vel ab his pariter transcenduntur, vel bis in simul exse- 10 quuntur, cum scilicet in alterna comparatione sumatur. Quae vero eandem retinent proportionem, ut proportionaliter esse dicuntur, quando vero earum magnitudinum, quae sunt aeque multiplices primae quidem magnitudinis, multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, secunda vero magnitudo multiplicem superat, tertiae vero magnitudinis multiplex, quartae 15 magnitudinis multiplicem minime superat: tunc prima magnitudo ad secundam magnitudinem maiorem proportionem quam tertia ad quartam tenere prohibetur. Proportionalitas vero et minimum terminis inventum proportionales idem eiusdem magnitudines proportionis esse dicuntur, praecedentes praecedentibus et consequentibus consequentes. Quando autem 20 magnitudines proportionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad tertiam duplicem proportionem quam ad secundam dicitur possidere. Quando vero 95r magnitudines pro|portionaliter fuerint constitutae, tunc prima ad quartam triplicem proportionem quam ad secundam dicitur obtinere. Conum vero summum sumere magnitudines proportionaliter fuerint constitutae. 25

Der Rest des Blattes ist leer.

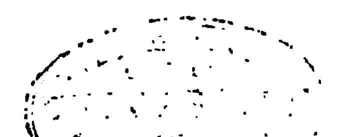
30) Blatt 96r—117v, 1. umfasst eine Abhandlung, welche von der Hand, welche das Inhaltsverzeichniss geschrieben hat, die Ueberschrift trägt:

„Geometrica“

Dieselbe ist eine Compilation. Soweit dieselbe noch nicht herausgegeben ist, lasse ich sie hier folgen. Von denjenigen Stücken, welche gedruckt vorliegen, gebe ich nur die Varianten.

---

1) Der folgende Abschnitt *„De proportione“* ist nichts weiter als eine Uebersetzung der Erklärungen des 5. Buches Euklids. In einer andern Handschrift aus dem X. Jahrhundert der Münchner Hof- und Staatsbibliothek ist der Abschnitt besser und vollständig überliefert. Ueber diese Handschrift im Vereine mit noch zwei andern werde ich anderswo Näheres mittheilen.





| Igitur geometricae artis peritiam qui ad integrum nosse desideret, 96r necesse est, ut huius artis expositores diligenti cura perlegat, et ea, quae perlegerit, tenaci memoriae commendet. Nam in primis eum scire oportet arithmeticam artem, quae continet numerorum causas et divisiones, id est, 5 qualis est diffinitio et diuisio; de paribus et imparibus numeris, et qualis est compositus numerus, et qualis incompositus; qualis est perfectus numerus, et qualis imperfectus; qualis est divisibilis numerus, et qualis indiuisibilis; qualis est particularis numerus, et qualis minus particularis; qualis superparticularis numerus, et qualis superpartiens; qualis est superfluus numerus, 10 et qualis diminutus; qualis est multiplex numerus, et qualis submultiplex; qualis est solidus, et qualis est sphaericus.

Item quomodo inventa est geometria; unde vocata est geometria; quid sit geometria; quae utilitas; qui ordo praescrip|tionis; quae sit ratio 96v propositionis, quae dispositionis, quae descriptionis, quae demonstrationis, 15 et quae conclusionis. Qualis est recta linea; qualis est definita linea; quot genera sunt extremitatum, quanta sunt summitatum; Qot genera sunt angulorum, qualis est planus angulus, qualis est obtusus angulus, qualis[1]) angulus, qualis est rectus angulus, qualis est acutus. Nec non et de mensuris sciendum est. Quae mensura sit pertica; quantum trahit 20 stadium, quid sit actus, quid climma, quid centuria, quid leuva, quid aripennis, quid iugerum, vel quid centuria. Quid punctum, quid diametrum, quid parallelogramum. Quid sit figura, vel quid sit circulus, aut in quae sit divisio. Qui scit ista omnia ad plenitudinem, novit locorum segregationem; nam qui ignorant regulam huius artis multa obponunt falsa pro veris.[2])

Nach dieser Einleitung folgt jetzt mit der Ueberschrift:

Quid sit ipsa geometria et quae eius effectiva potentia

eine Abschrift der Geometrie des Cassiodorius.[3]) Von ihr setze ich nur die abweichenden Lesarten hierher.

576. 2. *usuale.* — 2—3. *quod ut praeconiis* fehlt. — 4. *geometricare.* — 5. *amplicetur.*

577. 1. *caelo; creatur.* — 2. *adplicetur; sententia diffinitione forsitan.* — 3. *dicere, quodammodo geometrizat sancta divinitas.* — 3—4. *suae creaturae, quam.* — 4. *famulasque.* — 6. *quae sunt fixa.* — 8. *demensio.* — 10. *Egiptus propriis dominis fertur esse partita, quia Nili inundatio confusionem*

1) Diese Lücke befindet sich in der Handschrift. 2) Wie ich nachträglich gesehen habe, ist das Stück schon in der Boethius-Ausgabe Basileae 1570 auf Seite 1541, Z. 16—46 abgedruckt, doch ist unser Manuscript vollständiger als der Abdruck. 3) Ich benutzte die Ausgabe: M. Aurelii Cassiodori Senatoris V. C. opera omnia. Genevae Excudebat Philippus Gamonetus Anno MDCL.



fecit in agris. Unde controversiam ortam geometriae disciplinis prudentiores quippe sedare curarunt. Cuius iam. — 12. *consistere.* — 13. *homines constat demensiones; vagantibus populis.* — 15. *partitus* fehlt; *edicti.* — 16. *ita reperta.* — 18. *caeli.* — 18—19. *peritissimos* fehlt. — 19. *adsecutos.* — 22. *Cerellium quintum; spatia ipsius.* — 23. *caeli terrae ambitum.* — 24. *descripsit dicens.*

Und nun wird aus CENSORINUS, *de die natali*[1]) folgender Passus eingeschoben (S. 22, 22—24, 12). Auch hier gebe ich nur die Varianten.

22. 25. *numerabilem arithmon.* — 26. *distantiis diastematis.*

23. 2. *concinnent melodiam.* — 3. *carpere.* — 5. *fore stadiorum; ducentorum.* — 6. *Pythagoras* fehlt. — 7. *in terra.* — 9. *sexcentorum.* — 12. *pitagoras.* — 12. *mercurii lunam stellam.* — 15. *semitonion.* — 16. *bosphoron.* — 17. *semitonion.* — 19. *a terra* fehlt; *dimidium a terra.* — 21. *tesseron autem ad martis stellam.* — 24. *pheton nominatur, dimidium ipsius.* — 25. *amphenon.* — 26. *semitonion.* — 27. *semitonion.*

24. 1. *tesseron.* — 3. *fore VI.* — 4. *simphonia; multa* fehlt. — 5. *retulit; et in hoc omnem; enarmion esse innotuit.* — 7. *alii dixerunt; illud dacoraon.* — 10. *tantum tamen.* — 12. *musica; revertar.*

Jetzt wird mit der neuen Ueberschrift:

DE DIVISIONE GEOMETRIAE, IN QUOT PARTES DIUIDITUR.

der Auszug aus CASSIODORIUS fortgesetzt.

577. 25. *vero* fehlt; *quae dividitur.* — 31. *et in rationem.* — 35. *rationabiles et inrationabiles; Rationabiles quarum.* — 36. *inrationabiles; vero* fehlt; *quarum.* — 37. *igitur hae solidae; longitudine et.* — 40. *caelestibus concluditur.* — 41. *Euclides.* — 42. *Euclidem oblatum romanae linguae magnificus Boetius dedit.*

Damit schliesst CASSIODORIUS. Woher das nun Folgende genommen, weiss ich nicht zu sagen. Es hat folgenden Wortlaut:

100r, 3 | DE UTILITATE GEOMETRIAE.

Quae autem supra diximus de utilitate geometriae, sciendum est, quod utilitas geometriae triplex est. Cuius quaedam species pertinent ad facultatem enim, ut scientiae mechanicae vel architecturae; ad sanitatem vero, ut disciplinae sunt medicorum. Quia, sicut ritus artis mechanicae nulla 5 ratione consistunt absque mensura et descriptione liniamentorum, sic nec ars medicinae sine mensura et pondere atque herbarum discretione ullo modo subsistere valeat. Ad animam vero pertinet geometria, quia philo-

1) *CENSORINI de die natali liber.* Rec. FR. HULTSCH Lipsiae 1867 ist die benutzte Ausgabe.

sophorum disciplinis discretionem et moderationem in omnibus rebus habere ⟨debet⟩. Quid enim aliud prudentia, iustitia, fortitudo et temperantia nobiscum agunt, nisi ut prudenter, iuste, aequanimiter et temperanter vitam ducamus | et secundum praecepta conditoris nostri ordinabiliter et 100v recte vivamus. Quia, sicut supra dictum est, quicquid in nostra conversatione bene disponitur atque completur, potest disciplinae huius qualitatibus applicari.

DE ORDINE PRAESCRIPTIONIS GEOMETRIAE.

Ordo autem conscriptionis in geometria considerari debet, quia secundum quoddam ordo geometriae in disciplinis aliquatenus post arithmeticam secundus est, aliquatenus tertius, quia quidam geometriae musicam anteponunt. Sed qui diligentius de hac re investigaverunt secundo loco post arithmeticam geometriam, musicam vero tertio loco posuerunt et quarto astronomiam, quia sine dubio omnis motus est post quietem, et natura semper statio motu prior est. Mobilium vero astronomia, immobilium geometria doctrina est, et ideo cum motus sequatur post quietem, consequens est, ut motum astrorum armonicae modulationis continetur concentus. | 101r

DE RATIONE PROPOSITIONIS.

Ratio propositionis in geometria est, ut perpendamus, quod primum in ipsa arte proponi atque considerari oporteat. Quia enim mensura in aliquo et alicuius esse debet, primo loco constituamus fundum, in quo mensurae universae disponuntur. Fundus enim dictus est, quod in eo fundentur, vel stabilientur quaelibet res. Fundus autem et urbanum aedificium et rusticum secundum antiquos intelligendum est, de quibus rebus geometria maxime tractat ac figurarum omnium rationem disponit.

DE DISPOSITIONE.

Dispositio geometriae est linearum intendere genera, utrum vel circumferendo vel flexuose pergar, de quo in sequentibus plenius dicendum est.

DE DISSCRIPTIONE GEOMETRIAE.

In disscriptione quoque notari debent anguli, sicut in distributione inspiciuntur figurae, quod demonstrabitur, cum de angulis et de figuris universis dicemus.

DE DEMONSTRATIONE GEOMETRIAE.

In demonstratione autem, quantae sint summi|tates, intueri oportet. 101v Nam summitatum genera sunt duo: summitas et plana summitas. [Se-

cundum geometricam enim appellatio summitas est, quae longitudinem et latitudinem habet tantummodo. Summitatis finis lineae sunt. Plana 45 summitas est, quae aequaliter rectis lineis est posita] ad longitudinem atque latitudinem, quae alio nomine superficies dicitur.

Was ich zwischen eckige Klammern gesetzt habe, findet sich in den *Grom. Vet.* I. an drei verschiedenen Stellen. **99,** 11—14; **411,** 10—14; **414,** 14—18. Nach folgender Einleitung:

DE EXTREMITATIBUS.

De extremitatibus quoque, quomodo pertineant ad conclusionem, noscendum, quod

folgt nun weiter aus den *Grom. Vet. I* das Stück 414, 24—415, 4 mit folgenden Abweichungen.

414. 24. *quippe* fehlt; *duo, hoc est.* — 25. *per rigorem; per flexuosum observatur; rigoris.* — 26. *velut.* — 26—27. *rectum perspicitur.* — 27. *vero* fehlt.

415. 1. *quicquid ad horum immitationem in forma. Nam; mensura.* — 2. *directum.*

Weiter

DE PRINCIPIO MENSURAE.

Grom. Vet. I. 377, 2—7. Voran geht: *Principium mensurae punctus vocatur, cum medium tenet figurae.*

377. 2. *cuius figurae pars.* — 3. *puncti.* — 5. *et.*

Ferner

DE GENERIBUS MENSURARUM.

Grom. Vet. I. 96, 1—97, 13. Abweichungen sind folgende:

97. 1. *et crassitudinem.* — 2. *cum longitudinem.* — 3. *mirabilia.* — 4. *similia multa.* — 5. *vocant.* — 6. *habeamus.* — 6—7. *per quae etiam agros metimur* fehlt. — 9. *et illis alia similia; est* fehlt. — 10. *nos autem; appellamus* fehlt. — 12. *Pirarum idem opus rotundum, pyramidem aut lapide macherias.*

Von hier an fehlen weitere Ueberschriften. Es finden sich aber der Reihe nach noch folgende Theile der *Grom. Vet. I.:*

415. 4—5: 4. *singuli.* — **415.** 1—4: 2. *directum.*

98. 15—106, 11.

98. 15. *est, ut iam diximus; vero.* — 16. *rectae* fehlt.

99. 1. *positae cunctae; non* fehlt. — 3. *tria.* — 6. *singulorum suorum distat.* — 7. *arborum aut signorum.* — 8. *similitudine.* — 9. *multorum; rerum* fehlt. — 14—14. fehlt. — 15. *summitatum.*

100. 2. *si quis.* — 3. *ratione angulorum.* — 3—4. *ipsas extremitates.* — 5. *habes* — 8—9. *generis sui* fehlt. — 9. *hebes.* — 10. *ethigrammos.* —

11—12. *rectus super rectam lineam trans ordinem.* — 12. *ut singuli.* — 13. *sint.* — 14. *insistit vertex est.*

101. 1. *ex recto angulo.* — 3. *positionem qua si.* — 5. *habebit.* — 6. *compressior.* — 9—10. *intra finitimas lineas.* — 11. *plus normalis* fehlt. — 12. Ueberschrift: *De speciebus linearum.* — 13. *sunt tres generis sui.* — 14. *cyrculum.* — 15. *per* fehlt; *transferet.* — 15—16. *par e altero.* — 17. *quaecumque vero linea ordinata dimensione semicirculum erit.*

102. 1. *qui; et linearum per.* — 2. *interiacebit, hebetes angulos faciet generis sui; infra.* — 3. *dimensione; lineae* fehlt. — 5—6. *anguli, ut diximus, sunt rectum; acutum; rectum.* — 7. *per rectum punctum.* — 8. *parte* fehlt. — 8—9. Statt *ebes et acutus* steht *Ceteros autem.* — 9. *dimensione a recta linea.* — 11. *cludit.* — 13. *acuta hoc modo fiunt.* — 14. *pares circuli.* — 16. *faciunt; Hebetes; contrarii.* — 17. *hi inter.* — 18. *inducuntur.* — 18—19. *rectus angulus. hebes et acutus dicuntur.* — 19—20. *fuerunt inter se.* — 20. *intra se.*

103. 1. *altero.* — 3. *medio; hebetes.* — 5. *exilissima plenissime finiantur.* — 6. *et angulorum.* — 8. *complures* fehlt. — 10. *ergo.* — 11—16 fehlen. — 17. *Angularis igitur; tenet duas.* — 18. *planitie.* — 19. *et* fehlt. — 20. *Nam solidus.*

104. 1. *Forma sive figura.* — 4—5. *rationali.* — 5. *circumferentibus et rectis.* — 6. *rectis et circumferentibus.* — 7—12. fehlen. — 13. *circumferentium formarum.* — 14. *unius.* — 15. *et* fehlt. — 16. *accedentibus usque infinitum.* — 17. *plurimum.* — 18. *sub; atque ab.* — 19. *positae.*

106. 1—3. *ex duabus* bis *ex recta* fehlt. — 3—5. *Quadrilatera forma est quatuor lineis totidemque angulorum ex duobus circumferentibus et duabus rectis. Plura latera.* — 6. *plusplus.* — 6—7. *continetur.* — 8. *ex tribus circumferentibus et duabus rectis.*

Endlich 378, 5—14.

378. 5. *Rectae lineae.* — 6. *Tria latera.* — 7. *tribus* fehlt. — 8—10. *finitima* bis *servatur* fehlt. — 10. *vero* fehlt; *quae quatuor.* — 11. *continentur; est* fehlt. — 12. *tribus comparibus clauditur.* — 13. *tenet latera comparia.*

Nun folgen Ergänzungen der von Cantor in den *Agrimensoren* aus Epaphroditus veröffentlichten Paragraphen, speciell zu § 7 und folgende, welche ich mir wörtlich mitzutheilen erlaube.

I. | Idem ager est longus pedum CCXL, cuius latitudo ignoratur, sed [106r] in eo dispositae sunt arbores inter quinos pedes singulae crassae pedum duorum DXXV. Si quaerere vis latitudinem agri, adicias ad longitudinem quinarum numerum, quia inter pedes V dixi sitas esse arbores, fiunt CCXLV.
5 Tunc sumas partem septimam, quia arbores | cum intervallo habent pedes VII, [106v]

fiunt XXXV. Sumas tricesimam partem quintam de numero arborum, hoc est de quingentis XLV, fit XV. Hoc ducas septies, fit CV. Hinc ducas intervallum, hoc est pedes V, remanent C; tot pedes latitudo agri.

II. At cum erit mons, qui tenet in vertice per circuitum pedes trecentos et in ascensu pedes octingentos, ad pedem autem habet in circuitu pedes 10 mille. Si quaeris, quot iugera in eo sint, iungas in unum duas circuitiones, id est mille et trecentos. Dein sumas partem dimidiam, hoc est sexcentos quinquaginta. Ducas per ascensum montis, hoc est per octingentos, fiunt $\overline{DXX}$; tot igitur pedes erunt quadrati in superficie montis. Deinde, ut inveniamus, quot sunt iugera in eo, videas, quoties teneat $\overline{XXVIII}$ · DCCC, quia 15 tot pedes constratos habet unum iugerum, id est $\overline{XXVIII}$ octingentos, erunt iugera XVIII insuper pedes mille sexcenti.

107r III. Item | mons est qui tenet in imo prope pedem in circuitu pedes $\overline{II}$ · D in medietate per gyrum pedes MDC, in cacumine adaeque in circuitu pedes C, cuius ascensus pedum est D. Si igitur quaeris, quot 20 iugera in eo sint, iunge in unum tres circuitiones, id est pedes $\overline{II}$ · D et MDC, nec non et centum, fiunt simul $\overline{IIII}$ · CC. Hinc sume partem tertiam quae fit MCCCC. Hoc multiplica per altitudinem, et facit $\overline{DCC}$. Deinde vide quotiens habeat $\overline{XXVIII}$ · DCCC, hoc est vicies quater. Tot sunt iugera in eundem montem, hoc est tabulae quatuor et remanent pedes CC. 25

IV. Mons est strabus, qui habet ad pedem in circuitu pedes MCCC, in cacumine per circuitum pedes CC, sed est altus in parte dextera pedum DCCCL et ex parte laeva pedum DCCL, quaero, quot sunt in eo iugera. Sic quaere. Iungo in unum duas circuitiones, hoc est MCCC et CC. Sumo partem dimidiam fit DCC. mitto per circuitum $\overline{II}$ · D ascensus ambas in 30 107v unum, id est DCCCL · DCCL, fiunt MDC. Hinc sumo medietatem, | quo.[1])

Damit bricht die Sache ab, und ist hier der Auszug aus dem *Geometrica* überschriebenen Abschnitte zu Ende.

31) Es folgen nun wieder Blatt 107v 2—109r Capitel aus Gerberts Geometrie und zwar die *Ollerischen* Nummern 45, 42, 44, 23, 22 mit folgenden Abweichungen:

448. (Cap. 45.) 28. *Katheti dimidium.*

1) Aus diesen vier Paragraphen in Verbindung mit dem auf Blatt 89r des Manuscripts befindlichen lässt sich nun wohl sagen, was auf dem einen fehlenden Blatte des Arcerianus von Epaphroditus enthalten gewesen sein dürfte. Es war zunächst die weitere Ausführung des bei Cantor unvollständigen § 7, dann kamen noch zwei Aufgaben über Bäumezahl, bei welcher einmal die Länge, einmal die Breite des bestandenen Ackers gesucht wurde, dann kam von den jetzigen vier Paragraphen No. II. Der letztere schon von Cantor durch Divination erschlossene Ergänzung, die Quelle zu Gerberts Cap. 64. *(S. 457.)* § IV lässt sich aus Cantor unschwer vervollständigen.

447. (Cap. 42.) 15. *adiciatur.* — 17. *linearum rectarum.* — 19. *erit* fehlt; numeri $\bar{\text{I}}$ · CCXXV.

448. (Cap. 48.) 14. *praecisuras.* — 15. *dinoscere; ducto.* — 16. *summam simul.* — 17. *CCCLXV.* — 18. *quod superfuerit.* — 20. *praecisurae.* — 22. *praecisuram.* — 23. *superhabundantis.*

433. (Cap. 23.) 23. *Si vero est.* — 24. *quacumque cuiusque, astrolabium.* — 26. *conlatio*
comparatio.

(Cap. 22.) 1. *Ad mensurandum cum quadrato astrolabii in plano stantem per suam ipsius quamlibet altitudinem.* — 4. *cuiusque.* — 5. *per umbram ipsius* ausradiert. — 6. *solis radio; alhidadae.* — 7—9. *quod* bis *quadrato* fehlt. — 10. *eandem; proportionem altitudo* fehlt; *ad umbram* ausradiert. — 12. *habent; umbra* ausradiert. — 14—15. *sesqualtera.* — 15. *si omnes XII.* — 16. *et umbra* ausradiert. — 17. *alhidada; umbra* ausradiert. — 19. *inumbrata* ausradiert; *bassis est.* — 23. *dinoscitur.*

Blatt 109v, 110 und 111 sind leer.

32) Von Blatt 112r bis 118r, 14 erstreckt sich dann eine Abhandlung, welche von der Hand des Inhaltsverzeichnisses „PONDERA" überschrieben ist. In Wirklichkeit ist es eine Abhandlung über das Rechnen mit römischen Minutien. Ich theile dieselbe mit, soweit sie Interesse hat, und gebe dort, wo ein solches in beschränktem Masse besteht, dieselbe nur auszüglich wieder.[1])

| DE DIVERSITATE TALENTORUM. 112r

Mna C dragma, id est XXV solidi. Talentum minimum est librarum L, medium LXXII, maximum CXX. Siliqua lentis duo grana sunt et duae tertiae.

	Uncia in unciam fit dimidia sextula.	XXIIII
5	Sesquuncia in sesquunciam. sextula et obolus.	XXXVI
	Sextas in Sextantem fit duella.	XLVIII
	Quadrans in quadrantem fit semuncia et sicilicus.	LXXII
	Triens in trientem fit uncia et duella.	XCVI
	Quincunx in quincuncem fit sextans et dimidia sextula.	CXX
10	Semis in semissem fit quadrans.	CXLIIII
	Septunx in septuncem fit triens et dimidia sextula.	CLXVIII
	Bisse in bissem fit quicunx et duella.	CXCIX
	Dodras in dodrantem fit semis semuncia et sicilicus.	CCXVI
	Dextas in dextantem fit bisse et duella.	CCXL
15	Deunx in deuncem fit dimidia sextula.	CCLXIIII
	As in assem fit as.	CCLXXXVIII

1) Es ist ein Abschnitt von Gerberts *Regula de abaco computi* (Olleris 333, 25 bis 341, 16).

DE SIMILITUDINE MULTIPLICI.	Sem. XII
Ecce animadvertere potes, qualiter haec multiplicationis similitudo in diminutionem cadit. Sic enim dixi semis in semissem, quasi sex in senarium. Sed sex in senarium (12v) in XXXVI consurgit, semis vero in semissem in | quadrantem descendit. Sed quia cuiusque ductione in se breviter dictum est, quod postmodum lucidius demonstrabitur, nunc etiam in alterum ducere longum non videatur.	Duel VIII Sicil. VI Drag. III 20 Dim. S. II Scrip. I Obol. M Cerat. Q Calcus ᴗ 25

De uncia. Uncia in assem uncia .... uncia in sescunciam dragma.

De sescuncia. Sescuncia in quamcumque ducatur, eius octavam requirit, in quam ducitur, quia ipsa octava assis existit.

De sextante. Sextas in quadrantem semuncia .... sextas in assem sextas. 30

De quadrante. Quid quadrans in unciam, vel in sextantem, vel in (13r) se ipsum | faciat, superius dictum est. Idem est enim quadras in unciam vel sextantem, quod uncia vel sextas in quadrantem. Nunc vero, quod in ceteris reddat, videndum est. .... Quadras in assem quadras.

De triente. Triens in quincuncem uncia semuncia sextula .... 35 Triens in assem triens.

De quincunce. Quincunx in semissem sextas semuncia .... Quincunx in assem quincunx.

(13v) *De semisse.* | Quid semis in unciam vel sextantem, vel quadrantem, vel trientem, vel quincuncem faciat superius demonstratum est, quando 40 dicebatur, quod uncia, vel sextas, vel quadras, vel triens, vel quincunx in semissem redderet. Hoc enim scire oportet, quod in omni multiplicatione sive numerorum, seu unciarum, sive minutiarum tantumdem valet conversio, quantum directio. Sic enim idem mihi est, si dicam vel directim ter quatuor, vel e conversim quater tres; utraque multiplicatio 45 ad duodenarium convergit. Sic idem mihi erit sive directim triens in semissem, vel conversim semis in trientem dicam; utrumque duorum ad sextantem descendit .... Semis in assem semis.

De septunce. Septunx in bissem triens semuncia sextula .... Septunx in assem septunx. 50

(14r) *De bisse.* Bissis in dodrantem semis | ... Bissis in assem bissis.

De dodrante. Dodras in dextantem septunx semuncia .... Dodras in assem dodras.

De dextante. Dextas in deuncem dodras sextula. Dextas in assem dextas. 55

De Deunce. Deunx in asse deunx.

De asse. As in assem fit as.

Ne mireris me semis in semissem, vel quadras in trientem, vel triens in quadrantem dixisse, cum potius semissis semissem, vel quadrantis
60 trientem, vel trientis quadrantem et cetera eodem modo dicere debuissem. Quia enim superius me earum detrimenta sub optentu multiplicationis ostensurum promisi, nunc semis in semissem quasi sex in senarium dixi. Quia vero quid quaeque in se, quid in invicem facerent, minus capacibus monstravi, universalem regulam subnectere collibuit: Omne quod sub uni-
65 tate locatur, sive in numerum quemlibet, sive in aliquod eorum, quae sub unitate sunt, sicut superius demonstratum est, ducatur, non multiplicationem exposcit, sed totam partem illius, in quam ducatur, quota pars ipsum assis existit. Verbi gratia si unciam in XXIIII ducas, non extra XXIIII numerum quaerere, in quem illa inductio excrevisset, labores, sed infra XXIIII totam
70 partem, quota est uncia assis, id est duodecimam, | requiras, quae erit binarius. 114v Ex XXIIII igitur et uncia repraesentatur binarius. Si vero eandem unciam in deuncem duxeris, vel dextantem, vel in ceterorum aliquem, quia ipsa est assis duodecima, duodecimam deuncis, vel dextantis, vel ceterorum alicuius accipias. Sed forte dicis deuncem non habere duodecimam, cum
75 non nisi undecim contineat uncias. Ego vero tibi respondebo, cum uncia habere possit duodecimam, id est dimidiam sextulam, unciae duodecima undicies ducta, eo quod et ipsa undecies intra deuncem teneatur, faciet deuncis duodecimam. Sextas autem, quia sexta est assis, in quemcumque numerum sive minutiam ductus, in quem ducitur sextam requirit. Quadras,
80 quia quarta, quartam; triens, quia tertia, tertiam; quincunx, quia quinque sunt assis duodecimae, quinque duodecimas illius, in quam ducitur, exposcit. Semis, quia media, mediam; septunx, quia septem duodecimae, septem duodecimas; bissis, quia duae tertiae, duas tertias; dodras, quia tres quartae, tres quartas; dextas, quia X duodecimae, X duodecimas; deunx, quia un-
85 decim duodecimae, XI duodecimas.

Est et alia regula numeros tantum comparandi ad uncias. Quilibet numerus si cuilibet supradictorum comparetur, id est vel deunci vel dextanti, numerus unciarum in deunci vel dextanti per numerum comparatum ducatur|, et hi, qui inde excreverint, per duodenarium partiantur. Quot- 115r
90 cumque vero in hac partitione duodenarios reperies, totidem asses in ipsa unciarum et comparati numeri multiplicatione excrevisse cognoscas. Si aliquae vero extra duodenariorum partitionem superfuerint, hos pro unciis teneto, verbi gratia, si quinque, pro quincunce, si IIII pro triente. Si autem infra duodenarium illa multiplicatio remanserit, quicumque numerus
95 tibi sub duodenario venerit, eum pro totidem unciis teneto. Quod usque

modo dictum est, exemplificare libet. Ecce quadrante octonarius comparetur. Sed tres unciae in quadrante tenentur, quae per octonarium ductae in XXIIII surgunt. Sed in XXIIII bis duodenarius apparet; duo igitur asses ex octonarii et quadrantis multiplicatione veniunt. Item si octonarius trienti comparetur, quia triens IIII unciarum est, quaternarius per octo- 100 narium multiplicatur. Sed quater VIII XXXII. In XXXII vero bis duodenarius habetur remanentibus VIII; erit igitur ex multiplicatione unciarum trientis et octonarii XXXII unciae, id est asses II et VIII unciae, id est bisse. Item quaternarius sextanti comparetur. Sed sextas duarum est unciarum, binarius ergo in quaternarium ducatur, de quo nascitur octonarius. 105 Quia igitur infra duodenarium remanet octonarius, infra assem etiam erit, et pro VIII unciis, idest pro bisse, deputabitur.

115ᵛ | Videor in culpam illam incidisse in quam Porphirium, cum de genere tractabat, dicunt devenisse. Cum enim omnem demonstrationem ex notioribus oporteat constare, deputant illi in vicium ad generis diffinitionem 110 speciem ignotiorem adhibuisse. Ego quippe similiter comprobor. Cum enim unciarum comparationes ex notioribus monstrare debuissem, minucias ignotiores, id est sextulam, sicilicum et ceteras intermiscui. Sed Boetius Porphirio succurrit et mihi, dum dicam, nullam rem nisi ab his, in quibus substantiam suam habet, posse demonstrari. Sicut enim genus a specie substantiam 115 sumit, sic et uncia a partibus suis, id est sextula, sicilico et ceteris, quibus praeeuntibus ipsa non manebit. Nec autem paululum unciis intermissis aliquantulum scribere non pigeat de minutiis, ut et minutiis et unciis pleniter cognitis de utrorumque divisionibus et ductionibus postmodum abunde dicatur. Ne mireris autem nos distinctionem inter minutias fecisse, cum 120 et unciae minutiae possint vocari. Uncias quidem propter excellentiam suam tantum uncias, minutias vero, quae parvitate sua post unciam locantur, appellare placet tantum minutias.

Unciae divisione ultimus terminus calcus occurrit. Prima autem eiusdem divisionem secundum medietatis naturam semuncia suscipit. Unciae 125 116ʳ igitur | medietas semuncia dicitur; tertia duella; quarta sicilicus; sexta sextula; octava dragma; duodecima dimidia sextula, vicesima quarta scripulus; quadragesima octava obolus; nonagesima sexta cerates; centesima nonagesima secunda calcus. Sed qui fastidium respuunt, non nisi ad scripulum descendere volunt, qui vicesima quarta est unciae, assis vero 130 ducentesima octuogesima octava, ut in prima paginula huius libelli videre perfacile est. Ascripulo igitur propter minus capaces incipiens, quod quaeque in se vel in quamlibet aliarum valeat, monstrabo, servata tamen in illis etiam, sicut in unciis, regula prima universaliter superius dicta.

De minutiis. Scripulus in scripulum fit pars calci trigesima sexta, 135

quae ob parvitatem sui nomen habere non meruit. **Dimidia sextula** in se calci nona. **Dragma** in se calci quarta. **Sextula** in se oboli nona. **Sicilicus** in se calcus. **Duella** in se duae scripuli nonae. **Semuncia** in se obolus.

140 Quod autem in invicem faciant, vel etiam in ipsas uncias, sic accipe.

De scripula. Scripulus in dimidiam sextulam XVIII[a] calci . . . Scripulus in unciam oboli sexta, quod esse dicunt siliquae medietatem | 116ᵛ . . . . Scripulus in assem scripulus.

De dimidia sextula. Dimidia sextula in dragmam calci sexta . . . . 145 Dimidia sextula in dodrantem scripulus et medietas scripuli | . . . . Dimidia 117ʳ sextula in assem dimidia sextula.

De dragma. Dragma in sextulam calci tertia . . . Dragma in assem dragma.

De sextula. Sextula in sicilicum ceratis tertia . . . . Sextula in se- 150 missem dimidia sextula | . . . . Sextula in assem sextula. 117ᵛ

De sicilico. Sicilicus in duellam tercia oboli . . . . Sicilicus in assem sicilicus.

De duella. Duella in semunciam tercia scripuli . . . . Duella in semissem sextula | . . . . Duella in assem duella. 118ʳ

155 *De semuncia.* Semuncia in unciam scripulus . . . . Semuncia in assem semuncia (Bltt. 118ʳ, 14).

33) Nun folgt von der nämlichen Hand, aber durch eine Zeile Zwischenraum getrennt, Folgendes:

| Ambitus totius terrae $\overline{\text{CCLII}}$ absolvitur stadiorum, quae faciunt 118ʳ, 1[illegible] leuvas gallorum $\overline{\text{XXI}}$; Milliaria $\overline{\text{XXXI}}$.D; Passus tricies et semel mille millia et D; Pedes centies quinquagies et septies mille milia et $\overline{\text{D}}$; Uncias milies octingenties nonagies mille milia; Digitos $\overline{\text{V}}$.DC[ies] LXX[ies] $\overline{\text{III}}$. Digitus 5 est minima pars agrestium mensurarum. Uncia habet digitos III; Palmus in IIII protenditur digitos; Pedem XVI metiuntur digiti, Passus V pedum mensuram sortitur|; Pertica duos passus, id est X pedes explicit. Passus 118ᵛ CXXVI stadium absolvunt; Stadia VIII miliarium praestant; Mille passus, id est miliarium et dimidium, leuvam faciunt habentem passus M et D; 10 duae leuvae sive milliaria tria efficiunt restam.

34) Daran schliesst sich Bltt. 118ᵛ, 5—11 ohne jeden Zwischenraum die „*Divisio de limace*“ aus den *Propositiones ad acuendos iuvenes* (BEDAE *opera* I, 102) ohne jede Abweichung von dem gedruckten Texte, ausser dass in der Lösung die Zahl der Uncien richtig als 90 000, nicht wie im Drucke als 90 angegeben wird.

35) Weiter folgt 118ᵛ, 11—124ʳ, obwohl völlig heterogenen Inhalts, ebenso unmittelbar anschliessend eine Abhandlung über astronomische

Gegenstände. Sie hat folgende Capitel oder Paragraphen: *De solis cursu; De cursu solis per XII signa; De cursu lunae per XII signa; De cursu VII planetarum;* sie schliesst Bltt. 123ᵛ: *Sed inter haec omnia sydera martis maxime inobservabilis est cursus.* Bltt. 124ʳ enthält dann noch ein dazu gehöriges astronomisches Diagramm.

36) Da auf Bltt. 119ᵛ, einer grösseren auf Bltt. 120ʳ folgenden Figur halber, etwa eine halbe Seite Platz geblieben war, so hat eine ähnliche, jedoch sicher andere Hand den Platz mit folgender Bemerkung ausgefüllt, welche sich auf die Theile des Asses bezieht.

Unaquaeque pars assis a deunce usque in ʗ quot semunciis consistit, tot ƧƧ ad unciam sibi requirit. A semuncia vero usque in obelum, quot obelis consistit, tot semuncias scripuli ad unciam sui requirit. Et hoc in minimis partibus assis probemus. Quaeramus unciam in ÷ hoc modo. Uncia habet duas ʗ, totidem ƧƧ[as]., qui sunt qƨ ad unciam sui requirit. 5
ʗ[a] autem tres ʗ habet, totidem quoque ƧƧ[as], qui sunt ✕, ad unciam sui requirit.

37) Auf Bltt. 124ᵛ findet sich an erster Stelle die 19. Idylle des Ausonius mit der Ueberschrift:

> *Duodecim Herculis erumnae, quas victor sustinuit.*
> *Euristeo iubente Iunonis prece.*

38) Darunter steht folgende Melodie:

> Ūt ré fá rē mí ré ūt ré mí mí
> fá sól mí rē mí ūt ré fá sól lá
> s̊ol fá mí ré mí mí sól la s̊ol mí
> fá s̊ol rē lá sól lá fā sól lá lá
> s̊ol fá ré ūt mí rē

und die Bemerkung:

Armo grece, coaduno latine, unde armonia coadunatio vocum dicitur.

39) Bltt. 125ʳ—127ᵛ enthält eine Abhandlung mit dem Titel „*Mensura Monochordi*“. Anfang: *Primum divide monochordum per quatuor a magdala usque ad magdalam.* Schluss (Bltt. 127ᵛ 6): *et duos tonos habebis.* Auf Blatt 127ᵛ steht dann noch eine Tabelle der Töne und Halbtöne.

40) Nun folgt Blatt 128ʳ—132ᵛ, 23 der Brief Adelbolds an Gerbert über das Volumen der Kugel. Da derselbe in den bisherigen Drucken noch nicht in seiner Vollständigkeit veröffentlicht ist, sondern zu seinem vollen Verständniss wesentlich nothwendige Sätze, der Mangelhaftigkeit der benutzten Handschriften halber, weggelassen sind, so lasse ich denselben hierunter vollständig abdrucken.

| *Domino* Silvestro *Summo Et Pontifici Et Philosopho* 128r
Adelpoldus *scolasticus vitae et felicitatis perpetuitatem.*

Valde peccare est publicis intentum utilitatibus privatis inquietare conventionibus, sed hoc ingenio vestro confido, ut simul et rebus publicis 5 possit sufficere, et mihi ex hoc, quod quaero, satisfacere. Et tamen temere ago et non ignoranter pecco, quod tantum virum quasi conscolasticum in naeniis convenio. Sed confessio peccati veniam non tantum dico quaerit, sed exigit. Fortasse cogitastis, ut sic peccem, ut me peccasse poenitere nolim, ac ideo sine fructu poenitentiae confessio nec veniam debeat quaerere, 10 nec remissionem aliquam exigere. Ad haec respondeo, quia si benignitatem vestram in hac conventione offendero, ultra quam credere possitis, me vos convenisse dolebo: ac ideo dolenti, et poenitenti, simulque se peccasse fatenti, et deinceps ab eiusmodi peccato se abstinere volenti veniam concedendam esse censebo, ab eo maxime, qui vicem illius tenet, cui dictum 15 est: „*Non dico tibi usque septies* etc[a]."

Si autem non offendere, sed id, quod quaesiero, cum benevolentia vestra adeptus fuero, scitote, quod in adeptione mea et mihi et multis prodesse gaudebo. Quaestiuncula, quam iam auctoritati vestrae transmisi, quia non resolvatur, me | in ea aut vos offendisse timeo, aut pro dilatione 128v 20 solutionis aliquid grande futurum spero. Sed aliud quoddam proponam, ut aut ex hoc, quod timeo, magis doleam, et doloris magnitudo vos flectat ad veniam, aut ex eo, quod spero, magis gaudeam, et gaudii mei plenitudo remunerationem vobis implorit futuram. Et hoc quidem, quod nunc proponere volo, quibus rationibus discuti, et ad intellectum usque deduci 25 possit, videor videre, sed ad determinandam diligentiam vestram expecto, ut tanti viri auctoritas praeceptionis meae fiat aut correctio aut integritas.

Quid ergo sit, quibusque imaginationibus circa illud vel delusus habear, vel certus tenear, iam nunc aperiam, ut vulnere aperto haesitationis a vobis praesto sit medicamentum certitudinis.

30 Macrobius super somnium Scipionis ubi loquitur de magnitudine caeli, terrae, solis et lunae eorumque rotunda globositate, compertum esse ait aput geometricos peritissimos, ut in duobus circulis, si diametrum unius duplum sit diametro alterius, eius crassitudo, cuius diametrum duplum sit, octupla fiat crassitudini illius circuli, cui duplum idem est diametrum. 35 De diametro circulum, de circulo diametrum, de diametro et circulo aream invenire, ac ideo diametrum ad diametrum, et circulum ad circulum, et aream ad aream comparare illis est facile, qui de talibus consuevere curare. | Crassitudinem autem ad crassitudinem quomodo potest comparare, qui 129r necdum, quid sit crassitudo, perceperit? Duarum enim rerum notitiam

earundem comparatio non praecedit, sed subsequitur. Unde fit, ut crassitudinem aliquam crassitudini alteri octuplam esse comprehendere nequeat, qui non noverit, unde cuiusque circuli crassitudo concrescat. Quod autem iam inde mihi percepissem, aperiam; non, ut aiunt, Minervam litteras, sed ut monstrem, quid sentiam. Quatinus, si erro, ad viam a sagacitate vestra reducar, si viam titubantis teneo, auctoritati vestri assensus innitar. Sed ut ad id, quod volo, perveniam, ab his, quae nota sunt pluribus, incipiam.

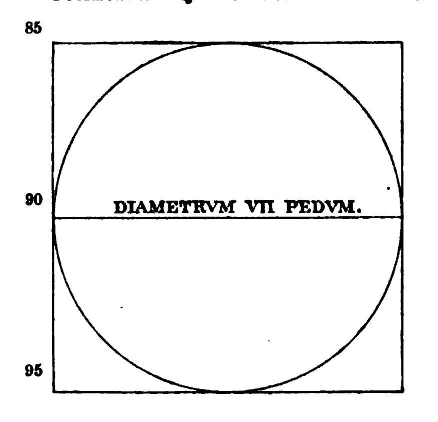
Diametrum VII pedum mihi facio; ex hoc circulum sic quaero: triplico illud, et eius septimam triplicationi illi superaddo, et sic circulum in XXII pedibus habeo. Medietate autem diametri, quod est III et ʃ, et medietate circuli, quod est XI, in invicem multiplicatis venit mihi area eiusdem circuli in XXXVIII pedibus et ʃ. Ecce diametrum, ecce circulum, ecce aream habeo. Sed ut crassitudinem inveniam, diametrum idem cubico, et cubum mihi eiusmodi facio, qui globositatem sphaerae lateribus contingat, angulis autem et lineis ab angulo in angulum procedentibus excedat. Ab eiusmodi cubo crassitudinem illam, quae a globositate usque ad angulos 129v et lineas procedit, necesse est | recidere, ut hac recisa solius sphaerae soliditas remaneat. Hanc recisionem hoc modo facio: summam totius cubi per XXI, id est vicesimas primas, divido; ex his vicesimis primis decem excessionibus cubi deputo, undecim reliquas crassitudini sphaerae relinquo. Quod idem esset, si summam totius cubi undecies ducerem, et ex illa concretione unam vicesimam primam subducerem. Haec enim una vicesima prima tanta esset, quantae illae XI, quae ex simplici cubi summa tollebantur. Ut lucidius fiat, quod dicimus, certis numeris crassitudines duas assignabimus, ut assignata in invicem comparare possimus. Non ut haec, aut veriora vos ignorare credamus, sed ut viis nostris vestrae diligentiae monstratis a vobis deinceps ducti errare nesciamus.

Circuli, cuius est diametrum VII pedum, crassitudinem sic quaero: cubico diametrum et dico, septem septies fiunt XLVIIII; rursus septies XLVIIII fiunt CCCXLIII. Ecce cubus eiusmodi quadrati, cuius unumquodque latus VII sit pedum, et hic cubus globositatem sphaerae ex toto concludit. Ut autem superexcedentia recidantur, sic facio: tollo vicesimam primam ex CCCXLIII, quae est XVI et ʃʃ. Hanc si decies duco, habeo 130r CLXIII et ʃʃ, excessiones scilicet cubi; | si undecies, habeo CLXXVIIII et ʃʃ, sphaerae videlicet crassitudinem.

Ut manifestius fiat, quod diximus, circulum cum quadrato subpingamus, ut visa in planitie facilius intelligantur in crassitudine.

Ecce in hac sphaera diametrum est VII pedum, circulus XXII, area XXXVIII et ʃ, soliditas CLXXVIIII et ʃʃ. Non est autem mirandum, si cubus in excessionibus suis fere medietatem crassitudinis obtineat, cum hic

quadratus in planitie supergressionibus suis vix tertiam partem retineat. | 130v Hic quippe in quadratura, cum unumquodque latus VII sit pedum, secundum laterum dimensionem area XLVIIII habebit. Cumque circulus ex his sibi XXXVIII et ʃ acceperit, quadratura suis excisuris non nisi X et ʃ retinebit. Quare autem mihi ita esse videatur, si vobis non sit fastidiosum audire, mihi non erit onerosum dicere.



Hic idem namque quadratus si septies in altum tollitur, CCCXLIII pedes reddit, excessiones scilicet suas et aream circuli secum in altum ducens. Septies enim X et ʃ, id est excessiones, fiunt LXXIII et ʃ, et septies XXXVIII et ʃ, id est area circuli, fiunt CCLXVIIII et ʃ. Sed LXXIII et ʃ et CCLXVIIII et ʃ reddunt CCCXLIII. Quare quadratum in altum tollere nihil aliud est, nisi excessiones suas et circuli aream secum deducere. Ab illo igitur cubo, qui ex area XLVIIII pedum consurrexerat, si quis septies X et ʃ, id est LXXIII et semissem reciderit, nondum sphaericam globositatem expolivit, sed formam modii ab aequali area in aequalem aream deductam constituit in pedes scilicet CCXVIIII et ʃ.

Ex hac autem forma non medietatem, ne in modum trochi ex utraque parte acueretur, sed tertiam partem quae est LXXXIIII et ʃʃʃ, tollere debemus, ut sphaeram ex omni parte expoliamus. Sed haec tertia non tamen omnino rotundae formae, id est LXXXVIIII et ʃʃʃ, et septem excessiones, id est LXXIII et ʃ idem reddunt, quod X vicesimae primae, quae ob hoc ab integro | cubo tollebantur, ut sphaera undique rotundaretur, et haec X 131r vicesimae primae ad medietatem sphaerae fere pervenirent, nisi quadragesima secunda eiusdem cubi impedirentur. Iam facile est videre, cum quadratus nec tertia sui circulum devincat, quare cubus fere sui medietate sphaerae globositatem supervadat. Sed haec forma modii, quae recisis undique lateribus cubi rotundatur, quamvis ad plenum non possit, aliquatenus tamen subscribatur, ut, quod inertia linguae occultat, veritas picturae aperiat. Ecce videri potest, quantum post recisionem accuminum de cubo recidendum sit de modio, ut pura globositas sphaerae remaneat.

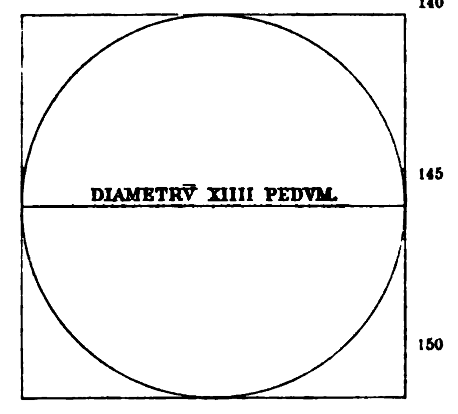
| Ecce satis dictum esse videtur, quomodo ex diametro VII pedum 131r crassitudo sphaerae concrescat. Iam nunc aliam statuamus, quae ex duplo diametro proveniat. Sit XIIII diametrum. Hoc cubico, XIIIIes XIIIIes XIIII fiunt II.DCCXLIIII, hic est cubus sphaeram concludens. Huius si vicesimam primam accepero, quae est CXXX et ʃʃ, et eam decies duxero, venient

mihi Ī.CCCVI ss, et his cubus sphaeram excedit. Si autem undecies, fiunt Ī.CCCCXXX et VII et ss, et haec est sphaerae crassitudo. Quam si quis eisdem rationibus velit informare, quibus superiorem informavimus, scilicet ut eam de cubo in formam modii, de modii forma in suam globositatem velit deducere, non tantum istam, sed et omnes, de quocumque diametro processerint, simili modo rotundare poterit. Sed uterque circulus depingatur, et is qui VII, et is qui XIIII pedes habet in diametro, ut numerus cuique suae soliditatis adscriptus demonstret, quantum minora maiore vincatur.

DIAMETRV̄ VII PEDVM.

132ʳ | Huius sicut dictum est diametrum VII est pedum, circulus XXII, area XXXVIII et s, soliditas CLXXVIIII et ss

Huius autem diametrum XIIII est pedum, circulus XLIIII, area CLIIII, soliditas Ī.CCCCXXXVII et ss. Diametrum et circulus sphaerae maioris diametro et circulo minoris dupla proportione iunguntur; area vero areae quadrupla; crassitudo autem crassi-132ᵛ tudini octupla. Bis enim VII et bis XXII, quod est diametrum | et circulus minoris, faciunt XIIII et XLIIII, quod est diametrum et circulus maioris; et quater XXXVIII et s, quod est area minoris, fiunt CLIIII, quod est area maioris; et octies CLXXVIIII et ss, quod soliditas minoris, reddunt Ī.CCCCXXXVII ss, quod est soliditas maioris.



Iam nunc quidem nil dubitarem, quin haec esset ratio sphaericam crassitudinem inveniendi, si proprium esset sphaericae tantum crassitudinis, ut, si duplicitas in diametro constaret, octuplicitas in soliditate reperiretur; sed hanc eandem rationem in omnibus cubis invenio. Si enim ex binario unum fecero cubum et ex quaternario alterum, quia quaternarius duplus est binarii, cubus quaternarii octuplus erit cubo binarii, et etiam area binarii quadrupla erit area quaternarii. Et non tantum in cubis, sed etiam in puteorum idem invenitur profunditatibus.

In his omnibus si erro, oro, ut ad viam veritatis reducar; si viam teneo, nihilominus peto, ut via, quae me dubitantem tenet in tenebris, vestri assensus auctoritate illustrata reluceat. (Bltt. 132ᵛ, 20.)

41) An diesen Brief schliessen sich nun von der nämlichen Hand geschrieben ohne jeden Zwischenraum und nur durch rothe Anfangsbuchstaben

ausgezeichnet wieder Capitel aus GERBERTS Geometrie an, und zwar Blatt 132v, 21 bis 135, 18. Von den Capiteln bei OLLERIS sind es Nr. 58; 56, 3. Abs.; 15; 53; 72; 73; 74; 75; 56, 1. u. 2. Abs.; 57; 79; 56, 3. Abs. nochmals; 25a; 83. Hier wieder die Varianten.

Seite **454.** (Cap. 58.) 23. *sit longitudo pedum.* — 24. *fiunt; horum fiunt III et* ꞩ. — 25. *Hi* fehlt; *CXXXVII et* ꞩꞩ. *Huius sumpta quarta decima parte.* — 26. *fiunt; VIIII et; et septunx* statt *et semis* bis *semuncia.*

455. 1. *vero haec; sphaerae.* — 2. *sive sit longa.*

453. (Cap. 56, 3. Abs.) 25. *eius cubices et.* — **454.** 1. *ex eaque summa vicesimam primam accipies; et haec erit crassitudo sphaerae.*

Daran schliesst sich folgender in GERBERT und bei CANTOR nicht befindlicher Abschnitt:

Ecce est pentagonus, qui unumquodque latus trium pedum habeat, et dicatur ter tres ter fiunt XXVII. Ex hac summa deducatur, id est abstrahatur, aera, id est latus, in quo sunt tres, remanent XXIIII. Huius medietas, id est duodenarius, huius pentagoni, qui tres in unoquoque latere 5 *habet, aream implet.*[1])

428. (Cap. 15.) 7. *sextas; dodras.* — 8. *climma; arripennis; dicitur* fehlt. — 9. *leuca* fehlt. — 11. *digiti tres; secundum quosdam, quod.* — 12. *digitus unus et tertia.* — 15. *sextantem.* — 16. *uncias XXIII.* — 18. *climma.* — 19. *in latitudine CX* fehlt; *CXX in longitudine.* — 20. *quod* bis *actis* fehlt. — 21. *CXX.* — 24. *passus M* fehlt. — 25. fehlt.

452. (Cap. 53.) 5. *Ager est; quo.* — 5—6. *sunt dispositae.* — 6. *sic quaeratur.* — 7. *quinta sumenda est.* — 9. *quem et alia inveniendi est regula.* — 10. *id est per.* — 11. *Ecce numerus arborum.* — 13. *partiantur.* — 14. *efficient; id est latitudinem.*

461. (Cap. 72.) 10. *domos ponere.* — 11. *pedum* fehlt; *vero* fehlt. — 12. *iunctae* fehlt; *fiunt.* — 13. *faciunt.* — 16. *tricesimam.* (Cap. 73.) 21. *unaquaeque.* — 23. *fiunt XLV.* — 26. *fiunt.*

462. (Cap. 74.) 3. *si vis locare.* — 5. *auferas, id est* $\overline{VII}$ · *DCXLIIII; vero tertiam sumas.* — 6. *hos et pro; ergo.* — 8. *pedibus* fehlt; $\overline{V^{es}\ MMCI}$ · *XCVI.* (Cap. 75.) 12. *sit.* — 13. *implere.* — 14. *habebit.* — 15. *Ces XXes CCXL.* — 16. *CXLIV; per longitudinem et latitudinem multi-*

---

1) Es ist nach der Formel für die Fünfeckszahl

$$P{r_5} = \frac{3r^2 - r}{2}$$

für $r = 3$ gerechnet worden. Hier ist auch der Beweis dafür, dass die Annahme CANTORS, *a. a. O.* S. 125, es bedeute *aera* die Seite, richtig ist. Es heisst ja „*aera, id est latus*".

plicans. — 16—17. *quater* $\overline{MMCXLVIII}$ · *CC, quos si dividis*. — 18. *fiunt; remanentibus* bis *unciis* fehlt.

453. (Cap. 56, 1 u. 2 Abs.) 19. *XXII^da^ sublata*. — 21. *si vis deinde, vel*. — 21—22. *ducenda est diametrum*. — 22. *dimidia*. — 22—23. *dimidium diametri duceretur*.

454. (Cap. 57.) 17. *diametrum XIIII*. — 18. *fiunt; pedes* fehlt. — 19. *parte quarta decima fiunt CCCVIII; et* fehlt.

463. (Cap. 79.) 13. *diametrum in se*. — 14. *sumas; et duabus*. — 14—15. *remanentibus* bis *VIII* fehlt; *Quod et idem*. — 19. *ducatur area et fiunt pedes*.

Zwischen Zeile 17 und 18 dieses Capitels steht noch folgender in Gerbert nicht befindlicher Absatz:

De omni circulo XXII^dam^ aufer partem, et illius numeri remanentis tertiam partem pro circuli diametro semper habebis. Embadum si nosse desideras, numerum dimidium totius circuli per dimidium diametri multiplica, et huius summam pone in embadum.

Es folgt nochmals Cap. 56 Abs. 3 absolut mit der obigen Fassung übereinstimmend.[1])

434. (Cap. 25^a^.) 15. *Ad aestimandum cuiusque rei altitudinem sole lucente*. — 16. *res illa fuerit sub divo posita*. — 17. *semper* fehlt; *elige*. — 18. *virgam huic parte coaequatam*. — 20. *fuerit. quantum virga superat*. — 21. *virga mensuram habet*. — 22. *est umbra* fehlt; *a virga superatur*. — 22—23. *adicias*. — 24. *rei illius habeto*.

465. (Cap. 83.) 8. *quoti*. — 9. *uno pede*.

42) Darunter, Blatt 135^v^, 19—23 steht folgender Text zu einem Gesange nebst einer sonstigen Bemerkung:

Cordex care cantilenam care canta caritativam chordas contrectando canens caeli conditori carmen, cui canunt chori caelorum canticam canticorum, cane chordis canta corde creatura creatorem.

Diapason et diatesseron symphoniae et intentae et remissae pariter consonantiam diapason in modulatione consona reddunt. 5

43) Die folgende Seite, Blatt 136^r^, enthält nur die Worte „*Pondera*

1) In einem Werke „*Liber theoreumaciae*“ betitelt, das spätestens aus dem 14. Jahrhundert stammt — es befindet sich u. A. in dem *Codex lat. Mon.* 14684 aus dem XIV. Saec. —, heisst das *18. theorema* des 2. Buches: CIRCULI SPERICAM CRASSITUDINEM INVENIRE. ARCHIMENIDES *dicit: circulum incrassare si vis, dyametrum eius cubices, et ipsam cubicationem 11^es^ ducas, ex eaque summa 20^am^ unam partem minuas et illa erit spere crassitudo.* Hier wird also unser vorliegender Absatz dem Archimedes zugeschrieben. Mit welchem Rechte? und woher stammt diese Behauptung?

e", ist sonst aber leer. Die betreffende Abhandlung, vielleicht X. Jahrhundert geschrieben, — jedenfalls ist die betreffende Hand ste im ganze Bande[1]) — beginnt auf Blatt 136v mit ganz ver- Schriftzügen folgendermassen:

Signa.

DE RATIONE VNTIARVM.

ʂʂ Scripulus est sex siliquae.

ψ Dimidia sextula. Duo scripuli vel siliquae XII.

ᴗ Sextula sive sescla. quatuor scripuli vel siliquae XXIIII.

u. s. w.

ℓ Assis sive as. duodecim unciae.

Zwischen den Zeilen sind von etwas späterer Hand, die aber jedenfalls dem XI. Jahrhundert zugehört, Interlinearglossen mit bedeutend schwärzerer Schrift gemacht. Die beiden folgenden Capitel setze ich vollständig hierher.

| DE PROBATIONE AURI ET ARGENTI. 137r, 1

Omne aurum purum cuiuslibet ponderis omni argento similiter puro eiusdem tamen ponderis densius est parte sui vicesima, quod ita probari potest. Si purissimi auri libra cum aeque puri argenti simili pondere ¦ 137v
5 sub aqua conferatur, in statera XII denariis, id est vicesima sui parte, aurum gravius argento, vel argentum levius auro invenitur. Quapropter si inveneris ossus aliquod auro formatum, cui argentum permixtione inesse videatur, scireque volueris, quantum auri, quantumve in eo contineatur argenti, sume argentum sive aurum, et examinato suspecti operis pondere
10 non minus pensatum massam de utrovis metallo fabricato, atque utrumque, et opus scilicet et massam, staterae lancibus inponeto aquaeque inmergito. Si argentea fuerit massa, quam fecisti, opus praeponderabit, si aurea fuerit, allevato opere aurum inclinabitur. Hoc tamen ita fiet, ut, quot partibus inclinatur aurum, tot idem partibus sublevetur argentum, quia quicquid

1) Es ist dies mit ein Grund, weshalb ich behaupte, dass mit Blatt 75 die eigentliche Sammlung von Werken schloss, und alles Übrige spätere Zuthat ist, wo aber das später sich nicht auf die Abfassungszeit, sondern auf die Hinzufügung zu dem eigentlichen Corpus der Handschrift bezieht, welche, wie ich oben gesagt habe, mit dem durch X bezeichneten Quaternio ihren Abschluss hatte. Dass der Abschnitt aus früherer Zeit stammt als die übrigen Theile, folgt auch daraus, dass der Text erst auf der Rückseite des Blattes beginnt, was nur bis in das X. Jahrhundert üblich war. Die Worte *Pondera et mensurae* sind von der Hand des Inhaltsverzeichnisses geschrieben.



138r in ipso opere fuerit sub aqua praeter | solitum per[1]) .... qui priorem 15
pertinere, quod .... ad argentum propter scarsitatem est referendum. et ut hoc facilius possit adverti, considerare debes tam in gravitate auri, quam in levitate argenti VII denarios significare libram, sicut prima lectionis huius fronte praefixum est.

DE MENSURA CAERAE ET METALLI IN OPERIBUS FUSILIBUS. 20

In fundendis operibus cuiusque ponderis metallum quotlibet ad certum caerae pondus respondere debeat.

Ad caerae unciam unam:

Stagni unciae VII et denarii XVII;
Aeris albi unciae VIII et denarii XVI; 25
Aeris cypri unciae VIIII et denarii III;[2])
Argenti unciae X et denarii XII;[3]) } (!)
Argenti unciae X et denarii XII; }
139v Plumbi unciae XII et denarii VI;[4]) |
Auri unciae XVIIII et denarii VIII. 30

Item si caerae fuerit libra, stagni VII librae et unciae X et denarii quattuor mittendi sunt, quia, quot uncias cera habuerit, tot VII uncias et XVII denarios stagni pondus habere debebit, et ideo si caerae fuerit libra, id est XII unciae, duodecies VII unciae stagni, quae faciunt VII libras, et duodecies XVII denarii mittendi sunt, qui faciunt CCIIII denarios, 35 id est uncias X et denarios IIII.

Si fuerit caerae libra, aeris albi librae VIIII sumendae sunt et duodecies XVI denarii, quod sunt uncias VIIII et denarios XII.

In libram caerae aeris cypri librae VIIII et denarii XII mittendi sunt.

Sic in libram caerae auricalci librae VIIII et duodecies tres denarii, 40 qui faciunt unciam unam et denarios XVI.

Contra libram caerae argenti librae X et duodecies XII denarii.

139r | Simili modo in libram caerae plumbi librae XIII et duodecies VII denarii mittendi sunt.

In auri fusione contra libram caerae auri librae XVIIII et duodecies 45 octo denarii, quod sunt unciae IIII et denarii XVI.

---

1) Es sind hier, offenbar mit Absicht, drei Zeilen vollständig mit Tinte überschmiert worden; soweit es möglich war, habe ich die Worte zu entziffern versucht. Eine von der Stelle genommene Photographie liess ebenfalls ein weiteres Lesen nicht zu. 2) Es muss heissen: *et denariis I,* wie aus dem Folgenden ersichtlich ist. 3) Hier sollte sicher stehen: *Auricalci unciae VIIII et denarii III.* Der Abschreiber ist offenbar aus einer Zeile in die andere gerathen. 4) Nach dem Folgenden müsste es heissen: *unciae XIII et denarii VII.*

Das folgende Capitel

DE MENSURA ET PONDERIBUS

ist wieder ein Ausschnitt aus den *Gromatici Veteres* (I, 371, 6—376, 5). Ich setze davon nur die Varianten hierher.

371. 8. *provinciis.* — 9. *provincias.* — 17. *pedes.* — 17—18. *pertica; pedes X* fehlt. — 26. *sive medico*(!). — 28. *quidam autem.*

372. 9. *pedes.* — 10. *pedes.* — 11. *XIIII.* — 17. *semi iugerum.* — 20. *pedes.* — 22. *pedes.* — 25. *quia apud.* — 32. *procellit.*

373. 1. *longitudinem.* — 6—7. Statt *qui* bis *demonstrat* steht *ac demonstratur.* — 29. *duo; faciunt* fehlt. — 29—30. *staterae.*

374. 8. *ex quattuor; et duodecim.* — 13. *IIII punctos; lunam V.* — 23. *quae habet.* — 27. *cyatum.*

375. 1. *X oxifalum; cyati.* — 2—3. *quod sunt; quattuor* fehlt. — 9. *coniugii.*(!) — 11. *coniugius. Coniugius.* — 18. *sicut* fehlt. — 28. *XX et quattuor.*

376. 2. *coaequatus.* — 5. Mit dem Worte *Modius* bricht der Auszug ab.

Blatt 144^r ist leer.

43) Auf Blatt 144^v bis 195^r, 10 und 160^r, 12—160^v folgt eine Schrift ohne Titel. Anfang: *Quicumque astronomicae disciplinae et caelestium sphaerarum geometricaliumque mensurarum altiorem scientiam diligenti veritatis inquisitione altius rimari conatur.*

Nach dem Handschriftenverzeichniss ist es Hermanns des Lahmen *liber de utilitatibus astrolabii.* Auf Blatt 159^r heissen die Schlussworte: *Huius autem divisionis exordium a meridiei linea, quae per medium primum gradum cancri ducitur, capit initium.* Auf Blatt 160^r beginnt dann die Schrift wieder: *Duo sunt extremi vertices mundi, quos appellant polos* und endigt ohne richtigen Schluss mitten im Satze abbrechend Blatt 160^v *In lacteo circulo inter pisces.*

44) Auf Blatt 159^r, 10—160^r, 12 ist nun, merkwürdig genug, so dass man ohne genaues Aufmerken es nicht finden würde, ein Fragment des Briefes Adelbolds an Gerbert zwischengeschrieben. Derselbe beginnt mit dem letzten Worte von Zeile 7 auf Seite 474 bei Olleris und geht bis zum Schlusse des Briefes. Er stimmt vollständig mit der Lesart überein, von welcher ich oben einen genauen Abdruck gegeben habe, weshalb ich von einer Mittheilung der *Vario lectio* Abstand nehme.

Mit Ausnahme von Blatt 136 bis 143, welche ich, wie oben gesagt, für den ältesten Bestandtheil der Handschrift halte, ist nur Blatt 1—75 unzweifelhaft aus der ersten Hälfte des XI. Jahrhunderts, während der

übrige Theil recht wohl aus den letzten Jahrzehnten desselben herstammen kann. Nur in den genannten älteren Abschnitten kommt niemals das sogenannte runde *s* vor, sondern steht ausnahmslos auch am Ende das lange *ſ*. Auch in den übrigen Theilen ist das *ſ* überwiegend, doch habe ich an wenigstens 6 Stellen schon das runde *s* verwendet gefunden, ein deutliches Zeichen späterer Entstehung.

Anmerkung zu Seite 102, 115 und 116. Das Wort *inauratura* kommt in der Lachmann'schen Ausgabe der *Gromatici Veteres* nur Seite 97, Zeile 8 in folgendem Zusammenhange vor: *planum est quod Greci epipedon appellant, nos constratos pedes; in quo longitudinem et latitudinem habemus; per quae metimur agros, aedificiorum sola, ex quibus altitudo aut crassitudo non proponitur, ut opera tectoria, inauraturas, tabulas, et his similia.* Weder aus diesem Texte noch aus der zugefügten Figur 70 kann man errathen, was unter *inauratura* zu verstehen ist. Aus dem *Codex Arcerianus* hat dann Cantor eine Reihe noch nicht veröffentlichter Paragraphen der Gromatici, dem Epaphroditus zugeschrieben, in seinen *Agrimensoren* herausgegeben. In diesem Abschnitt (*Agrimensoren S. 213*) heisst es nun in § 25: *Sfera est, cuius diametrum ped. XIIII. quaero huius sferae inauraturam. S. Q. semper diametrum duco bis, fit XXVIII. hoc multiplico in se, fit DCCLXXXIIII. hoc duco XI, fit* $\overline{\textit{VIII}}$ *DCXXIIII. sumptam partem XIIII. DCXG. tot ped. erunt.* Daraus folgt, dass unter *inauratura* die Oberfläche der Kugel verstanden werden soll. In unserer Handschrift ist derselbe Paragraph ebenfalls in etwas erweiterter Gestalt vorhanden. In ihm steht nun hinter *inauraturam: hoc est profunditatem sive spissitudinem*, was dieser Erklärung widersprechen würde. Ebenso widersprechend ist die Stelle auf S. 116 dieser Abhandlung, wo es anfangs heisst: *Sphaera fuerit data, cuius dyameter sit pedum VII, eius solidos pedes sic quaere,* und wo doch am Schlusse gesagt wird: *tot pedum erit eiusdem inauratum.*

Bei Gerbert (S. 466) heisst das Cap. 86: *Circuli inauraturam sic quaeras: diametrum circuli in se ductum vigesies bis multiplica. Effectae summae septimam accipias, et haec erit circuli inauratura; quod idem esset, si per diametrum circulum multiplicares.* Dass hier nicht mehr von der Oberfläche der Kugel die Rede ist, welche schon früher als *sphaerae area* berechnet worden, dürfte einleuchten. Dem ist aber auch wirklich so, denn in spätern Jahrhunderten wird der Inhalt des Kreisringes zwischen dem Kreise vom einfachen und dem vom doppelten Radius als *circuli inauratura* bezeichnet und, wenn auch fälschlich, als das Vierfache des Grundkreises berechnet, wie ich es in verschiedenen Handschriften der Münchner Hof- und Staatsbibliothek konstatiren konnte.

Wie *inauratura* die Oberfläche der Kugel bedeuten konnte, da die wörtliche Uebersetzung doch jedenfalls Vergoldung ist, und wie sich der Begriff dann auf jenen Kreisring verschieben konnte, hat mir Herr Professor E. v. Wölfflin in München auf meine Anfrage in freundlichster Weise so auseinandergesetzt:

München, 26. März 1895.

„Der Uebergang von „Vergoldung" zu „Oberfläche" scheint mir ganz natürlich. Es konnte doch einmal das Problem auftauchen: Wie viel Gold braucht man zum Vergolden einer Kugel? z. B. einer Kugel, auf der die Victoria steht. Wäre das

Gold, mit welchem wir die Nüsse vergolden, kreisförmig, nicht quadratisch zugeschnitten, so könnte man — so nahm man an — mit vier runden Plättchen die entsprechende Kugel vergolden. Wenn man nun auch annohm, der Kreis verhalte sich zu dem Kreisring wie 1 : 4, so lag nichts näher als den Ausdruck inauratura = das Vierfache, darauf zu übertragen."

Ich glaubte zur Aufklärung der merkwürdigen Anwendung obigen Wortes in so verschiedenartiger Bedeutung diese Auseinandersetzungen hinzufügen zu sollen.

Thorn, 7. September 1895.

Man verbessere gütigst in den beiden vorhergehenden Abhandlungen folgende Druckfehler:

Seite		Zeile		
Seite	47	Zeile	9	tilge *dem*.
„	61	„	4	lies *cariofoliis*.
„	69	„	3	„ *solidos*.
„	89	„	13	„ beidemale *BE*.
„	91	„	8	tilge das Komma hinter *steterit*.
„	93	„	6	lies *DAE*.

EINE

AUTOBIOGRAPHIE VON GOTTHOLD EISENSTEIN.

MIT ERGÄNZENDEN BIOGRAPHISCHEN NOTIZEN

HERAUSGEGEBEN

VON

F. RUDIO.

Bei Gelegenheit der Herausgabe der Briefe Eisensteins an Stern, welche ich in Gemeinschaft mit meinem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Hurwitz, übernommen hatte[1]), empfand ich es als ein Bedürfnis, die Situationen, denen jene Briefe entsprungen waren, durch eine kurze Darstellung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins zu erläutern. Es schien mir dies um so wünschenswerter, als merkwürdigerweise über den allerdings nur allzu kurzen Lebenslauf des grossen Mathematikers, der plötzlich wie ein hellstrahlendes Meteor auftauchte, um eben so rasch wieder zu verschwinden, nur äusserst wenig — und das Wenige noch vielfach entstellt — in die Oeffentlichkeit gedrungen ist.

Den Ausgangspunkt meiner Nachforschungen boten mir die verschiedenen Legenden, welche sich an den Eintritt Eisensteins in das akademische Leben geknüpft haben. Nach der einen Version soll Eisenstein die Universität ohne Maturitätszeugnis bezogen haben; nach einer andern soll er zwar durch ein Maturitätsexamen hindurchgegangen sein, dabei aber in allen Fächern, mit Ausnahme der Mathematik, eine so unglaubliche Unwissenheit an den Tag gelegt haben, dass die Prüfungsbehörde, namentlich auch im Hinblick auf das angeblich wenig befriedigende sittliche Verhalten des Examinanden, die Abweisung desselben zu beschliessen im Begriffe war. Da habe sich im letzten Momente noch Schellbach erhoben und erklärt, man dürfe sich der Lächerlichkeit nicht aussetzen, einem jungen Manne heute das Reifezeugnis zu verweigern, den vielleicht morgen schon die Berliner Akademie zu ihrem Mitgliede ernennen würde. Daraufhin habe Eisenstein das Zeugnis der Reife erhalten.

Nachdem ich durch die gefälligen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch in Erfahrung gebracht hatte, dass Eisenstein auf Grund eines Reifezeugnisses vom Friedrich-Wilhelms-Gymnasium an der Berliner Universität immatrikuliert worden war, wandte ich mich an meinen hochverehrten ehemaligen Lehrer, Herrn Stadtschulrat E. Fürstenau in Berlin, der sich mit dankenswertester Bereitwilligkeit der weiteren Nachforschungen annahm. Dieselben ergaben bald eine unerwartet reichhaltige Ausbeute. Am 21. Jan. d. J. schrieb mir Herr Fürstenau: „Der Direktor des hiesigen Friedrich-Wilhelms-

---

1) Siehe pag. 171 dieses Heftes.

Gymnasiums, Herr Nötel, hat mir auf meine Anfrage mitgeteilt, dass Eisenstein an dieser Anstalt am 22. September 1843 die Reifeprüfung als Extraneer bestanden hat. Direktor Nötels Mitteilung lautet weiter:

> „Schellbach schreibt unter die mathematische Arbeit bloss „sehr gut" und im Zeugnis: „In der Mathematik reichen seine Kenntnisse weit über den Umfang des Gymnasialunterrichtes hinaus. Sein Talent und sein Eifer berechtigen zu der Erwartung, dass er einst wesentlich zur Ausbildung und Erweiterung der Wissenschaft beitragen werde." Auch sonst lautet das Zeugnis durchweg anerkennend und mindestens befriedigend. Von seiner umfangreichen Vita lasse ich Ihnen zur beliebigen Benutzung eine Abschrift anfertigen, die Sie baldigst erhalten sollen."

Soweit der Brief des Herrn Direktor Nötel, der auch für mich sehr interessant gewesen ist, weil er eine ganze Anzahl Legenden, die auch von Eisensteins Bekannten geglaubt und weiter verbreitet worden sind, vollständig vernichtet. Sobald ich die in Aussicht gestellte Abschrift der Vita erhalten habe, schicke ich sie Ihnen. Ich darf wohl annehmen, dass dies Schriftstück noch weit interessanter ist, als die obigen Nachrichten, da es doch unzweifelhaft eine Darlegung des eigenen Bildungsganges enthalten wird."

Die mir bald darauf von Herrn Fürstenau gütigst zugestellte Vita Eisensteins schien mir in der That trotz mancher jugendlicher Weitschweifigkeiten so viel des Interessanten zu bieten, dass ich mich, im Einverständnis mit Herrn Hurwitz, entschloss, dieselbe, losgelöst von den oben erwähnten Briefen, zum Mittelpunkte einer besonderen Publikation zu machen. Bevor ich sie aber jetzt in extenso folgen lasse, um dann später noch weitere Ausführungen daran zu knüpfen, ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Stadtschulrat Fürstenau und Herrn Direktor Nötel meinen verbindlichsten Dank dafür auszusprechen, dass sie mich in die Lage versetzt haben, ein Schriftstück mitzuteilen, welches von den zahlreichen Bewunderern des Genius Eisensteins gewiss mit Freude begrüsst werden wird.

Curriculum Vitae des Gotth. Ferdinand Eisenstein.

Indem ich einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission hiermit die Schilderung meines Lebenslaufes vorlege, erlaube ich mir zuerst einige Worte über die Tendenz dieser Arbeit vorauszuschicken.

Eine Uebersicht des eigenen Lebens soll nicht allein die äusserlichen Schicksale und Ereignisse, die einen betroffen haben, die Verhältnisse, in

denen man sich befunden hat, überhaupt alles sämmtlich Erlebte und Erfahrene von der Geburt an bis auf den heutigen Tag zusammenstellen, sie muss auch den ganzen Verlauf der geistigen Ausbildung verfolgen, sie muss zeigen, wie man nach und nach durch Irrtümer und Fehler hindurch Verstand und Herz zu dem Standpunkte herangebildet hat, von dem aus man auf sein vergangenes Leben zurückblickt. Das Erstere ist gleichsam nur die Form, zu welcher das Letztere erst den wahren Inhalt liefert. Die Aufgabe, bloss die historischen Facta seines Lebens neben einander zu stellen, ist, indem dazu nur ein gutes Gedächtnis gehört, allerdings weit leichter, als die andere, sich aus seinem jetzigen geistigen Standpunkte heraus auf die verschiedenen Stufen seiner Entwickelung zurückzuversetzen und für einen Augenblick so zu denken und zu fühlen, wie man in seiner Kindheit gedacht und empfunden hat. Doch will ich, um diese Arbeit ihrer Bestimmung und meinem jetzigen Zwecke gemäss einzurichten, nämlich den Grad meiner sittlichen und Verstandesreife an den Tag zu legen, das Schwierige des Unternehmens nicht scheuen und also mit der Beschreibung meines äusseren Lebens, soweit es in meinen Kräften steht, eine Geschichte meiner inneren Entwickelung zu verbinden versuchen.

Ehe ich mich jedoch in die Vergangenheit zurückversetze, werde ich erst noch einen Blick auf die Gegenwart werfen.

Ein passender Zeitpunkt ist mir für die Anfertigung dieser Arbeit geworden; ein würdiger Ruhepunkt ist mir gegeben, um von demselben aus der Gegenwart in mein verflossenes Dasein zurückzublicken. — Ich stehe gerade im zwanzigsten Jahre. Eine wichtige und bedeutungsvolle Zahl im menschlichen Leben. Mit dem zwanzigsten Jahre tritt man in eine ganz neue Epoche des Lebens ein; man geht vom Knaben- zum Mannesalter über, aus einer Zeit der Ausbildung und Abhängigkeit in eine Zeit der Reife und Selbstständigkeit; bis dahin war man noch ein halbes Kind, andere Menschen, Eltern, Freunde, Lehrer, sorgten für einen, man wurde von anderen geleitet, nur auf einen kleinen Wirkungskreis war man beschränkt. Jetzt hat man das Alter erreicht, um ins grosse Leben einzutreten, man wird auf seine eigene Kraft hingewiesen, man soll jetzt das selbst für sich thun, was bisher Andere für einen gethan haben; bisher war man noch in steter Entwickelung, jetzt soll sich der Charakter und die Gesinnung festgesetzt haben, die einen nun für das ganze Leben begleiten werden. Im zwanzigsten Jahre kann man schon genau den Pfad erkennen, den der Mensch einschlagen wird, man sieht schon deutlicher, zu welchen Erwartungen und Hoffnungen man berechtigt ist. Der Mensch, der bisher ein Gegenstand der Nachsicht gewesen ist, dem man leicht einen Fehltritt als eine Uebereilung der Jugend verzieh, wird nun ein Vorwurf des strengen

Urteils, der jeden Schritt, welchen er thut, selbstständig verantworten und vertreten muss. Wenn man bisher noch über die künftige Bestimmung in Zweifel war, so muss man jetzt mit sich vollkommen im Reinen sein, welchem Berufe man sich für die Zukunft zu widmen gedenkt; man muss sich fürs ganze folgende Leben den Weg vorgezeichnet haben, den man mit Gottes Hülfe zu vollenden beabsichtigt. Was man bisher gelernt und erfahren hat, waren allgemeine Vorbereitungen, die die Grundlagen für jede specielle Richtung bilden sollen; nun muss man seinen ganzen Fleiss und Eifer auf Erlangung derjenigen Kenntnisse und Hülfsmittel wenden, welche für das besondere Fach, das man sich erwählt hat, notwendig werden. — Von hoher Bedeutung ist also dieses Jahr, welches gleichsam die Eingangspforte bildet, durch welche wir wie aus einer Vorschule in das ganze folgende Leben der Wirksamkeit und des Schaffens hinübertreten. Und besonders für mich ist dieser Zeitpunkt in hohem Grade wichtig, der ich, von feuriger Liebe zu einer speciellen Wissenschaft begeistert, nun den Pfad vor mir erblicke, auf den ich ihr ganz folgen, ihr mein ganzes Leben weihen darf. Während ich bisher mit Recht von Eltern und Lehrern dazu angehalten wurde, mich in allen Zweigen des Wissens zu fördern, und ich so fortwährend, wie stark es mich auch anzog, mit dieser vorherrschenden Neigung im Kampfe liegen musste, so soll mir jetzt die teure Freundin zur Begleiterin durch's Leben gegeben werden, ich werde, wenn mir mein jetziges Vorhaben nicht misslingt, nicht mehr genötigt sein, meine Kraft zu zersplittern, sondern werde dieselbe ganz auf dies eine Ziel wenden können, auf das mich mein innerer Beruf hinweist.

So will ich denn hier mit meinem vergangenen Leben gewissermassen abschliessen, um dann mit ruhigem Blicke, mit frischem Mute und Gottvertrauen in die Zukunft schauen zu können.

Das Licht der Welt erblickte ich am 16. April des Jahres 1823 in Berlin. Meine Eltern hatten sich im Juni des vorhergehenden Jahres verheiratet, und so war ich der erste Sohn ihrer Ehe; ich bekam später noch fünf Geschwister, drei Brüder und zwei Schwestern; diese Geliebten hat mir aber alle nacheinander der unerbittliche Tod geraubt, so dass ich jetzt von sechs Kindern meiner Eltern der einzig am Leben Gebliebene bin. Die heilige Taufe erhielt ich von dem Garnisonsprediger Ziehe, derselbe, der meine Eltern getraut hatte; so wurde ich in den Bund der evangelischen Christen aufgenommen.

Die erste Periode meines Lebens kann ich bis zum elften Jahre rechnen, weil ich in diesem zum erstenmale das elterliche Haus auf längere Zeit

verliess und nach dem zwei Meilen entfernten Dalldorf in Pension gegeben wurde. Aus dieser ersten Jugendzeit erinnere ich mich mit Dankbarkeit und Rührung der innigen und wahren Zärtlichkeit meiner Eltern gegen ihren Erstgeborenen, und ich hing auch meinerseits mit der herzlichsten Liebe an Vater und Mutter, besonders an der Mutter, von der auf Augenblicke getrennt zu sein, mich schon Thränen kostete. Ich fand wenig Geschmack an dem Umgang mit andern Knaben desselben Alters; ich lebte viel mit mir und in mir selbst und so konzentrierte sich mein höchstes Glück und Wohlsein im Schosse der Familie. Von der lauten und fröhlichen Lust der Gleichaltrigen zog ich mich durchaus zurück, ich konnte mich auch selten mit einem derselben gut stellen. Ich war sehr verschlossen und zurückhaltend, ja beinahe ängstlich; aber wenn ich einmal einem Freunde mein jugendliches Herz aufschloss, so blieb es auch mit ganzer Liebe an demselben hängen. Ich hielt mich lieber zu den Mädchen oder zu erwachsenen, besonders ernstern Leuten, und das grösste Vergnügen war für mich, der Rede eines geistreichen Mannes lauschen zu dürfen. Während andere Knaben spielten, sass ich zu Hause und horchte den Gesprächen der Erwachsenen oder liess mich von der Mutter unterhalten und belehren. Die Mutter gab mir eigentlich meine erste Erziehung, denn der Vater wurde durch sein Geschäft in Anspruch genommen und konnte sich daher nur wenig um mich bekümmern; von der Mutter habe ich meine ersten Begriffe, die ersten Anfangsgründe meiner Kenntnisse. Ich erinnere mich noch, wie sie, um mir die Zeichen der Buchstaben einzuprägen, jedes auf eine sinnbildliche Weise auslegte, ein 𝔒 war ein Thorweg, und so jeder Buchstabe nach seiner Form, 𝔎 (K) war ein Schlüssel u. s. w.

Ich war in meiner Jugend äusserst kränklich und schwach, daher auch sehr reizbar. Eine schwere Krankheit, die Gehirnentzündung, welche fast alle meine Geschwister hingerafft hat, bedrohte auch mein Leben. Ich wurde zwar wieder hergestellt; aber die üblen Folgen blieben zurück und sie scheinen mich auch jetzt noch nicht ganz verlassen zu haben. Wahrscheinlich sind sie die Ursache einer, von Zeit zu Zeit wiederkehrenden, mich nun schon seit zwei Jahren verfolgenden hypochondrischen Stimmung, die ich nicht zu überwinden vermag.

Meine Mutter bewohnte oft mit mir in der warmen Jahreszeit eine Sommerwohnung in einem freieren Teile der Stadt oder vor dem Thore, während der Vater in der Stadt das Geschäft versah. So lernte ich frühzeitig das Angenehme des Lebens in der freien Natur kennen, obwohl mir auch dieser Genuss, wie viele, durch meine Kränklichkeit und Reizbarkeit verbittert wurde; dieselbe wurde auch Ursache vieler Unarten, mit denen die Mutter hart zu kämpfen hatte; denn so sehr diese mich auch liebte, so

zeigte sich ihre wahre Zärtlichkeit erst darin, dass sie mich keineswegs verzog und mir durchaus nichts nachsah.

Durch meinen Krankheitszustand geschah es auch leider, dass ich hinter vielen zurückblieb, denen ich in der That geistig überlegen war. Besonders wurde es mir schwer, alles das zu begreifen, was Sitte und Uebereinkunft festgesetzt haben, den sogenannten Anstand des äusseren Lebens. Ich konnte eher als sechsjähriger Knabe den Beweis eines mathematischen Satzes verstehen, als dass man in der Stube die Mütze von dem Kopf nehmen oder dass man das Fleisch nicht mit der Gabel zerreissen, sondern mit dem Messer zerschneiden müsse. Indem ich von allen Dingen erst den Grund wissen wollte, machte ich durch meine Widersetzlichkeit meinen Eltern vielen Kummer. Ueberall, wo es auf eine Operation des Verstandes, auf ein Ergrübeln ankam, da war ich auf dem Platze, aber hartnäckig und eigensinnig stand ich da, sobald es hiess: Das ist so, das muss und soll so geschehen. Natürlich blieb ich bei dieser Sinnesart in allem dem, was praktisch ausgeübt, nicht theoretisch begriffen sein will, in allen diesen kleinen Fertigkeiten und sich stets wiederholenden täglichen Geschäften, in denen andere Kinder so schnelle Fortschritte machen, immer auf derselben Stufe stehen. Diese Lücke hat mir später manche Verlegenheit und Unannehmlichkeiten zugezogen, und ich musste nachher viel Kraft aufwenden, um das Versäumte nachzuholen, während ich es früher mit grosser Leichtigkeit hätte erwerben können. Ueberhaupt sind die übel daran, welche es in den Verrichtungen, die wir mit dem Tier gemein haben, nicht zu einer Geschicklichkeit bereits in der Jugend gebracht haben, sie werden überall anstossen, da es mit gereiftem Verstande später sehr drückend ist, sich noch mit diesen geringfügigen, aber doch unumgänglich nötigen Dingen zu befassen, wenn sie einem nicht von früher her zur Gewohnheit geworden sind.

Unter den verschiedenen Bekannten meiner Eltern, die in unserem Hause aus- und eingingen, erwähne ich nur einen, der vielen bedeutenden Männern noch aus der Erinnerung bekannt sein wird. Er ruht schon längst im Grabe, aber er hat zuerst meine schlummernde Neigung für die Mathematik erkannt und geweckt. Diese hatte sich bisher nur an den Tag gelegt durch eine grosse Lust, Alles zu zerstören, um auszufinden, was im Innern verborgen wäre, oder im Durchkriechen von allerlei verborgenen Räumen und Gängen, um zu sehen, wo man zuletzt hinkäme. Lautz war der Name dessen, der mich zuerst mit den Zahlen bekannt und vertraut machte, und obgleich sich diese Eindrücke wegen der zu grossen Jugend bald verwischten, so bin ich ihm doch eine dankbare Erinnerung schuldig. Er hatte unter Pestalozzi studiert und brachte dessen Ideen in unsere Familie.

Leider gehörte er zu denen, welche anders sind, als andere Menschen; ob er ein Genie gewesen ist, weiss ich nicht, ein grossartiger Kopf war er gewiss; aber er wusste sich nicht in Verhältnisse zu fügen, er war kein Freund regelmässiger Thätigkeit, und verstand es nicht, seinen Willen einem fremden unterzuordnen. Eine herrliche Anstellung als einer der ersten Lehrer an der Cauerschen Anstalt in Charlottenburg, deren Gründer er zum Teil war, gab er auf und starb im Elend. Er wurde mir von den Eltern als ein warnendes Beispiel vorgehalten, man prägte mir dasselbe um so mehr ein, als man bei mir Anlage zu einer ähnlichen Richtung zu bemerken glaubte.

Von meinem sechsten Jahre an besuchte ich die Bartelsche Schule in der Scharrenstrasse, welche noch existiert. Hier wurde der Grund zu meiner ersten wissenschaftlichen Bildung gelegt. In den untern Klassen erhielt ich meine Elementarbildung. Aus dieser Zeit entsinne ich mich noch, wie viel Qual mir das Schreiben, und im Rechnen die langen Multiplikationsexempel machten. Hieraus würde man nun mit Unrecht schliessen, dass es schlecht mit meinen mathematischen Fähigkeiten gestanden habe, wenn ich am Rechnen keine Neigung fand; denn nur das Mechanische, sich stets Wiederholende der Operation verdross mich, so wie mich noch jetzt verwickelte Rechnungen ohne weiteren Zweck anwidern, während ich keinen Fleiss scheute, wenn es etwas Neues gab, worin ich Geist, Idee bemerkte.

Mit grosser Leichtigkeit begriff ich die Formen der Grammatik und der Sprache, wie Alles, was sich auf logische Art fassen liess.

In den oberen Klassen lernte ich nun schon Geschichte und besonders Lateinisch, worin ich ziemliche Fortschritte machte. Neben andern Dingen wurden auch einige Hauptsachen aus der Physik vorgetragen. In dieser Zeit trat bei dem Knaben durchaus noch keine vorherrschende Neigung hervor; es fehlte der anregende Anstoss von aussen; sobald dieser gegeben ward, so musste sie sich in aller Kraft entwickeln, wie sich nachher zeigen wird.

Um meine Gesundheit zu stärken, gaben mich meine Eltern zu dem Prediger Horn nach Dalldorf in Pension, wo ich, von geistiger Anstrengung frei, ganz dem Genusse der Landluft leben sollte.

Höchst schmerzlich war mir diese erste Trennung von meiner Familie, und meine Sehnsucht nach den Eltern war fast unerträglich; ich konnte oft Stunden lang in Thränen zerfliessen. Ich schrieb die zärtlichsten Briefe an meine Teuren, in denen ich sie mit allerlei Liebesnamen benannte. Aus dieser Weichheit meiner damaligen Stimmung entstand eine gewisse poetische Richtung. Ich machte mehrere Gedichtchen, in denen sich die kindliche Liebe zu den Eltern aussprach. Diese Richtung ging später auf

andere Stoffe über, und ich habe seitdem immer so ab und zu, wenn mich meine Stimmung dazu anregte, ein Verschen niedergeschrieben. Ich nehme mir die Freiheit, am Schlusse dieser Arbeit eine Probe aus der neueren Zeit beizufügen, von deren poetischem Unwert ich übrigens vollkommen überzeugt bin.

Ich bekam damals einige Neigung zu landwirtschaftlichen Beschäftigungen. Ein Stückchen Land, welches mir gegeben wurde, grub ich selbst um, bepflanzte und besäe'e es und freute mich, wenn die Blumen so schön blühten und wuchsen.

Meine geistige Ausbildung wurde in dieser Pension, in der ich ein halbes Jahr blieb, nicht sehr gefördert, im Gegenteil vergass ich vieles, was ich auf der Schule bereits gefasst hatte, besonders im Lateinischen. Doch erhielt ich hier meinen ersten Unterricht auf dem Fortepiano durch den Küster des Dorfes Herrn Bergemann, zu dem ich viel Liebe fasste. Im Zeichnen leistete ich damals recht Gutes. Dieses letztere Talent hat mich jetzt gänzlich verlassen; ich habe es später nie wieder geübt, und wenn ich jetzt die Zeichnungen aus jener Zeit betrachte, so muss ich gestehen, dass ich nicht halb so Gutes leisten könnte. Die Musik jedoch habe ich bis auf den heutigen Tag mit vielem Eifer und Lust getrieben, und glaube es bereits zu einiger Fertigkeit auf dem Fortepiano gebracht zu haben. Auch zum Komponieren hatte ich nicht wenig Neigung; einige meiner Kompositionen gefielen wenigstens denen recht gut, welchen ich sie vorspielte. Es ist immer gut, neben seiner Berufsthätigkeit noch ein solches zweites Talent auszubilden, das einem gleichsam den Eintritt in die Gesellschaft eröffnet. Man kann die Leute am Ende nicht mit mathematischen Sätzen unterhalten, aber eine hübsche Sonate oder Ouverture hört Jeder gern. Bei meinem Aufenthalte in Liverpool und Dublin, wo man in solchen Dingen noch hinter dem Kontinent zurück ist, hielt man mich fast für einen Virtuosen, während ich hier doch nur für einen höchst mittelmässigen Spieler gelten kann.

Ich verliess diese Pension, um in die Cauersche Anstalt in Charlottenburg einzutreten, die, nach dem Tode Cauer's eingegangen, sich damals unter dem Schutze des Staates auf's Neue bildete. Ich war einer der Ersten, die in die auf diese Weise ganz neu entstehende Anstalt eintraten, die jetzt von dem Direktor Herrn von der Lage geleitet wird. Die Art, auf welche ich hier behandelt wurde, sagte mir auf keine Weise zu. Es herrschte in diesem Institute eine fast militärische Disciplin, die mir, der ich bisher immer unter der Sorgfalt einer liebenden Hand gestanden hatte, am allerwenigsten zusagte. Ich war bis jetzt sehr viel mir selbst überlassen gewesen und hatte das Meiste nach Bequemlichkeit und Laune ge-

than. Hier ging Alles nach einer strengen unumstösslichen Ordnung. Auf Kommandowort musste man aufstehen, zu Bette gehen, arbeiten, spielen. Unter beständiger Aufsicht des Lehrers konnten wir auch nicht das Geringste nach eigenem Belieben thun. Unter dieser ungewohnten strengen Zucht verlebte ich sehr traurige einförmige Tage. Doch habe ich dieser Anstalt viel Gutes zu verdanken. Vor allen war es hier, wo mein mathematisches Talent zuerst ins Licht gezogen wurde; hier genoss ich den ersten systematischen Unterricht in der Mathematik. Die Methode, welche der Direktor bei diesem anwandte, bestand darin, dass jeder Schüler selbst die Beweise der einzelnen Sätze nach der Reihe auffinden musste. Ein Vortrag fand durchaus nicht statt; keiner durfte seinen Beweis dem Nachbar mitteilen, und Jeder erhielt den folgenden Satz unabhängig von den Uebrigen, sobald er den vorhergehenden richtig bewiesen und gründlich erfasst hatte. Hier begann für mich eine ganz neue Thätigkeit, ein ganz neues Leben; mit ungeheurem Eifer und einem wahren Durste ergriff ich das Gegebene; schon bei den ersten Sätzen war ich schnell den Anderen vorausgeeilt, und ich bewies bereits den hundertsten Satz, während sich meine Mitschüler noch beim elften oder zwölften abmühten. Nur ein junger Mann, der jetzt auf der Universität Medicin studiert, konnte mir nacheifern. — Die Methode war sehr gut, denn zuerst wurde durch das Selbstdenken die Kombinationskraft des Verstandes gestärkt, und dann wurde auch durch das gemeinsame Streben ein allgemeiner Wetteifer unter den Lernenden angeregt. Doch allgemein dürfte diese Methode wohl nicht anzuwenden sein. Denn wie sehr ich auch das alles anerkenne, was zu ihrem Vorteile gesagt werden kann, so muss man doch gestehen, dass sie die Kraft zu sehr vereinzelt und dass sie keine Uebersicht des Ganzen gewährt, welche nur durch einen guten Vortrag erreicht werden kann. Jetzt, wo sich durch die mannigfaltigen und herrlichen neueren Entdeckungen ein so gewaltiger Reichtum des Stoffes gehäuft hat, ist man durchaus genötigt, in der Masse zu arbeiten, wenn man aus dieser unendlichen Fülle nur einigermassen das Hauptsächlichste und Wichtigste aufnehmen und sich zu eigen machen will. Das grösste mathematische Genie kann am Ende nicht allein alles das auffinden, was erst durch das Zusammenwirken vieler ausgezeichneter Köpfe entstanden und aus ihrem gemeinsamen Schaffen hervorgegangen ist. Diese Methode des Selbstauffindens ist für Schüler nur dann anwendbar, wenn es sich um die Auffassung eines kleinen Gebietes leichter, besonders geometrischer Sätze handelt, wo am Ende alles derselben Behandlungsweise unterworfen wird und keine neuen und scharfsinnigen Ideen erfordert werden. — Daher kam es auch, dass der Kreis meiner mathematischen Kenntnisse, so gründlich und sicher ich auch das einmal



Verarbeitete gefasst hatte, doch in quantitativer Hinsicht, als ich die Anstalt verliess, sehr klein war, und dass ich sogar in der ersten Zeit auf dem Gymnasium hinter meinen Mitschülern zurückstehen musste. — Wenn ich nun jetzt den grossen Umfang des Gebietes überschaue, das ich beherrsche, so scheint es mir fast ein Wunder zu sein, wie ich dies alles in den wenigen 5—6 Jahren ohne allen Unterricht erreichen konnte. Aber als ich nur einigermassen die nötigen Hülfsmittel erlangen konnte, warf ich mich mit einem solchen Eifer und mit einem solchen eisernen Fleisse auf das Studium, dass es wohl nicht anders kommen konnte. Denn ich lebte ganz in dieser Wissenschaft, und wenn ich Tage und halbe Nächte angestrengt bei meinem mathematischen Buche, oder einer Ausarbeitung, oder einer eigenen Idee sass, so war mir dies keineswegs eine Anstrengung, sondern die grösste Wohlthat und ich schätzte mich glücklich, wenn man mich nur nicht von aussen her störte oder daran hinderte. Wenn ich mich dann zur Ruhe legte, so schlief ich mit dem freudigen Gedanken ein, am folgenden Tage die Arbeit wieder fortsetzen zu können, und der früheste Morgen fand mich schon wieder am Pulte.

Ich kehre zu meiner Pension zurück, um die Fortschritte anzugeben, die ich ungefähr dort in den übrigen Zweigen des Wissens gemacht habe. Im Lateinischen waren mir die Hauptsachen aus der Grammatik schon bekannt; ich las hier den Cornelius Nepos und Julius Caesar; wir verfertigten Exercitien und Extemporalien. In der Geschichte erhielt ich eine allgemeine Uebersicht der Griechen- und Römerzeit. Griechisch wurde gar nicht getrieben; ich studierte für mich selbst in der letzten Zeit meines Dortseins die Buttmannsche Grammatik und brachte es bis zu den unregelmässigen Zeitwörtern. Es war mein Wunsch, sobald ich wieder nach Berlin käme, gleich in die Obertertia eines Gymnasii eintreten zu können. Xenophons Anabasis zu lesen gestattete man mir nicht, sondern nahm mir die Bücher fort.

Der Unterricht wurde in verschiedenen Klassen erteilt, die den unteren Klassen eines Gymnasii bis etwa Untertertia entsprachen. Ich habe sie alle durchgemacht, und meine Eltern nahmen mich nicht eher aus der Anstalt fort, als bis ich dort nichts mehr lernen konnte.

Das Leben der Pensionäre war, wie schon gesagt, ein höchst einförmiges und streng abgemessenes. Wir schliefen alle zusammen in einem grossen Saale unter Aufsicht eines Lehrers. Auf seinen Ruf erhoben wir uns um $5\frac{1}{2}$ Uhr des Morgens, wuschen uns und zogen uns an, um uns sodann zum gemeinschaftlichen Frühstück hinunter zu begeben, das aus Milch und Semmel bestand. Der sehr geräumige Schlafsaal wurde selbst bei der strengsten Kälte nicht geheizt, und so kam es denn oft im Winter, dass

ich, wenn es recht hart gefroren hatte, aus dem steinernen Wasserkruge mit dem Stiefelknechte das Eis loshauen musste, um den Neptun aus seiner krystallenen Behausung hervorzulocken. — Nach genossenem Frühstück fertigten wir die aufgegebenen Arbeiten; um 8 Uhr begannen die Lektionen und dauerten bis 4 Uhr Nachmittags mit einer Unterbrechung von zwei Stunden für eine kleine Erholung und das Mittagsbrot, an dem in einem grossen Saale Lehrer und Schüler auf gleiche Weise Teil nahmen. Bis 6 Uhr war wieder Arbeitsstunde; den Abend hatten wir frei und konnten uns nach Belieben unter Aufsicht des Lehrers beschäftigen. Wenn sich hier ein Lehrer nicht das nötige Ansehen zu geben wusste, so brach der jugendliche Uebermut um so stärker hervor, je strenger er die übrige Zeit in Fesseln erhalten wurde. — Der Direktor war so gütig, mich in den Winterabenden das Schachspiel zu lehren, welches mir viel Vergnügen gewährte.

Uebrigens waren wir fast immer in den Zimmern oder auf dem Hofe eingeschlossen und bekamen die Stadt kaum zu sehen.

Mein Gesundheitszustand war während dieser Zeit ein sehr trauriger, wahrscheinlich zum Teil eine Folge der ungewohnten Strenge, die vielleicht für andere junge Leute recht vorteilhaft sein mag, aber auf meine Persönlichkeit gerade die entgegengesetzte Wirkung hervorbrachte. Nicht allein, dass ich fortwährend an einer trüben Stimmung litt und nie recht munter sein konnte, ich war auch von Zeit zu Zeit recht ernstlich und oft gefährlich krank und musste mit Fieber und Kopfentzündungen kämpfen. Da ich fast immer unwohl war, so glaubte man zuletzt, dass ich mich nur verstelle, und so hatte ich neben meinen Schmerzen auch noch bittere Kränkungen zu ertragen, denn der Gesunde und Starke schaut auf den Kränklichen und Schwachen gewöhnlich mit Verachtung, und so macht es besonders die Jugend. Ich musste schon früh erfahren, was Leiden heisst, und die bittere Frucht des Lebens kennen lernen; meine sehr reizbare Gemütsstimmung liess mich alles doppelt empfinden, was Andere kaum berührte. Doch murre ich hierüber nicht, und aus derselben liebenden Hand des Schöpfers, die mir Anlagen und Liebe zur Wissenschaft schenkte, empfange ich auch die mir beschiedenen Leiden mit Ergebung.

Im September des Jahres 1837 verliess ich endlich die Cauersche Anstalt und kehrte nach langer Trennung in den Kreis meiner Familie zurück, die damals aus meinen Eltern, mir und einer kleinen Schwester von sechs Jahren bestand, an der ich mit grosser Zärtlichkeit hing, die mir aber nach dem Willen Gottes bald darauf durch den Tod entrissen wurde.

Von dieser Zeit an habe ich bis zum Juli des verflossenen Jahres 1842 die Gymnasien der Hauptstadt besucht und zwar das Friedrich-Wilhelmsche

des Herrn Direktor Spilleke ruhmwürdigen Andenkens, auf dem ich Obertertia und die beiden Sekunda durchmachte, und dann bei dem Herrn Direktor Bonnell die Prima des Werderschen Gymnasii. Diese neue Periode meines Lebens war wieder ziemlich gleichförmig; ich ging alle Tage nach dem Gymnasium, kam nach Hause, machte meine Schularbeiten und verwendete dann die ganze mir übrige Zeit auf meine mathematischen Beschäftigungen.

Meine Neigung zur Mathematik wurde jetzt so vorherrschend, dass ich oft darüber das Andere vernachlässigte, und meine Fortschritte in den übrigen Lehrgegenständen keineswegs glänzend genannt werden konnten. Wenn nun auch deshalb meine Lehrer nicht so überaus mit mir zufrieden sein konnten, so leistete ich doch so ziemlich das Aufgegebene und kam in der gehörigen Zeit durch die Klassen.

Ich hatte mich schon damals fest entschlossen, mich dem Studium der Mathematik zu widmen, und ohne erst zu fragen, welche Laufbahn mir auf diesem Wege offen stände, folgte ich hierin nur meiner Neigung und einer inneren Stimme. — Darin bin ich in der That glücklicher, als viele junge Leute in meiner Lage, dass mir die Natur selbst eine so bestimmte Richtung für's ganze Leben vorgezeichnet hat, von der ich nicht abweichen kann und auf die ich nach Abschweifungen in andere Gebiete immer wieder durch eine innere Gewalt zurückgeführt werde. Traurig scheint es mir, wenn Jünglinge, die studieren wollen, von einem zum andern schwanken, bald dieses bald jenes ergreifen und wieder fallen lassen, und oft im letzten Semester ihres Besuches von Prima nicht wissen, was sie nun eigentlich studieren sollen. Wie viele studieren auch blos aus falscher Eitelkeit, weil sie sich schämen, ein Handwerk zu ergreifen oder sich irgend einem anderen Berufe zu widmen, während doch am Ende jede Stellung dem Manne zur Ehre gereicht, der in ihr mit Lust und Liebe seine Pflicht erfüllt. Wer nicht in sich den Beruf und wahre Liebe zur Wissenschaft verspürt, der mag nicht studieren; wenn er sich auch noch so viele positive Kenntnisse vielleicht mühselig zusammenrafft, immer bleibt er ein dürftiger Nachbeter, ein Ungeweihter, und nie wird er sich zur Selbständigkeit erheben und mit schöpferischer Kraft der Begeisterung die Grenzen der Wissenschaft hinausrücken.

Es würde zu weitläufig sein, wenn ich mich genau über den Weg aussprechen wollte, den ich bei meinen mathematischen Bemühungen gegangen bin. Nur im Allgemeinen Folgendes. — Was mich an der Mathematik so gewaltig und ausschliessend anzog, war, neben dem Inhalte selbst, besonders die eigentümliche Art der Denkthätigkeit, mit welcher die mathematischen Dinge behandelt werden. Diese Art des Schliessens und Auf-

findens neuer Wahrheiten aus den alten, sowie die ausserordentliche Klarheit und Evidenz der Sätze, und das Geistreiche der Ideen, welcher ganze Theorien zu Grunde liegen, hatte einen unwiderstehlichen Reiz für mich. Keine andere Wissenschaft schien eine so reiche Ernte und einen so unerschöpflichen Stoff zur Ausübung dieser Geistesthätigkeit darzubieten. Kant zeigt ganz deutlich in seiner Kritik, dass dieses Feld das einzige ist, auf dem der menschliche Geist sich ohne alle Schranke ergehen und ohne Aufhören a priori die glänzendsten Entdeckungen machen kann; in der That ohne Aufhören, da jede neue Konstruktion, von einem genialen Geiste geleitet, neue Resultate hervorbringen muss. Ich gewöhnte mich bald daran, von den einzelnen Sätzen ab schärfer in den Zusammenhang zu dringen und ganze Theorien als eine Einheit aufzufassen. So ging mir die Idee des mathematisch Schönen auf. Es giebt ein solches mathematisch Schöne, ebenso wie ein aesthetisch Schönes, welches man aber nur dann erst begreift, wenn man voll Begeisterung ein ganzes System von Entwickelungen, welche sich an eine Hauptidee schliessen und durch ihre Gemeinschaft zu einem Endresultate führen, in ihrer Verkettung, Harmonie, und Genialität als ein organisches Ganze wie ein Gemälde im Geiste überschaut. Es giebt auch einen mathematischen Takt oder Geschmack, der der Untersuchung gleich von vorn herein ansieht, ob sie zu einem Resultate führen werde oder nicht, und die Betrachtungen und Entwickelungen demgemäss leitet.

Nachdem ich mir durch eigenes Studium (denn einen Privatlehrer hatte ich nie) die Elementarkenntnisse erworben hatte, ging ich zur höheren Mathematik über und studierte ausser andern Büchern über diese Gegenstände besonders die herrlichen Werke von Euler und Lagrange über die Differential- und Integralrechnung. Da ich es mir zum Gesetz machte, jede neue Theorie, sobald ich sie verstanden hatte, gleich schriftlich auszuarbeiten, so prägten sich mir die Dinge weit tiefer ein, und ich beherrschte sie vollkommen, wozu noch kam, dass ich jede Sache auf mannigfaltige Arten kennen zu lernen suchte. Oft spazierte ich im Garten oder Zimmer auf und ab und demonstrierte mir, gleichsam mich selbst unterrichtend, ganze Reihen von Sätzen vor, deren Beweise mir klar waren. Ich kann diese Methode als sehr praktisch empfehlen. Das Docieren war überhaupt meine Neigung und ich hätte dieselbe gern an meinen Mitschülern befriedigt, wenn diese nicht meiner Begeisterung mit einer wahren Eiseskälte entgegengetreten wären, und wenn ich nicht hätte mit Betrübnis bemerken müssen, wie wenig Interesse die jungen Leute an einer Wissenschaft nahmen, die ich meinerseits mit aller Liebe umfasste, deren ich nur fähig war.

Als ich in der höheren Analysis schon ziemlich fest war, wurde ich durch andere Betrachtungen auf die Zahlentheorie geführt, die ich bisher merkwürdiger Weise für unfruchtbar gehalten hatte. Ich erkannte meinen Irrtum und legte mich nun mit um so grösserem Eifer auf diesen Zweig der Mathematik, der in der Art der Behandlung und dem Stoffe nach von den übrigen Teilen durchaus abweicht, so dass er ganz getrennt von ihnen sein unabhängiges Bestehen in sich selbst hat, obgleich die höchsten und feinsten Partien beider Wissenschaften sich jetzt durch Dirichlet's und Jacobi's Forschungen aneinander zu neigen scheinen. Dieser doppelt schwierigen und doppelt interessanten Wissenschaft wandte ich seitdem meinen Hauptfleiss zu, und ich habe mir das Meiste und Wichtigste aus derselben zu eigen gemacht; besonders bin ich auch zu ihren neuesten Entdeckungen vorgedrungen. Die Zahlentheorie ist den Mathematikern eben wegen ihrer Eigentümlichkeit weniger bekannt; aber sie scheint jetzt den wichtigsten Platz in der Mathematik einnehmen und zur Basis aller neueren Forschungen dienen zu wollen, wie z. B. die Kreisteilung von Gauss und Dirichlet's Theorie der Anzahl der quadratischen Formen beweist. Aus ihr habe ich daher auch einen Gegenstand, der sich gut abrunden lässt, gewählt, um ihn als eine Art Probearbeit einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission vorzulegen.

In den Jahren 1840 bis 1842 besuchte ich die Kollegia des Professor Ohm an der Universität und zwar mit einer solchen Energie und Eifer, dass ich kaum die Zeit von einer Stunde zur anderen abwarten konnte. Auch nahm ich, wenn es die Zeit erlaubte, an den Vorlesungen des grossen Lejeune Dirichlet Teil, der uns jetzt leider auf einige Zeit verlassen hat, um in freundlicheren Zonen seine edle Lebenskraft zu stärken; mit seinem würdigen Lobe möchte ich mein ganzes Leben ausfüllen, hielte ich es nicht für Anmassung, meine schwache Stimme da hinzuzufügen, wo so allgemeine Anerkennung der erhabensten Geister stattfindet. Selbst wenn ich, um mit Homer zu reden, ein ehernes Herz und eine tausendfältige Zunge hätte, würde ich nicht die Begeisterung schildern können, in die mich die grossartigen und genialen Entdeckungen dieses ungeheuren Kopfes nicht nur in einem, sondern fast in allen Gebieten der Mathematik versetzt haben; wie sich immer in den verwickeltsten Theorien ein einfacher, schöner und klarer Hauptgedanke zum Grunde legt, an den sich das Ganze wie um einen Mittelpunkt anreiht, wie er immer den wahren Kern herauszufinden weiss, so dass man, wie man auch nachher den Gegenstand anders drehen mag, doch einsieht, das war es, worauf es ankam, so und nicht anders musste es gemacht werden. — Das wesentliche Princip der neueren mathematischen Schule, die durch Gauss, Jacobi und Dirichlet begründet ist, ist im Gegen-

satz mit der älteren, dass während jene ältere durch langwierige und verwickelte Rechnung (wie selbst noch in Gauss' Disquisitiones) und Deduktionen zum Zweck zu gelangen suchte, diese mit Vermeidung derselben durch Anwendung eines genialen Mittels in einer Hauptidee die Gesammtheit eines ganzen Gebietes umfasst und gleichsam durch einen einzigen Schlag das Endresultat in der höchsten Eleganz darstellt. Während jene, von Satz zu Satz fortschreitend, nach einer langen Reihe endlich zu einigem fruchtbaren Boden gelangt, stellt diese gleich von vorn herein eine Formel hin, in welcher der vollständige Kreis der Wahrheiten eines ganzen Gebietes konzentriert enthalten ist und nur herausgelesen und ausgesprochen zu werden darf. Auf die frühere Art konnte man die Sätze zwar auch zur Not beweisen, aber jetzt sieht man erst das wahre Wesen der ganzen Theorie, das eigentliche innere Getriebe und Räderwerk. So gründet z. B. Jacobi auf die einzige Idee, dass in dem Differentiale einer rationalen Funktion jede Potenz von x nur nicht das Glied $\frac{1}{x}$ vorkommen könne, die ganze Theorie die Umkehrung der Reihen in aller Vollständigkeit, Gauss auf eine eigentümliche Anordnung der ganzen Zahlen nach den Exponenten ihnen congruenter Potenzen seine grossartige Theorie der Kreisteilung, an der Jahrtausende verzweifelt hatten, (seit Euclid war nichts hinzugekommen). Doch genug hiervon, der Mathematiker darf seine Begeisterung nicht zu sehr in Worte ausgiessen; dies bleibt dem Dichter und Künstler vorbehalten, der seine Kunst im Gesange bis an den Himmel erheben und ihre Herrlichkeit in glänzenden Bildern ausschmücken kann; in eine so ernste und hohe Wissenschaft, wie die Mathematik, darf sich die Phantasie nicht einmischen, hier ist nur redliches Forschen und eifriges Weiterdringen am Platze, jedes weitläufige unwissenschaftliche Sprechen über die Gegenstände entfernt schon von ihrem wahren Geiste: Das beseligende Gefühl, das von demjenigen empfunden wird, der, von ihren Wahrheiten durchdrungen, ihren eigentlichen Wert zu schätzen versteht, ist für sie der herrlichste Weihrauch.

Nachdem ich so mein mathematisches Leben und Treiben geschildert, welches fast meine ganze Zeit ausfüllte und meine ganze Energie in Anspruch nahm, habe ich nur noch wenig von dem Uebrigen hinzuzufügen. — Meine Lektüre war sehr gewählt, sie wurde von meiner Mutter geleitet. An Romanen und schwülstigen Sachen, welche sonst junge Leute mit einer wahren Wut zu verschlingen pflegen, fand ich gar keinen Gefallen und so habe ich meine Phantasie so ziemlich rein erhalten. Nur klassische und wirklich bildende Bücher las ich und zog aus diesen die Stellen schriftlich aus, die mich am meisten interessierten, indem sie mir entweder

auffallend oder wegen ihres Inhaltes wichtig erschienen; auch fügte ich zuweilen eine Beurteilung des Buches hinzu, wie es mich zur Zeit berührte. Auf diese Weise konnte ich bemerken, wie sich nach und nach Geschmack und Urteil des Knaben verbesserte oder wenigstens änderte. Auch führte ich ein ziemlich regelmässiges Tagebuch, worin ich nicht allein die Ereignisse verzeichnete, sondern auch besonders, wie ich sie aufgefasst und was ich dabei gedacht und empfunden hatte, und auch hier zeigte sich mir, wie die Ansichten in den verschiedenen Perioden des Lebens schwanken und wechseln.

In die Wahrheiten der christlichen Religion wurde ich von dem Herrn Konsistorialrat Hossbach eingeweiht; ich genoss seinen Unterricht in den Jahren 39 und 40. Ostern 1840 wurde ich durch meine feierliche Einsegnung in den Bund und die Gemeinschaft derjenigen Christen aufgenommen, welche ihr Glaubensbekenntnis öffentlich abgelegt und gelobt haben, durch ihre Gesinnung und ihren Wandel sich als wahre Jünger Christi ihres Meisters und Erlösers würdig zu bezeigen.

Bis zum Ende dieser Lebensperiode nämlich, bis zum Juni v. Js., war mein Leben in ziemlicher Gleichförmigkeit der Alltäglichkeit geblieben, wie es bei dem fortwährenden Aufenthalte in einer und derselben Stadt oder deren nächsten Umgebung kaum anders sein konnte. Jetzt sollte ich auf längere Zeit Vaterstadt und Vaterland verlassen, um in fremdem Lande neue Menschen, neue Sitten, ein ganz neues Leben kennen zu lernen. Da der Vater schon seit zwei Jahren sein Geschäft nach England verlegt hatte, so reiste ich mit der Mutter den Sommer des vorigen Jahres dorthin und habe bis vor zwei Monaten in England, Irland und Wales mich aufgehalten. Was ich auf dieser Reise, die mich Stubengelehrten auf einmal in's weite Leben hinauswarf, alles gesehen und erfahren, wie ich mit Wehmut halb Hamburg in Asche liegen sah, wie ich grosse Städte kennen lernte mit ihren Merkwürdigkeiten und den Wunderwerken des menschlichen Erfindungsgeistes, Eisenbahnen unter Felsen und den Fundamenten der Häuser, Brücken unter den Betten der Flüsse, grossartige Kanäle und Häfen, Beweise von Ungeheurem, was die Kraft der Menschen vereint leisten kann, wie ich herrliche Landschaften durchreist bin, ausgeschmückt mit den lieblichsten Reizen der Natur, wie mich der Anblick des majestätisch sich ausbreitenden, unermesslichen Meeres berührt hat, wie ich sechs grosse Seereisen gemacht habe, unter ihnen eine sehr gefährliche zwischen den Klippen von Anglesia durch die ungeheure Kettenbrücke, unter deren Hauptbogen das ganze Berliner Schloss mit Bequemlichkeit Platz findet, und unter welcher man mit aufrechtstehenden Masten hindurchsegelt, wie ich den Snowdon, den höchsten Berg Englands bestieg, wie ich die Bekanntschaft grosser Männer,

als O. Connel's, gemacht habe und die bitterste und schmutzigste Armut neben dem üppigsten und glänzendsten Reichtum erblickte; wie ich ein Volk sah, welchem der Staat, die Politik und seine Freiheit alles ist, ein Volk, das weit entfernt von der Aeusserlichkeit und schalen Renommisterei der andern Länder, nur das schätzt und dem Wert beilegt, was wirklich, was gediegen, was nützlich ist, wie ich besonders den Geist der dortigen Universitäten kennen zu lernen suchte, um ihn mit dem der unsrigen zu vergleichen, wie endlich diese ungeheure Mannigfaltigkeit der Eindrücke die ganze Gestaltung meines innern und äussern Lebens, Urteil und Lebensanschauung wesentlich verändert und modifiziert hat, so dass ich durch diese Reise ein ganz anderer Mensch geworden bin: dieses alles der Reihenfolge nach mit gehöriger Klarheit und Deutlichkeit auseinanderzusetzen und zu beschreiben, würde allein den Raum mehrerer Bogen erfordern und also die dieser Arbeit gesteckten Grenzen bei Weitem überschreiten. Gern und mit grossem Vergnügen würde ich, wenn ich nicht eine Hochwohllöbliche Prüfungskommission zu ermüden fürchten müsste, in einer besonderen Arbeit Derselben eine vollständige Beschreibung meiner Reise vorlegen, die ich hier wegen der zu grossen Menge des Stoffes bei Seite zu lassen mich genötigt sehe. — Genug, die Sehnsucht nach meinem Vaterlande und der Wunsch ihm nützlich zu werden, so wie auch Familienangelegenheiten haben mich wieder zurückgeführt, da ich in der That schon die Absicht hatte, mich in Dublin niederzulassen und meine Studien dort fortzusetzen. Ich bin gekommen, um mich nun mit neuem Eifer und Fleisse auf die Studien zu legen, die ich auf meiner Reise nicht im mindesten vernachlässigt habe. So stehe ich denn auf dem Punkte, mir mit Gottes Hülfe durch das Bestehen der Abiturienten-Prüfung die Erlaubnis zum rechtmässigen Besuche der Universität und die Aussichten auf eine Carriere im Preussischen Staate zu erwirken.

Dies ist in kurzer Uebersicht die Schilderung meines verflossenen Lebens. Es ist das Leben eines zwanzigjährigen Jünglings, der erst in die Welt eintritt und der nicht wie der gereifte Mann oder der thatenumgebene Greis auf eine kräftige Fülle von stolzen und segensreichen Werken zurückschauen kann. Es ist arm an Leistungen, Thaten, Verdiensten, aber doch vielleicht nicht arm an allem guten Stoff; es enthält die Entschlüsse und Vorsätze für das künftige Leben und die Keime zu allem Guten und Schönen, welches sich einst später entwickeln kann. — Aber auch die Weise der Auffassung bei dieser Lebensbeschreibung und die Art der Beurteilung ist die eines Jünglings; wenn sich daher manche einseitige Darstellung, mancher fehlerhafte Gedanke, manches unrichtige Urteil vorfinden sollte, so macht doch gerade diese Mangelhaftigkeit die Arbeit zu

dem, was sie eigentlich sein soll, eine selbstständig verfasste Schilderung des vom jetzigen Standpunkt in objektiver Anschauung aufgefassten Lebens.

Indem ich also hiermit diesen jugendlichen Versuch der Nachsicht und Wohlgewogenheit Einer Hochwohllöblichen Prüfungskommission, dem sehr verehrten Herrn Direktor und den hochgeschätzten Herrn Professoren und Lehrern des Gymnasii zur Ansicht vorlege, wage ich es, auch mich und meine jetzigen Wünsche ganz gehorsamst Deren Gunst zu empfehlen.

Einer Königlichen Preussischen Hochwohllöblichen Prüfungskommission

Ganz Ergebenster Diener

Gotthold Eisenstein

wohnhaft Sophienstr. No. 24 bei Hr. Wentzel.

Berlin im August 1843.

Der Eisenstein'schen Vita war noch ein längeres, „Begeisterung“ betiteltes Gedicht beigefügt. Ich habe dasselbe trotz darin enthaltener hübscher Gedanken hier nicht mit aufgenommen, weil es mir mehr den idealen Sinn als das poetische Geschick des Verfassers zu bekunden schien. Dagegen dürften die folgenden, die Darstellung ergänzenden Notizen noch am Platze sein.

Die Eltern von Ferdinand Gotthold Max Eisenstein waren beide in Danzig geboren, der Vater, Johann Konstantin, am 3. Sept. 1791, die Mutter, Helene geb. Pollack, am 10. April 1799. Beide bekannten sich, nach den vor mir liegenden amtlichen Mitteilungen, zu der evangelischen Konfession; doch lassen verschiedene Umstände nicht zweifelhaft erscheinen, dass sie jüdischer Abstammung waren. Das Schwesterchen, welches Eisenstein in seiner Vita erwähnt, hiess Anna Mathilde Margarethe; es wurde 1833 geboren und starb 1840. Der Vater war Kaufmann. Er wird in den amtlichen Registern als Plattirfabrikant, Kommissionär und Agent aufgeführt; jedenfalls scheint seine Beschäftigung eine wechselnde gewesen zu sein. Mit Rücksicht auf sein Verhältnis zu seinem Sohne Gotthold ist die Bemerkung nicht ohne Interesse, dass er gleichzeitig mit diesem, Juni 1843, aus England nach Berlin zurückkehrte. Mit der Berufswahl seines Sohnes war er offenbar nicht einverstanden; dieser wohnte weder als Student noch später als Docent in dem elterlichen Hause und scheint auch von seinen Eltern keine, oder doch keine ausreichende Unterstützung erhalten zu haben. Schon am 20. April 1846 schrieb Gotthold Eisenstein an Stern: „Es fehlt

mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, ...". Es sei noch hinzugefügt, dass die Eltern Eisensteins bis Ende 1869 in Berlin wohnten und dann nach Charlottenburg übersiedelten, wo beide hochbetagt starben, der Vater am 28. November 1875, die Mutter am 28. Juli 1876.

Zu den Lehrern Eisensteins gehörte auch Schellbach, der, wie mir Herr Fürstenau mitteilte, bis Ostern 1842 den mathematischen Unterricht in den obersten Klassen des Friedrich-Werderschen Gymnasiums erteilte und dann an das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium berufen wurde. Doch war wohl Eisenstein, der schon als Gymnasiast die Vorlesungen von Ohm und Dirichlet besuchte, dem Schellbach'schen Unterrichte damals längst entwachsen.

Auf Grund des am 22. Sept. 1843 erhaltenen Reifezeugnisses wurde Eisenstein am 21. Oktober desselben Jahres an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin unter dem Rektorate Lachmanns immatrikuliert. Seine ersten grösseren Ferien, Ostern 1844, benutzte er zur Erfüllung seines sehnlichsten Wunsches: die Bekanntschaft mit Gauss zu machen. Mit welcher Verehrung er an diesem hing, davon zeugen nicht nur alle seine wissenschaftlichen Arbeiten, sondern auch die zahlreichen Aussprüche, in denen er bei jedem sich bietenden Anlasse bewundernd auf Gauss hinweist. „Durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt," schreibt er gelegentlich an Stern, und ein anderes Mal: „An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken." Umgekehrt brachte aber auch Gauss dem kaum 21jährigen Mathematiker eine hohe Wertschätzung entgegen. Und was noch mehr ist, er wusste dieselbe auch thatkräftig zu bekunden. Es ist das grosse Verdienst von Gauss, namentlich durch Vermittelung Alexanders von Humboldt Eisenstein die Wege geebnet und ihn vor den drückendsten Sorgen bewahrt zu haben.

Während der in Göttingen zugebrachten Ferien trat Eisenstein auch in näheren Verkehr mit Stern, mit dem ihn bald eine herzliche Freundschaft vereinigte. Die Briefe, welche Eisenstein an Stern in den Jahren 1844 bis 1850 richtete, sind, abgesehen von ihrem wissenschaftlichen Inhalte, von um so höherem Interesse, als sie nicht nur eine Uebersicht über die Entwicklung der äusseren Lebensverhältnisse Eisensteins darbieten, sondern auch einen Einblick in die Seelenvorgänge dieses merkwürdigen Mannes gewähren, dem es durch eine verhängnissvolle Verkettung von Umständen und jedenfalls nicht durch eigne Schuld allein versagt war, zu einer seinen hohen Geistesgaben entsprechenden inneren Befriedigung zu gelangen. Da es nicht die Absicht dieser Zeilen ist, ein vollständiges Lebensbild Eisensteins zu

entwerfen, so kann ich mich darauf beschränken, auf diese Briefe zu verweisen und denselben noch einige wenige Daten hinzuzufügen.

Es ist heute nicht mehr leicht, sich eine Vorstellung davon zu bilden, welch' ungeheures Aufsehen Eisenstein bei seinem Eintritte in die wissenschaftliche Welt erregte. Kaum hatte er das Maturitätsexamen absolviert, so folgten auch Schlag auf Schlag, in fast unheimlich kurzen Intervallen, die Publikationen, die ihn mit einem Male an die Seite der ersten Mathematiker des Jahrhunderts stellten. Brachte doch, um nur eines hervorzuheben, im Jahre 1844 der 27. Band des Crelle'schen Journals unter 27 mathematischen Beiträgen nicht weniger als 16, welche von stud. G. Eisenstein herrührten! Man muss alles dies im Auge behalten, um das unerhörte Ereignis zu verstehen, dass Eisenstein, bevor er nur das dritte Semester zurückgelegt hatte, von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doktor honoris causa ernannt wurde. Kein Geringerer als Jacobi war es gewesen, der hierzu die Anregung gegeben hatte. „Den 15. Februar 1845 erhielt der stud. phil. Eisenstein in Berlin wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten auf den Antrag der Professoren Kummer und Fischer das Ehrendiplom der Fakultät“ — so lautet, wie mir Herr Prof. Sturm mitzuteilen die Güte hatte, die kurze aber inhaltsschwere Notiz in dem Fakultätsprotokolle. Dass ein junger, noch nicht 3 Semester zählender Student, der also, um einen drastischen akademischen Ausdruck zu gebrauchen, fast noch ein Fuchs war, von einer deutschen Universität zum Ehrendoktor ernannt wurde, dürfte in der Geschichte der Wissenschaft ohne Beispiel dastehen.

Bei solchen wissenschaftlichen Erfolgen konnten materielle nicht ganz ausbleiben. Wie schon bemerkt, verdankte Eisenstein dieselben vornehmlich Gauss und Alexander von Humboldt. Dem, was Eisenstein hierüber in seinen Briefen Stern mitteilt, füge ich, der historischen Darstellung etwas vorgreifend, im Wortlaute bei, was mir neben anderen wertvollen Daten Herr Geh. Kanzleirat Skopnik aus den Akten der Berliner Universität gütigst zur Verfügung gestellt hat:

„Mittelst allerhöchster Ordre vom 8. Juli 1846 war Eisenstein zu seiner Ausbildung im Lehrfache vom 1. April 1846 ab auf 3 Jahre eine jährliche Unterstützung von 500 Thalern aus allgemeinen Staatsfonds bewilligt worden. Am 14. September 1849 hat Eisenstein um Fortgewährung dieser Unterstützung gebeten, in Folge dessen der Minister die philosophische Fakultät zur gutachtlichen Aeusserung über den Erfolg seiner bisherigen Lehrwirksamkeit und seine sittliche Haltung aufforderte. Die Fakultät berichtet sehr günstig, umgeht aber eine Empfehlung zur weiteren Unterstützung, weil sie von dieser bisher nichts wusste, darin aber auch andern

Privatdocenten gegenüber eine Benachteiligung gelegen hätte. Der Erfolg war aber, dass Eisenstein von Seiner Majestät 400 Thaler jährlich auf 2 Jahre erhielt."

Schon am 20. April 1846 schrieb Eisenstein an Stern, dass er sich an der Berliner Universität zu habilitieren gedenke, und dass der Minister Eichhorn ihn von der gesetzlichen Bestimmung dispensiert habe, wonach eine Habilitation jeweilen erst drei Jahre nach zurückgelegtem Triennium zulässig sei. Indessen dauerte es doch noch ein volles Jahr, bis seine Habilitation perfekt wurde. Kränklichkeit und seine damit wohl zusammenhängende trübe Gemütsstimmung, der er in einem späteren Briefe an Stern (Januar 1848) einen geradezu rührenden Ausdruck zu geben wusste, mögen Ursache der Verzögerung gewesen sein.

In seinem Habilitationsgesuche — ich verdanke die Mitteilungen über Eisensteins Habilitation den freundlichen Bemühungen von Herrn Prof. Knoblauch — bezeichnete er als Fächer, über welche er zu lesen gedenke: Algebra, Differenzial- und Integralrechnung, Mechanik, mathematische Physik und besonders Zahlentheorie. Die Fakultätssitzung, in welcher über Eisensteins Zulassung entschieden wurde, fand am 22. April 1847 statt. Kommissare der Fakultät waren Dirksen und Encke. In dem Gutachten des letzteren heisst es, Eisenstein habe eine grosse Anzahl von Abhandlungen namentlich über Zahlentheorie geliefert, „welchen unsere vorzüglichsten Kenner dieses Teiles der reinen Mathematik einen sehr hohen Rang beilegen." Sonnabend, den 15. Mai, hielt darauf Eisenstein vor der Fakultät die Vorlesung „Ueber die Fundamentaleigenschaften der ganzen rationalen Funktionen." Als eigentliches Habilitationsdatum (wie es in die Schrift „Die Friedrich-Wilhelms-Universität in ihrem Personalbestande von 1810 bis 1885" aufgenommen ist) gilt das des 21. Mai 1847, an welchem Tage Eisenstein seine öffentliche Vorlesung „De fundamentis calculi differentialis" gehalten hat.

Ueber die Vorlesungen, welche Eisenstein an der Berliner Universität während seiner nur 10 Semester umfassenden Docententhätigkeit teils angekündigt teils gehalten hat, giebt das folgende Verzeichnis Auskunft, welches Herr Skopnik aus den Universitätsakten für mich auszuziehen die Freundlichkeit hatte. Den Vorlesungstiteln sind jeweilen darauf bezügliche kurze Bemerkungen von Eisenstein hinzugefügt.

Verzeichnis
der von dem Herrn Dr. Eisenstein an der Universität Berlin gehaltenen Vorlesungen.

I. Im Winter-Semester 1847/48.

1. Differenzialrechnung (privatim). 14 Zuhörer.
2. Höhere Zahlentheorie, besonders der quadratischen, kubischen und biquadratischen Reste und Theorie der ternären quadratischen Formen (gratis).
   Bei Gratis-Kollegien wird selten von den Zuhörern angenommen und ist daher die Anzahl nicht genau anzugeben. (gez.) E.
3. Theorie der elliptischen Funktionen (privatissime). 6 Zuhörer.

II. Im Sommer-Semester 1848.

1. Integralrechnung als Quelle der transcendenten Funktionen (privatim). 3 Zuhörer.
2. Erläuterung der disquisitiones arithmeticae von Gauss mit speciellen Untersuchungen über die Kreisteilungen (privatissime).
   Nicht zu Stande gekommen, statt dessen ein publice über die einfachsten Principien der Mechanik.

III. Im Sommer-Semester 1849.

Mathematische Besprechungen über einzelne Schwierigkeiten in den Studien.
Die Integralrechnung.
Ueber alle Theile der Mathematik.
Durch Krankheit war ich am Lesen verhindert.

IV. Im Winter-Semester 1849/50.

Eine Repitition der Differenzialrechnung. 11 Zuhörer.
Integralrechnung und analytische Mechanik. 12 Zuhörer.

V. Im Sommer-Semester 1850.

Die analytische Mechanik, nebst Entwickelung der nötigen Formeln aus der Integralrechnung. 4 Zuhörer.
Ich habe elliptische Funktionen statt der Mechanik gelesen, weil letztere von einem anderen Docenten angezeigt worden war. E.

VI. Im Winter-Semester 1850/51.

Die Differenzial- und Integralrechnung. 18 Zuhörer.

VII. Im Sommer-Semester 1851.

Die schwierigeren Teile der Integralrechnung in besonderer Hinsicht auf den heutigen Standpunkt der Wissenschaft.
Wegen Krankheit nicht gelesen.



VIII. Im Sommer-Semester 1852.

Die Integral- und Variationsrechnung und als Einleitung eine kurze Uebersicht der Differenzialrechnung. 18 Zuhörer.

Gleich mit Beginn seiner akademischen Lehrthätigkeit wurde Eisenstein eine grosse Auszeichnung zu Teil: Gauss veranstaltete 1847 die bekannte Ausgabe „Mathematische Abhandlungen[1]) besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen von Dr. G. Eisenstein, Privatdocent an der Universität zu Berlin“ (Berlin bei G. Reimer 1847) und fügte derselben eine besondere Vorrede hinzu, in der er auf den hohen Rang dieser Abhandlungen hinwies. Nachdem er von den Arbeiten Euler's und Lagrange's gesprochen, fährt er fort: „Die vorliegenden Aufsätze enthalten soviel treffliches und gediegenes, dass durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliessen.“

Die Anerkennungen, welche Gauss von Anfang an der wissenschaftlichen Thätigkeit Eisensteins zollte, waren für diesen wahre Wohlthaten. Sie bildeten fast die einzigen Lichtpunkte in seinem freudearmen Dasein. Man lese nur, wie er sich in seinem Briefe vom 20. April 1846 Stern gegenüber ausspricht: „Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine ebenso freundliche Gesinnung bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine grosse Freude geworden. Ich weiss nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Alexander von Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt, ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten, und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Ausser dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos ....“

Auch Alexander von Humboldt, dessen gewichtige Vermittelung — um Dirichlet's Worte zu gebrauchen — nirgends fehlte, wo es die Ehre der

1) Dieselben waren vorher in den verschiedenen Bänden des Crelle'schen Journals erschienen. Die sämmtlichen Arbeiten Eisensteins befinden sich in Crelles Journal (Bd. 27—44), in Liouvilles Journal (Bd. 10 u. 17), in den Nouvelles Annales de Math. (Bd. VIII) und in den Berichten der Berliner Akademie (1850—52).

Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter galt, liess es, wie schon früher hervorgehoben, an Aufmunterung und sichtbaren Beweisen seiner Hochachtung nicht fehlen. Seinen Bemühungen vorzugsweise hatte Eisenstein den Eintritt in die Akademie zu verdanken.

„Am 22. August 1850 forderte der Minister unter Beifügung eines Schreibens von Alexander von Humboldt, Jacobi und Lejeune-Dirichlet, worin diese die definitive Anstellung Eisensteins in Antrag brachten, die Fakultät zur gutachtlichen Berichterstattung auf. Die Fakultät berichtete rühmend und wünschte schliesslich, ihn der Universitätslaufbahn erhalten zu sehen und dass derselbe durch anerkennende Teilnahme auch über seine weitere Zukunft beruhigt werde."[1])

Indessen war zu jener Zeit nirgends eine mathematische Professur frei und auch keine Aussicht vorhanden, dass für Eisenstein ein besonderer Lehrstuhl errichtet würde. So musste sich dieser abermals gedulden. Erst im Anfange des Jahres 1852 gelang es, einen Ausweg dadurch zu finden, dass Eisenstein als ordentliches Mitglied in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde. Die Aufnahme erfolgte am 24. April; seine Antrittsrede hielt er am 1. Juli. Damit schied er zwar formell aus dem Verbande der Universität, aber mit der bestimmten Absicht, entsprechend den Rechten der Akademiemitglieder, seine Lehrthätigkeit unverändert fortzusetzen.

Leider sollte er sich nur wenige Monate der so sehnlichst von ihm erhofften gesicherten Stellung erfreuen. Seine Gesundheit war vollständig zerrüttet. Von Hause aus kränklich, hatte er von Jahr zu Jahr seinen Zustand sich verschlimmern sehen. Die Klage um denselben zieht als wehmütiger Grundton durch alle seine Berichte, durch seine Lebensbeschreibung wie später durch seine Briefe. Dazu kam noch für ihn, den „die fortwährende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlichen Verhältnissen" folterte, das drückende Gefühl, allein und verlassen in der Welt dazustehen.

Schon zu wiederholten Malen war er genötigt gewesen, seine Thätigkeit an der Universität zu unterbrechen. Im Jahre 1851 hatte er noch durch einen längeren Aufenthalt in einer Wasserheilanstalt Genesung gesucht. Es war vergebens, der Kräfteverfall liess sich nicht mehr aufhalten. Am 11. Oktober 1852 wurde Eisenstein, in einem Alter von nur 29 Jahren, von seinen Leiden durch den Tod erlöst.

---

1) Aus den Akten der Berliner Universität.

BRIEFE VON G. EISENSTEIN AN M. A. STERN.

HERAUSGEGEBEN

VON

A. HURWITZ UND F. RUDIO.

In dem Nachlasse des am 30. Januar 1894 in Zürich gestorbenen Prof. Dr. M. A. Stern fand sich ein kleines Packet mit der Aufschrift: „Die einliegenden Briefe meines verstorbenen Freundes G. Eisenstein sollen nach meinem Tode sorgfältig bewahrt und wo möglich nach dem Jahre 1890 zum Drucke befördert werden". Als wir von unserem Freunde und Kollegen, Herrn Prof. Dr. Alfred Stern, mit der Herausgabe dieser an seinen Vater gerichteten Briefe betraut wurden, sind wir der Aufforderung um so lieber nachgekommen, als es sich für uns zunächst um die Erfüllung des Wunsches eines Mannes handelte, der uns beiden ein verehrungswürdiger, väterlicher Freund gewesen war. Sodann aber glaubten wir, dass die Briefe sehr wohl geeignet sein dürften, das lebhafteste Interesse der Fachgenossen zu erregen, auch wenn sie in wissenschaftlicher Hinsicht keine Ueberraschungen bieten werden. Giebt es doch unter den grossen Mathematikern unseres Jahrhunderts kaum einen, über dessen äussere Lebensverhältnisse so wenig zuverlässiges bekannt ist, wie über diejenigen Eisensteins. Auch sein Charakterbild, „von der Parteien Gunst und Hass verwirrt", ist als ein so schwankendes zu bezeichnen, dass jeder Beitrag zur Klärung willkommen sein muss.

Es war ursprünglich unsere Absicht, den Briefen einige biographische Notizen, als Einführung in die Situation, aus der jene hervorgegangen sind, vorauszuschicken. Als die zu diesem Zwecke angestellten Nachforschungen aber, neben manchem andern wissenswerten, eine umfangreiche Autobiographie zu Tage förderten, glaubten wir diese letztere besser einer besonderen Publikation zuweisen zu sollen. Indem wir uns an dieser Stelle damit begnügen, auf die in derselben enthaltenen biographischen Mitteilungen zu verweisen, lassen wir jetzt die Briefe Eisensteins an Stern in chronologischer Ordnung folgen.

I.

Mein lieber Herr Dr.[1])

Mit grossem Danke sende ich Ihnen hier die entliehenen acht Thaler; ich wurde bei meiner Ankunft gleich von so vielen Geschäften und Ver-

---

1) Der Brief trägt kein Datum. Aus dem Zusammenhange ergiebt sich aber, dass er 1844, etwa im Juli, geschrieben wurde.

hältnissen in Anspruch genommen, dass es mir erst jetzt möglich war, an Sie zu schreiben. Ich hoffe und wünsche, dass Sie sich recht wohl und munter befinden und dass Sie noch ein klein wenig an mich denken, so wie ich mich stets mit Dank und angenehmer Empfindung an die freundliche Aufnahme erinnern werde, die ich bei Ihnen und Ihren Bekannten gefunden habe. Haben Sie doch gefälligst die Güte, Herrn Dr. Goldschmidt sowie die Familie Meierstein und Lott herzlich von mir zu grüssen und sie meines aufrichtigen Dankes zu versichern. Ich wünschte recht bald einen oder den anderen von Ihnen hier in Berlin zu sehen. An Gauss brauche ich wohl keinen Gruss zu bestellen, denn zu dem lieben Gott kann man nur beten und bewundernd emporblicken. Wir haben jetzt Jacobi in Berlin und er wird ganz hierbleiben, was wir auch Alexander von Humboldt zu verdanken haben. Ich habe Jacobi schon mehrmals besucht, man kann herrlich mit ihm umgehen, er ist im Vertrauen der direkte Gegensatz von Gauss. Er wird in kurzer Zeit zum Jubiläum der Universität nach Königsberg reisen und dann mit seiner Familie wiederkommen. Dirichlet, der nobelste und liebenswürdigste aller Mathematici bleibt bis zum Winter in Neapel. Ich habe durch Alex. v. Humbolt's Verwendung soeben 100 Thaler zu einer neuen Reise erhalten und werde wahrscheinlich Helgoland wählen. Dies sind die neuesten Berliner Neuigkeiten.

Ich habe mit grossem Vergnügen Ihre Abhandlung über die quadratischen Reste, die preisgekrönte, gelesen; ich versuchte, das Princip, welches Sie zur Bestimmung des quadratischen Charakters der Zahlen 2 und 3 anwenden und welches sehr scharfsinnig ist, für grössere Zahlen zu benutzen, aber ich habe nichts gefunden, und es scheint, dass die Methode gerade nur für diese beiden Fälle passend ist; Gauss ist derselben Ansicht (Götting. gelehrte Anz.), er hat dieselbe schon zur Bestimmung des biquadratischen Charakters der Zahl 2 angewandt.

Die Summe $\sum \frac{1}{\sin a_1 \omega}$, welche Sie dort für $p = 8m + 7$ bestimmen, habe ich auch für $p = 8m + 3$ gefunden; überhaupt kann nicht leicht irgend eine Summe von einer ähnlichen Form meinen Principien entgehen; ich bitte es zu versuchen; schicken Sie mir Summen, ich schreibe Ihnen die Antworten. Bei dieser Gelegenheit bin ich unter anderen auf einen merkwürdigen Satz geführt worden. Wenn $p = 4n + 3$, so hat man bekanntlich $\Sigma a < \Sigma b$, aber man hat auch $\sum \operatorname{cotg} \frac{a\pi}{p} > \sum \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{p}$, wenn a die Reste, b die Nichtreste $(mod p)$ vorstellen; von der grossen Schwierigkeit, dergleichen einfache Sätze zu beweisen, erhält man erst eine richtige Ansicht, wenn man sich lange Zeit damit beschäftigt.

Vielleicht sind Ihnen einige andere mathematische Mitteilungen nicht ganz unangenehm. Mein erster Beweis des biquadratischen Mysteriums ist nunmehr im Crelle'schen Journal abgedruckt, der zweite wird wahrscheinlich in einer grösseren Abhandlung unter dem Titel „die drei Reciprocitätssätze der höheren Arithmetik“ bei Veit erscheinen. Die Reste der 8ten, 12ten und auch 5ten Potenzen, welche fertig sind, arbeite ich jetzt aus.

Dies ist ein Feld, auf dem ich mich ganz frei bewegen kann, denn hier hat selbst Jacobi nichts, wie er mir gesteht. Auch hier erreiche ich wieder alles durch das einzige kostbare Princip, die Ausdrücke dergestalt analytisch umzuformen, dass sich die Division in der That allgemein ausführen lässt. Sie glauben garnicht, wie pikant diese Untersuchungen sind. Bei den Resten der höheren, z. B. der 7ten, 11ten u. s. w. Potenzen, leistet das Princip ebenfalls alles, was es leisten kann, aber die Schwierigkeit hängt hier von den ersten Elementen der complexen Zahlen ab, über welche man noch garnichts weiss. Prof. Kummer hat zum Glück seine schöne Theorie der complexen Zahlen noch bei Zeiten durch Encke von der Akademie zurücknehmen lassen; denn sie enthielt zuviel Revolutionsstoff, ich wäre z. B. rasend geworden; man kann durch dieselbe beweisen, dass zu jeder Determinante nur eine quadratische Form gehört und dergl. Unsinn mehr. Kummer hofft die Theorie leicht zu ergänzen; es erhebt sich ein leiser Zweifel in meinem Gemüte.[1]) Auch Jacobi ist ganz meiner Ansicht, dass die Theorie der allgemeinen complexen Zahlen erst durch eine vollständige Theorie der höheren Formen ihre Vollendung erhalten kann. Die complexen Zahlen aus 8ten und 12ten Wurzeln der Einheit lassen sich jedoch durch ein eigentümliches Princip behandeln, welches später seine Anwendbarkeit verliert; bei den höheren complexen Zahlen gibt es auch eigentlich gar keine complexen Primzahlen mehr. Gibt man den Satz zu, dass das Produkt zweier complexer Zahlen nicht anders durch eine Primzahl teilbar sein kann, als wenn wenigstens ein Faktor durch die Primzahl teilbar ist, was ganz evident erscheint, so hat man die ganze Theorie auf einen Schlag; aber dieser Satz ist total falsch, und man muss also ganz neue Principien anwenden.

Ich habe nicht eher geruht, als bis ich meinen geometrischen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, der Ihnen so viel Spass gemacht hat, und der auch, beiläufig gesagt, Jacobi ausserordentlich gefällt, von dem Lemma befreit habe, von dem er noch abhängig war, und er ist jetzt so einfach,

---

1) Die Zukunft hat bekanntlich Eisenstein nicht Recht gegeben.

dass er sich in ein paar Zeilen mittheilen lässt. Der Hauptunterschied zwischen meinem Gange und dem Gaussischen besteht darin, dass ich nicht wie Gauss die Zahlen $< p$, in solche $< \frac{p}{2}$ und in solche $> \frac{p}{2}$ theile, sondern in gerade und ungerade. Es sei A, B resp. der Complex der geraden, ungeraden Zahlen $< p$; k sei eine nicht durch p theilbare ungerade Zahl; die Reste der Vielfachen kA, welche in A fallen, seien α, diejenigen in B seien β, dann werden offenbar alle α zusammen mit allen Zahlen der Form $p + (-1)^\beta \beta$ alle A erschöpfen, und man wird die beiden Congruenzen haben $k^{\frac{p-1}{2}} \Pi A \equiv \Pi\alpha \Pi\beta$, und $\Pi A \equiv \Pi\alpha (-1)^{\Sigma\beta} \Pi\beta \pmod p$, woraus folgt $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\Sigma\beta}$; aber offenbar ist $\Sigma kA = p\Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) + \Sigma\alpha + \Sigma\beta$, und da alle A so wie alle α gerade, und $p \equiv 1 \pmod 2$ ist, so folgt hieraus $\Sigma\beta \equiv \Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \pmod 2$; und durch eine leichte Transformation, oder schon durch geometrische Betrachtung, erhält man, weil $k - 1$ gerade ist, $\Sigma E\left(\frac{kA}{p}\right) \equiv - E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) - E\left(\frac{3k}{p}\right) + \cdots$

$$\pm E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \equiv E\left(\frac{k}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{p}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) \pmod 2.$$

Wird letztere Summe durch S bezeichnet, so hat man also auch $k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^S \pmod p$, d. h. $\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^S$.

Ebenso findet man, wenn k auch eine Primzahl ist, $\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^T$, wenn $T = E\left(\frac{p}{k}\right) + E\left(\frac{2p}{k}\right) + \cdots + E\left(\frac{\frac{k-1}{2}p}{k}\right)$ ist.

Nun ist S die Anzahl der Gitterpunkte in einem Rechteck mit den Dimensionen $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{k-1}{2}$, welche zwischen der Geraden, deren Gleichung $y = \frac{k}{p}x$ ist, und der Achse der x liegen, T die Anzahl der Gitterpunkte, welche in jenem Rechteck zwischen derselben Geraden $x = \frac{p}{k}y$ und der Achse der y liegen, also ist $S + T$ die Gesammtzahl der Gitterpunkte jenes Rechtecks, nämlich $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2}$, also kommt $\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^{S+T} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{k-1}{2}}$, quod erat demonstr.

Wie glücklich würde sich der gute Euler geschätzt haben, diese paar Zeilen vor etwa 70 Jahren zu besitzen.

Leben Sie herzlich wohl, mein lieber Herr Dr. und grüssen Sie alle unsere Freunde in Göttingen.

Ihr aufrichtiger Freund

gehorsamst

Berlin. Gotth. Eisenstein.

Baldige Antwort und Mittheilungen von Ihrer Seite werden mir sehr schätzenswerth sein.

II.

Dass ich, mein liebster Stern, der unhöflichste Mensch bin, darf ich nicht erst mathematisch beweisen, da ich so lange mit der Antwort auf Ihren freundlichen Brief gezögert habe; ich will mich auch garnicht erst entschuldigen, denn da das Verbrechen so gross ist, so müsste ich Bogen mit Entschuldigungen und exquisiten Ausflüchten anfüllen; und übrigens giebt es gar keine Entschuldigung, sondern nur meine unschuldsvolle Faulheit ist zu beschuldigen, dass ich den schuldigen Bescheid auf Ihren Erstling schuldig geblieben bin. — Um Ihr Schreiben von hinten an zu beantworten:

Ihre drei Bitten:
Das Datum in der Mitten,
Den Doktorhut ohne Tresse
Und meine Adresse

werde pünktlich nach Vorschrift beobachten. Herrn Wittstein habe im vorigen Jahre gesprochen und einen Gruss von Ihnen bestellt; da ich mich indessen höchst kurze Zeit in Hannover aufhielt, so konnte ich von seinem Diensteifer nur wenig Gebrauch machen; er war auch sehr beschäftigt, wie es mir vorkam. Ich fuhr damals nicht sogleich nach Berlin, wie Sie ohne Beweis behaupten, sondern blieb noch acht Tage in Alexisbad, wo es mir sehr gut gefallen hat, so dass ich in diesem Jahre wieder mit meiner Mutter, die Sie grüsst, dagewesen bin. Später machte ich noch eine Badereise auf vier Wochen nach Swinemünde, während welcher Zeit Ihr Brief durch Herrn Meyerstein's Güte bei mir anlangte. Nach meiner Zurückkunft beschäftigte ich mich teils mit dem Lesen Ihres Briefes und dem stets unausgeführten Vorhaben, ihn zu beantworten, teils mit der Herausgabe einer Arbeit über die cubischen Formen mit drei Variabeln, die nicht mehr und nicht weniger als 15 Druckbogen lang, also sehr lang geworden ist. — Für Ihr Anerbieten wegen der Frankfurter Buchhandlung bin ich Ihnen sehr dankbar und werde wohl einmal davon Gebrauch machen können. — Bei

Ihrem Beweise von $\sum \operatorname{cotg} \frac{a\pi}{p} > \sum \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{p}$ stützen Sie sich auf $\Sigma b > \Sigma a$; dies ist zwar ganz brav, aber so war die Sache nicht gemeint, sondern ich sprach von einem direkten Beweis, denn $\Sigma b > \Sigma a$ ist bis jetzt, wenigstens so viel ich weiss, nur durch unendliche Reihen und Produkte (von Dirichlet) bewiesen worden, meinen Beweis habe ich noch nicht publizieren wollen, da er auf einem principium latissime patens beruht, von dem ich erst noch fernere Anwendungen zu machen denke. — Es würde mich ausserordentlich freuen, wenn Sie wieder einigermassen, durch Musse und Muse begünstigt, auf die Zahlentheorie kämen.

Nun mein lieber Stern komme ich zur Hauptsache, um derenwillen besonders ich die Feder in die Hand genommen habe, nämlich um Ihnen von Herzen Glück zu wünschen. Vor wenigen Tagen erfuhr ich, gerade als ich Dr. Joachimsthal's Probevorlesung beiwohnte, durch den jungen Friedländer zu meiner grössten Freude Ihre Verlobung, oder, was dasselbe besagt, dass Sie Sich auf Hymens Kettenlinie vorbereiten, deren Gleichung mir unbekannt ist, obwohl ich weiss, dass sie mit einem Maximum der Freude anfängt und zuweilen einige Spitzen hat. — So offeriere ich Ihnen denn, mein liebster Stern, meine Gratulation in optima forma, doch behalte ich mir ein ausführlicheres Wünschen und eine feierliche Segenserteilung bis zu Ihrer Hochzeit vor, zu der ich mich hiermit einlade.

In Betreff Berliner Neuigkeiten, so wissen Sie, dass Prof. Jabobi (der Grosse) für immer hier angestellt, und dass Prof. Dirichlet (der Liebenswürdige) nebst einem neuen weiblichen Sprössling, einer Florentinerin, ebenfalls aus Italien zurück ist. Aber wir haben auch Prof. Kummer hier als Gast auf einige Zeit; er hat mich zum Doktor hon. c. gemacht, wie Sie vielleicht erfahren haben werden; wenn nicht, so teile ich es Ihnen hier mit, was schon lange meine Pflicht gewesen wäre (Unterlassungssünde). Noch habe ich ihn nicht ordentlich geniessen können, da er gleich nach der Insel Rügen abgereist ist, hoffe dies aber nach seiner Rückkehr hierher nachzuholen. Mein Freund Dr. Joachimsthal habilitiert sich nächsten Winter hier; mein Freund Kronecker, dessen ich mich gegenwärtig, wie im vorigen Jahre des Heine, als meines wöchentlichen und täglichen Hausfreundes bediene, arbeitet an seiner Promotion und ist jetzt nach Rügen gereist mit Kummer, da ihn diese Reise in seinem Fleisse aufhält, später geht er nach seinem Gute in Schlesien, um dort zu verbauern; mein Freund Dr. Heine, der auch in Göttingen studiert hat, ist schon seit vorigem Winter Privatdocent in Bonn, und unser beider Freund Eisenstein existiert auch. Ich will Ihnen hier nur unser Berliner mathematisches Publicum aufführen und Parade machen lassen; diese und der reiche Dr. Borchardt, dessen un-

menschliches Geld ihn aufserhalb des Bereiches aller menschlichen Berechnungen setzt, sind es; denn neuen Zuwachs und jungen Nachwuchs haben wir hier nicht bekommen.

So lustig ich Ihnen auch aus diesem Schreiben erscheinen mag, mein lieber Stern, so bin ich doch in Bezug auf meine Gesundheit sehr leidend. Ich bemerke dies nur, weil Sie sich wundern werden, dass so lange keine Abhandlung von mir erscheint, da doch sonst jedes Crelle'sche Heft eines meiner Kinder enthält. Vorrat habe ich hinlänglich und sehr weit aussehende Ideen, aber ich bin so abhängig von meinem Körper, dass ich nichts thun kann; sobald ich ein wenig arbeite, leide ich an Schwindel, unruhigem Schlaf und allerlei nervösen Zufällen. Im vorigen Winter war ich sehr krank, vier Wochen bettlägerig, und nun habe ich mich noch immer nicht erholen können, trotz Brunnenkur und Pillen — so steht es mit mir; doch was hilft das Klagen: hoffe und wünsche nur, dass Sie so munter wie ein Fisch sind, was ja bei einem Bräutigam nicht fehlen darf.

Zum Desert will ich Ihnen doch noch einige Formeln auftischen. — Zwei Hauptgegenstände sind es, mit denen ich mich namentlich in dieser Zeit beschäftigt, und die ich wenigstens zum Teil zu einem gewünschten Ausgang geführt habe, (doch ist Alles Stümperei, ehe ich nicht gesund bin); die Formen zweiten Grades mit beliebig vielen Variabeln, und die Lemniscatenfunktionen, welche in Bezug auf die complexen Zahlen genau dieselbe Rolle spielen, als die Sinus für die reelle Theorie. Diese Lemniscf. müssen jetzt, wenigstens für einen Arithmeticus, fast als das Wichtigste in der ganzen Mathematik gelten, denn sie enthalten gewissermassen im Keime und implicite die Haupteigenschaften der complexen Zahlen. Wie ich durch sie auf die einfachste Art von der Welt das mysterium maxime reconditum bewiesen habe, werden Sie aus Crelles Journal (29. Band) ersehen haben; diese Beweise haben den Vorzug, dass man fast Wort für Wort die Analogie bei quadr. cub. und biq. Resten verfolgen kann, und dass sie vollkommen symmetrisch in Bezug auf die beiden zu vergleichenden Primzahlen sind; in der That drücken sie den Charakter (qu. cub. biq.) durch eine analytische Formel aus, der man die Symmetrie also die Reciprocität unmittelbar ansieht. Indem ich denke, dass Sie vielleicht meine kleine Abhandlung (nur einen Bogen) hierüber durchgesehen haben, will ich hier einige Sätze über die Lemniscf. anführen, die mir wichtig erscheinen und die sich dort nicht finden. Sie wissen, dass für jede ungerade ganze complexe Zahl $a + bi = m$ die Differenzialgleichung

(1.) $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, in welcher y mit x zugleich verschwinden soll, durch eine **gebrochene** rationale Function y von x integrirt wird,

ebenso wie analog das Integral von $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ für ein ganzes **reelles** und ungerades m eine ganze rationale Function von x ist, nämlich, wie bekannt

$$y = mx - \frac{m(m^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \cdots\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\, 2^{m-1} x^m.$$

Hier nun ist es leicht, die Koeffizienten durch Einsetzen in die Differenzialgleichung zu bestimmen. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn y eine gebrochene Funktion von x ist, wie in (1.); es ist dann gänzlich unmöglich, nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der Differenzialgleichung auch nur einen einzigen Koeffizienten des Zählers oder Nenners zu finden, nicht etwa wegen der Weitläufigkeit der Rechnung, die man doch überwinden könnte, sondern weil die Sache in sich unmöglich ist, wovon Sie Sich leicht durch einen Versuch überzeugen können. Natürlich meine ich die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten für ein unbestimmtes m, denn dass man für specielle gegebene Werte von m die Koeffizienten des Zählers und Nenners aus der Diff. Gl. numerisch berechnen kann, versteht sich von selbst, aber man erkennt daraus nicht den Zusammenhang dieser numerischen Werte mit dem jedesmaligen m. Dies hat auch nichts Frappantes mehr (so wunderbar es anfangs erscheint), sobald man die Form der Koeffizienten erst kennt; denn sie sind gar nicht, wie ich anfänglich glaubte, Funktionen von m allein, sondern auch von der Norm von m, $a^2 + b^2 = N(m)$, die ich mit p bezeichnen will, und wie sollte wohl diese Norm vermittelst der Differenzialgleichung irgend eingehen können! Man muss also ganz neue Methoden anwenden und ich bin durch solche endlich zu dem gewünschten Ziele gelangt. — Wenn m primär d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ ist, was ohne Schaden der Allgemeinheit angenommen werden darf, so finde ich unter anderm, um Ihnen ein kleines aperçu zu geben:

1) y hat die Form: $y = x \cdot \dfrac{A_0 + A_1 x^4 + A_2 x^8 + \cdots + A_{\frac{p-5}{4}} x^{p-5} + x^{p-1}}{1 + B_1 x^4 + B_2 x^8 + \cdots + B_{\frac{p-5}{4}} x^{p-5} + B_{\frac{p-1}{4}} x^{p-1}}$,

wo alle Koeffizienten A und B ganze complexe Zahlen sind, und es ist hierbei $A_0 = B_{\frac{p-1}{4}}$, $A_1 = B_{\frac{p-5}{4}}$, etc., $A_{\frac{p-5}{4}} = B_1$, so dass im Zähler genau dieselben Koeffizienten vorkommen, wie im Nenner, nur in umgekehrter Reihenfolge.

2) Setzt man brevitatis causa $m^4 = q$, so sind B_μ und $\frac{A_\mu}{m}$ ganze Funktionen von den beiden Variabeln p und q von der μ^{ten} Ordnung,

und zwar enthalten sie alle Potenzen und Produkte, in denen die Summe der Exponenten von p und q zusammen $\leqq \mu$ ist; die numerischen Multiplikatoren dieser Potenzen und Produkte, die nun nicht mehr von m noch von p abhängen, sind reelle Zahlen, was sich keineswegs von selbst versteht, da sie a priori betrachtet, ebenso gut complex (imaginär) sein könnten. So ist z. B. $A_0 = m$, $A_1 = m \cdot \frac{-5p - q + 6}{60}$,

$$A_2 = m \cdot \frac{35p^2 + 14pq - q^2 - 384p - 84q + 420}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

$$B_1 = \frac{-p+q}{12}, \quad B_2 = \frac{35p^2 - 70pq - q^2 - 300p + 336q}{56 \cdot 180}, \text{ etc.} \ldots$$

In B_μ kommt kein konstantes Glied vor; die höchsten Potenzen von p in B_μ und $\frac{1}{m} A_\mu$ haben denselben numerischen Multiplikator. q bezeichnet, wie gesagt $(a + bi)^4$ und p die Norm $a^2 + b^2$.

3) Bildet man nach dem bekannten Newton'schen Theorem aus den Koeffizienten, etwa denen B des Nenners, die Potenzsummen der Wurzeln, etwa indem man setzt

$$S_1 + B_1 = 0, \; S_2 + B_1 S_1 + 2B_2 = 0, \; S_3 + B_1 S_2 + B_2 S_1 + 3B_3 = 0, \text{ etc.},$$

so enthalten alle S das p nur linear, d. h. in der **ersten** Potenz allein. Dies ist ein Fundamentalsatz für die Koeffizienten. Bringt man ihn mit einem anderen, ziemlich merkwürdigen Princip in Verbindung, welches, Sie mögen es mir glauben oder nicht, davon abhängt, dass die Zahl π grösser als 2 ist, so kann man allein hieraus so viele Koeffizienten berechnen, als man will, wovon ich oben eine kleine Probe gegeben habe.

4) Die Koeffizienten brechen von selbst ab (natürlich für ein ganzes complexes m), sobald der Index μ die Zahl $\frac{p-1}{4}$ überschreitet, in ähnlicher Weise, wie dies bei den Binomialkoeffizienten und bei denen der Fall ist, welche in der Entwickelung von Sinus der vielfachen (ungeraden) Bogen nach Potenzen von Sinus der einfachen Bogen vorkommen.

5) Wenn m eine zweigliedrige complexe Primzahl, also p eine reelle Primzahl $4k+1$ ist, so sind alle Koeffizienten $\equiv 0$ (mod. m). Dieser Satz, welcher dem für die Polynomialkoeffizienten im Reellen analog, ist besonders wichtig für die Anwendung auf Reciprocitätssätze und auf die Teilung der Lemniscate. Das biquadr. Fundamentaltheorem lässt sich unmittelbar daraus ableiten und ich habe diese specielle Anwendung Gauss mitgeteilt, der sie zu meiner grossen Freude benigne aufgenommen hat. — Von einer Menge Beispielen, die ich mit grosser Mühe berechnet habe, will ich Ihnen ein recht eklatantes aufschreiben. Für $m = 3 + 2i$, $p = 13$ hat man

$$y = \frac{(3+2i)x + (7-4i)x^5 + (-11+10i)x^9 + x^{13}}{1 + (-11+10i)x^4 + (7-4i)x^8 + (3+2i)x^{12}}$$

und es ist

$$7 - 4i = (3+2i)(1-2i) \quad -11 + 10i = (3+2i)(-1+4i)$$

so dass also, wenn man mit dem Nenner nach links multipliziert, in gewissem Sinne $y \equiv x^p \pmod{m}$ ist.

Die Hauptsache ist noch zu thun, nämlich das allgemeine Gesetz der Multiplikatoren des μ^{ten} Koeffizienten zu finden, nachdem der Bau desselben in Bezug auf m erkannt ist. Man wird ihm zu dem Ende eine ganz neue Form geben müssen, denn nach Potenzen und Produkten von p und q geordnet wird er kein einfaches Gesetz befolgen, ebenso wenig als die Binomialkoeffizienten $\frac{m(m-1)\cdots(m-t+1)}{1\cdot 2\cdots\cdot t}$ wenn man sie nach Potenzen von m entwickeln wollte, während sie doch in Form von Produkten so höchst simpel erscheinen. — Die Beweise der vorstehenden Sätze eignen sich nicht gut zu brieflicher Mitteilung.[1])

Zuerst hatte ich die Absicht, Ihnen noch über quadratische Formen mit mehreren Variabeln, namentlich über die Anzahl der nicht aequivalenten ternären Formen einiges mitzuteilen, aber da dieser Stoff unerschöpflich ist und dieser Brief doch schon für die Zeit eines Bräutigams zu lang geworden ist, so verschiebe ich dies auf das nächste Mal, da ich nun einen regelmässigen Briefwechsel zwischen uns hoffe, und schliesse den mathematischen Salm mit einem arithmetischen Theorem, dessen Beweis Sie suchen mögen: „Wenn p eine beliebige reelle Primzahl ist, und man nimmt in der Summe

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \cdots\cdot \pm (p-2) \qquad (\Omega)$$

alle möglichen Zeichenkombinationen, doch so, dass die Anzahl der negativen Zeichen jedesmal gerade ist, so geben die Reste (mod p) der so aus (Ω) hervorgehenden Zahlen erstlich gewissemale die Null, und ausserdem die Quadratreste einmal öfter als die Nichtquadratreste. Nimmt man aber die Anzahl der negativen Zeichen ungerade, so kommen umgekehrt die Nichtquadratreste einmal öfter vor als die Quadratreste; so dass man also durch dieses Verfahren auf lineare Weise die q-Reste und Nichtreste bestimmen kann, wenn man von allen (Ω) so viel als möglich vollständige Restensysteme (mod. p) fortlässt. Z. B. für $p = 7$ erhält man $1+3+5 \equiv 2$, $-1-3+5 \equiv 1$, $-1+3-5 \equiv 4$, $1-3-5 \equiv 0$ (mod. 7), und

1) Diese Sätze und ihre Beweise hat Eisenstein in dem ersten Teil seiner „Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen" veröffentlicht. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30, 1846; oder „Mathematische Abhandlungen von Dr. G. Eisenstein", Berlin 1847.)



in der That sind 1, 2, 4 die q-Reste; dagegen $-1+3+5\equiv 0$, $1-3+5\equiv 3$, $1+3-5\equiv 6$, $-1-3-5\equiv 5$, und 3, 5, 6 sind die q-Nichtreste."[1])

Nun zu guter Letzt, mein lieber Stern, will ich mich wieder wie ein vernünftiger Mensch betragen. Antworten Sie mir bald, natürlich ohne dabei etwas Nötigeres zu versäumen, schreiben Sie mir alle Neuigkeiten, die Sie wissen und nicht wissen, was es in Göttingen Interessantes giebt, besonders über Ihre Braut, wegen derer ich mich im Stande der Unschuld, d. h. gänzlicher Unwissenheit befinde. Schliesslich wiederhole ich meinen herzlichen Glückwunsch. Grüssen Sie mir vielmals Dr. Goldschmidt und die Familie Meyerstein. — Uebrigens werden Sie schon wissen, was mich interessieren kann, denn obwohl ich seit einem Jahre nichts von dorther erfahre, so habe ich doch nicht aufgehört, für Göttingen und seine Bewohner einen lebhaften Anteil zu nehmen. — Kann ich Ihnen hier in irgend etwas dienen, so finden Sie zu Allem bereit

Ihren ergebensten Freund

Gotthold Eisenstein.

Adresse: Dr. Eisenstein Jerusalemerstr. Nr. 63 parterre.

Berlin, 20. August 1845.

N. Friedländer war so eilig, dass er mir nur Ihre Karte in die Hand steckte, ich weiss also nicht einmal, ob Sie gegenwärtig in Göttingen sind; deshalb mache ich die Adresse sehr ausführlich.

III.

Berlin, 20. April 1846.

Mein lieber Stern!

Es wäre meine Pflicht gewesen auf Ihren herzlichen und liebevollen Brief, der mir die gröfste Freude bereitet hat, sogleich zu antworten. Aber teils ist meine Faulheit an der Verzögerung schuld, teils hatte ich gar keine rechte Lust auf die fatale Geschichte mit Jacobi wieder zurückzukommen. — Das ganze Rätsel ist, dass es Jacobi verdriefst, dass ich nicht sogleich, nachdem ich von seinen Arbeiten über Kreisteilung erfahren hatte, öffentlich seine Priorität anerkannt habe, während ich doch Gauss so oft anführe. Dass ich nun dies unterlassen habe, daran ist blofs meine

---

1) In seiner Abhandlung „Über eine der Teilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 61 (1863)) hat Stern diesen Satz, sowie eine Reihe ähnlicher Sätze bewiesen.

unschuldige Einfalt Schuld, da ich mich um dergleichen Äußerlichkeiten nicht kümmerte, sondern nur an die Wissenschaft selbst dachte; durch Gauss habe ich nun einmal meine mathematische Bildung erlangt, seine Leistungen sind mir geläufig, und desshalb führe ich ihn an; die Arbeiten von Jacobi sind mir erst zugänglich geworden, seit ich ihn persönlich kenne, d. h. seit er hier in Berlin ist. Muss man denn wirklich alles durchkramen, ehe man drucken lässt, ich glaubte, dass wenn man sich mit dem Crelle'schen Journal au fait erhält, man genug thut.

Inzwischen kann Jacobi selbst unmöglich daran glauben, dass ich ihm seine Sachen gestohlen habe, denn er hat eben auf diese meine früheren Arbeiten hin vor $^5/_4$ Jahren den Antrag zu meiner Doktor-Ernennung bei der Breslauer Fakultät gestellt. Uebrigens gebührt in den Beweisen der Reciprocitätssätze weder mir, noch Jacobi die Priorität, sondern Gauss; aber gedruckt sind die Beweise zuerst von mir erschienen; am Ende hat doch Jacobi auch nur gesagt, dass er die Beweise gefunden habe, Gauss hat dasselbe aber schon viel früher gesagt, Theoria residuorum biquadr. und schon an einem viel früheren Orte: demonstrationes et ampliationes novae etc., also: — hic aqua haeret.

Schon einige Zeit, ehe ich Ihren Brief erhielt, hatte ich ein Manuskript fertig, worin ich Jacobi in höchst gemäßigter Weise antworte und die Untersuchungen vereint zusammenstelle, welche ich in früherer Zeit über Kreisteilung angestellt hatte; denn was ich damals herausgab, war kaum die Hälfte dessen, was ich herauszugeben beabsichtigte, bis mir Jacobi in die Quere kam. Ich habe es aber aufgegeben, dieses Manuskript wenigstens für jetzt drucken zu lassen, denn einmal ist Jacobi außerdem ganz freundlich gegen mich, bis auf die allerletzte Zeit, wo ich ihn selten besuche, was aber an mir und nicht an ihm liegt, und dann darf ich ihn mir auch jetzt nicht erzürnen, weil ich meine Habilitation hier beabsichtige, wobei er mir einerseits nutzen andererseits aber auch sehr schaden kann.

Ich spreche eben von meiner Habilitation. Sie wissen, lieber Stern, dass nach den Statuten der Fakultät man drei Jahre Doktor sein muss oder vielmehr man drei Jahre schon das Triennium absolviert haben muss, ehe man sich habilitieren darf. Der Minister Eichhorn, der sehr freundlich für mich gesinnt ist, hat mich von diesem Formzwange dispensiert und es werden mir so drei Jahre erspart, denn ich hätte eigentlich erst zum Oktober dieses Jahres mein Triennium absolviert, müsste also eigentlich noch bis Oktober 1849 warten; es hindert mich jetzt weiter nichts an der Habilitation, als meine Militärpflicht.

Da Sie, mein lieber Stern, einen so liebevollen Anteil an meinem Kummer nehmen, so werden Sie gewiss eine eben so freundliche Gesinnung

bei dem Angenehmen beweisen, was mich betrifft. Es ist mir eine grofse Freude geworden. Ich weifs nicht, ob ich Ihnen mitgeteilt habe, dass Gauss mir im vorigen Frühjahr einen sehr interessanten Brief geschrieben hat. Gauss hat sich nun im vorigen Winter und jetzt wieder vor einigen Tagen, auf mathematische Mitteilungen hin, die ich ihm gemacht, zu Al. v. Humboldt schriftlich über mich ausgesprochen, in Worten, die mich vollkommen über Jacobi's Angriff zu trösten geeignet sind; A. v. Humboldt hat mir die Briefe mitgeteilt; ich würde Ihnen eine Abschrift schicken, wenn ich nicht fürchten müsste, dass Sie mich für eitel hielten und ich dadurch in Ihrer Achtung, die mir so teuer ist, sinken könnte.

Aufser dieser wissenschaftlichen Anerkennung und Freude ist aber mein Leben sehr freudlos. Die Mathematik allein kann nicht glücklich machen und sie ist so schwierig, dass man nur selten die Genugthuung hat, einen Schritt vorwärts zu kommen. Es fehlt mir hier an aller Geselligkeit, mit meinen Verwandten bin ich ganz zerfallen, denn dies sind Geldleute, die mich nicht verstehen und die ich nicht verstehe, die Fachgelehrten sind wieder zu hoch erhaben und zu stolz, als dass es zu einer rechten Innigkeit kommen könnte. Mit Heine und Kronecker ging ich früher viel um und diese passten zu mir, aber der erste ist jetzt Privatdocent in Bonn, der zweite Gutsbesitzer bei Liegnitz, Joachimsthal ist ganz Schulmeister geworden und ich finde bei ihm daher auch keinen Anklang. In dieser meiner melancholischen Isolierung fühle ich eine tiefe Sympathie für die zarte Verbindung, die Sie eingegangen sind; möchten Sie, von einem Sie liebenden Wesen stets umgeben, Ihre Tage glücklicher zubringen, als ich es thue. Leben Sie herzlich wohl.

Mit freundschaftlichster Hochschätzung

Ihr

Eisenstein.

Bitte, schreiben Sie mir genau Ihre Adresse. Die meinige ist Jerusalemerstrafse 63.

Was meinen Sie mit Gött. Gel. Anz. 1815, Stück 104?

IV.

Anfang eines Briefes vom Sommer 1847.

Mein lieber Stern!

Seien Sie nicht böse auf mich, dass ich so lange nichts habe von mir hören lassen; ich habe nichts desto weniger stets an Sie und Ihre freundliche Gesinnung für mich mit Dankbarkeit und Liebe gedacht. Aber einen unmathematischen Brief wollte ich Ihnen nicht schreiben, und es bot sich

nichts dar, was für die Kürze einer brieflichen Mitteilung passend gewesen wäre und was ich Ihnen ohne lange Auseinandersetzungen klar machen könnte; auch sind die schlechten Federn schuld; halten Sie dies Argument nicht für unbedeutend, denn so wie mich eine wohlschmeckende Cigarre zu einer mathematischen Idee begeistert, so eine gutbeflügelte Feder zu einem inhaltreichen Briefe. Ausserdem habe ich diese Zeit über so viele Allotria getrieben und so wenig mathematisch gearbeitet, dass ich mich vor Ihnen schämen musste, ja Sie sogar als Kritiker fürchten musste. Ich hoffe aber, dass dieser Brief Sie, lieber Stern, durch einige mathematische Stellen versöhnen wird und dass ich durch ein paar in Crelle's Journal erscheinende schon unter der Presse schwitzende Abhandlungen, wenn auch nicht meine Sünden vollständig abbüſsen, so doch mein Gewissen einigermassen erleichtern werde.

Herr Riemann, durch welchen ich Ihre Karte nebst den freundlichen Worten darauf erhalten habe, scheint einer der wenigen zu sein, welche sich in der Zahlentheorie recht lobenswerte Kenntnisse erworben haben. Er wird an einem Privatissimum Teil nehmen, welches ich in diesem Sommer über elliptische Funktionen lesen werde. Bitte recht sehr, suchen Sie doch meinem lieben Freunde dem Amerikaner Gould, der jetzt in Göttingen ist, ein wenig die Zeit zu vertreiben und nehmen Sie Sich, wenn Sie können, angelegentlichst seiner an; er ist ein sehr lieber junger Mann, der bei seinem Vorhaben sich in Europa astronomisch auszubilden leider durch den Mangel an Teilnahme bei unsern Gelehrten schon sehr gekränkt und enttäuscht worden ist.

Mein Verhältnis zu den hiesigen Gelehrten noch immer beim Alten; auch würde mir eine Annäherung nichts nutzen, da jene ihren Stolz und ihr aristokratisches Benehmen gegen mich nie ablegen werden. Ich stehe also ganz allein.

Was Sie anbetrifft, lieber Freund, so . . . .
. . . .

V.

Berlin, Januar 1848.

Mein lieber Stern!

Mit der Redaktion einer mathematischen Abhandlung beschäftigt, welche Ihnen sehr nahe liegt, und welche, wie ich hoffe oder mir zu schmeicheln wage bei ihrem Erscheinen Ihnen einige Freude machen wird, so wie auch von Vorlesungen an der Universität in Anspruch genommen, reisse ich mich los, um endlich an Sie, werter Freund, zu schreiben. Es ist dies nicht das erste Mal seit einer langen Zeit, dass ich die Feder zu diesem Zwecke in die Hand nehme, es liegen zwei halb angefangene Briefe noch

vom Sommer her, in welchen ich mich mit Ihnen unterhalten wollte, aber ich bin nicht fertig geworden, und ich erlaube mir, hier eine Probe von diesen Versuchen beizulegen, auch dem guten vortrefflichen Gould, den ich Ihnen in meinem Schreiben empfehlen wollte, habe ich auf seinen so liebreichen und herzlichen Brief an mich nicht geantwortet, was mich immer schmerzlich foltert; gewiss ist er jetzt nicht mehr in Göttingen und glaubt, dass ich eine kalte Gesinnung gegen ihn hege, wovon gerade das Gegenteil der Fall ist. Ehe ich aber zu dem Grunde meines langen Schweigens übergehe, will ich Ihnen den Gegenstand meiner jetzigen Abhandlung mitteilen; doch vor allen Dingen erkundige ich mich nach Ihrem Befinden und nach dem Ihrer Familie auf's Angelegentlichste, so wie nach dem Befinden aller derer in Göttingen, welche mich etwas lieben nicht blos für einen nicht ganz schlechten Mathematiker halten, was ein grofser Unterschied ist; sollte Gould noch da sein, so grüssen Sie ihn recht herzlich von mir und versichern ihn meiner dauernden Freundschaft, so wie dass sein Andenken eine wohlthuende Erinnerung für mich bleiben wird und dass ich wohl wünschte, die Verhältnisse möchten uns einmal noch im Leben zusammen führen, auch mag er nicht zu sehr zürnen, dass ich nicht geantwortet habe; aber gewiss ist er nicht mehr da, bitte dann schreiben Sie mir doch über seinen jetzigen Aufenthaltsort, wenn Sie ihn wissen.

In meiner jetzigen Abhandlung[1]), die wahrscheinlich bald zum Drucke kommen wird, da ich schon bei der Redaktion der letzten Bogen stehe, beweise ich Ihren Satz über die Bestimmung von c für die Primzahlen $q = 8n + 3 = c^2 + 2d^2$ durch eine Kongruenz (mod. q); dieser Satz bildet allerdings den Anfang zu einer ganz neuen Reihe von Sätzen dieser Art, indem bei denjenigen Sätzen dieser Gattung, welche unmittelbar die Kreisteilung ergiebt, die zu der Zerfällung gehörige Determinante, wie hier 8, ein Teiler von $q - 1$ sein muss; so kann man z. B. für die Primzahlen $q = 7n + 1$ die Zerfällung $A^2 + 7B^2$ durch die Kreisteilung bestimmen, aber nicht für die Primzahlen $7n + 2$ und $7n + 4$, welche dieselbe Zerfällung zulassen; ich erinnere mich, schon in Göttingen mit Ihnen über diesen Gegenstand gesprochen zu haben, aber nicht mehr genau. Sie sagen in Ihrer Notiz, die Theorie der Reste schiene nicht die wahre Quelle solcher Sätze zu sein; dies ist aber doch der Fall, und meine Methoden, die ich schon in früheren Abhandlungen auf andere Gegenstände angewandt habe, sind allgemein genug, um auch solche Sätze, wie z. B. der für die Primzahlen $8n + 3$ daraus ableiten zu können. Ich beweise in meiner

1) Die Abhandlung ist unter dem Titel „Zur Theorie der quadratischen Zerfällungen der Primzahlen $8n + 3$, $7n + 2$ und $7n + 4$" im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37 erschienen.



jetzigen Abhandlung noch die beiden folgenden Sätze, welche wahrscheinlich ganz neu und noch unbekannt sind. (Ich muss jetzt fort nach der Universität, um Vorlesung zu halten.)

„Ist q eine Primzahl $7n + 2 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q) und hieraus ergiebt sich A positiv oder negativ, je nachdem es abgesehen vom Zeichen $\equiv 3$ oder $\equiv 4$ (mod. 7) ist." Z. B. für $q = 23$ ist $n = 3$, $2A \equiv \frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \equiv 3\cdot 4\cdot 7$ $\equiv 84$ (mod. 23) $= 4\cdot 23 - 8 \equiv -8$, also $A = -4$, und in der That ist $23 = 4^2 + 7$, ferner hat sich $A = -4$ negativ ergeben, weil der absolute Wert $\equiv 4$ (mod. 7).

„Ist q eine Primzahl $7n + 4 = A^2 + 7B^2$, so hat man $2A \equiv \frac{(3n+1)3n(3n-1)\cdots(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$ (mod. q), und A wird hieraus positiv oder negativ, je nachdem sein absoluter Wert $\equiv 2$ oder $\equiv 5$ (mod. 7) ist." Beispiele geben $q = 11, 39, 53$ u. s. w.

Die Principien, auf welchen diese Sätze beruhen, können entweder aus der Theorie der elliptischen Funktionen geschöpft werden, wovon bei einer andern Gelegenheit, oder sie sind rein arithmetischer Natur. Ich fange damit an so wie ich bei der Zerfällung $A^2 + B^2$ die complexe Zahl $A + Bi$, ebenso $A + B\sqrt{-2}$ für $A^2 + 2B^2$ oder $A + B\sqrt{-7}$ für $A^2 + 7B^2$ u. s. w. durch eine endliche Reihe auszudrücken. Um bei $A^2 + 2B^2$ stehen zu bleiben, so kann für $q = 8n + 1$ eine solche Reihe aus der Kreisteilung genommen werden, aber nicht so für $q = 8n + 3$. Im letzteren Falle finde ich jedoch durch meine sehr einfachen Betrachtungen eine ebenfalls sehr einfache Reihe als Ausdruck für $A + B\sqrt{-2}$. Da q nicht von der Form $4n + 1$ ist, so umfasst ein vollständiges Restensystem (mod. q) mit Ausschluss der Null $q^2 - 1$ complexe Zahlen von der Form $x + yi$ und für alle diese ist $(x + yi)^{q^2-1} \equiv 1$, also $(x + yi)^{\frac{q^2-1}{4}} \equiv$ irgend einer Potenz von i, und wenn $F^2 \equiv i$ (mod. q) gesetzt wird, $(x + yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv$ irgend einer Potenz von F; es sei $\omega^2 = i$, also ω eine primitive 8[te] Wurzel der Einheit, und es bezeichne das Symbol $[x + yi] = \omega^\mu$, wenn $(x + yi)^{\frac{q^2-1}{8}} \equiv F^\mu$ (mod. q) ist; ich finde dann

$$A + B\sqrt{-2} = [1] + [1 + i] + [1 + 2i] + [1 + 3i] + \cdots$$
$$+ [1 + (q-1)i] = \sum_{y=0}^{y=q-1} [1 + yi];$$

und wenn überhaupt $\Sigma[1 + yi]^\nu = \varphi(\omega^\nu)$ gesetzt wird, so ist

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega^3) = A + B\sqrt{-2}, \quad \varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^7) = A - B\sqrt{-2},$$
$$\varphi(\omega)\,\varphi(\omega^5) = \varphi(\omega^3)\,\varphi(\omega^7) = q, \ \varphi(\pm i) = 1, \ \varphi(-1) = -1, \ \varphi(1) = q;$$

aus den letzten drei Formeln ergiebt sich besonders die Bestimmung des Vorzeichens von A durch eine Kongruenz (mod. 4); aus den ersten beiden folgt $2A = \varphi(\omega) + \varphi(\omega^5) \equiv \varphi(F) + \varphi(F^5)$ (mod. q); nun sieht man leicht, dass nach der Definition der Symbole [] man haben muss

$$\varphi(F) \equiv \Sigma(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}, \quad \varphi(F^5) \equiv \Sigma(1 + yi)^{5\frac{q^2-1}{8}};$$

es bleibt also in letzter Instanz die Diskussion dieser beiden Summen; diese Diskussion, welche gar nicht leicht ist, liefert mir nun die erste Summe $\equiv 0$ und die zweite $\equiv$ Ihrem Binomialkoeffizienten; erschwert aber auch interessant gemacht wird die Diskussion besonders dadurch, dass die Potenzen $(1 + yi)^{\frac{q^2-1}{8}}$ und $(1 + yi)^{5\cdot\frac{q^2-1}{8}}$, da der Exponent $> q$ ist, in ihrer Entwickelung nach dem binomischen Satze sehr viele Potenzen von y enthält, deren Exponenten durch $q - 1$ teilbar sind, während bei den Betrachtungen von Gauss am Schluss von Theor. res. biq. I nur eine solche Potenz, nämlich y^{q-1} erscheint. Dies sind Grundzüge in flüchtiger Kürze, wegen des näheren Details und fernerer Anwendungen muss ich Sie auf meine Abhandlungen verweisen oder besser gesagt, vertrösten. Von elliptischen Funktionen ist hier an keiner Stelle die Rede, die aus ihnen folgenden Principien bilden eine ganz für sich stehende eigene zweite Methode zum Beweise solcher Sätze, worüber ich an Gauss im vorigen Sommer eine kleine Mitteilung gemacht habe; der Gaussische Satz z. B. folgt unmittelbar aus den einfachsten Eigenschaften der lemniscatischen Funktionen, denn es sei m eine primäre zweigliedrige complexe Primzahl, m' die conjugirte Zahl $mm' = p$ die Norm von m eine reelle Primzahl $4n + 1$; der Differenzialgleichung (1.) $\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ genüge. (2.) $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1}$ in inf., dann sind alle Koeffizienten a_1, a_2 u. s. w. durch m teilbare ganze Zahlen, mit alleiniger Ausnahme von a_p, welcher $\equiv 1$ (mod. m) ist; setzt man $y = a_p x^p + mR$, so hat R lauter ganze (complexe) Koeffizienten, R enthält die Potenz x^p nicht und man hat gewissermassen $y \equiv x^p$ (mod. m), da $a_p \equiv 1$ (mod. m); setzt man nun in die Differenzialgleichung nachdem man ihr die Form $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^4}{1-x^4}}$ gegeben, x^p für y, so kommt

$$\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} \equiv \sqrt{\frac{1-x^{4p}}{1-x^4}} \equiv \sqrt{\frac{(1-x^4)^p}{1-x^4}} \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}} \text{ (mod. } m);$$

nun ist $\frac{dy}{dx} = p a_p x^{p-1} + mR'$, $\frac{1}{m}\frac{dy}{dx} = m' a_p x^{p-1} + R' \equiv m' x^{p-1} + R'$ (mod. m) wegen $p \equiv mm'$, $\frac{p}{m} = m'$; also geht die vorhergehende Kongruenz in $m' x^{p-1} + R' \equiv (1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$ (mod. m) über; vergleicht man auf beiden die Koeffizienten von x^{p-1} und bemerkt, dass diese Potenz x^{p-1} in R' nicht vorkommt, weil x^p in R nicht enthalten ist $\left(R' = \frac{dR}{dx}\right)$, so erhält man $m' \equiv$ dem Koeffizienten von x^{p-1} in $(1 - x^4)^{\frac{p-1}{2}}$, d. h. $m' \equiv$ dem Gaussischen Binomialkoeffizienten (mod. m) u. s. w. Diese Untersuchungen nebst mehreren anderen arithmetischen Anwendungen der elliptischen Funktionen werden vielleicht auch bald das Licht erblicken. Ich mache Sie noch besonders hierbei auf diejenige fruchtbare Erweiterung des Begriffs der Kongruenz aufmerksam, wonach zwei unendliche Reihen nach Potenzen von x $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ und $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$ kongruent heissen, wenn $a_0 \equiv b_0$, $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$ etc. ist; die Konvergenz oder Divergenz der Reihen bleibt hier ganz aus dem Spiel. — In Bezug auf die unendlichen Reihen nach Potenzen von x verspricht besonders der folgende Satz über die Entwickelungskoeffizienten der algebraischen Funktionen viel für die Arithmetik.

„Es seien $f_1(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$, $f_2(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ u. s. w. $f_n(u_1, u_2, \cdots u_n, x) = 0$ n algebraische Gleichungen zwischen den $n+1$ Variabeln $u_1, \cdots u_n, x$, vermöge welcher Gleichungen jedes u eine algebraische Funktion von x ist; es wird angenommen, dass $f_1, f_2, \cdots f_n$ als rationale ganze Funktionen von $u_1, u_2, \cdots x$ mit rationalen Koeffizienten gegeben sind; entwickelt man u als Funktion von x nach steigenden Potenzen von x, so werden die Koeffizienten der Entwickelung, wenn sie rational sind, lauter Nenner haben, welche nur durch eine bestimmte endliche und begrenzte Anzahl von Primzahlen teilbar sind; diese Primzahlen sind die Teiler einer bestimmten Zahl $\triangle$, welche man so erhält: man bilde die Determinante aus den Differenzialquotienten

$$\left.\begin{matrix} \frac{df_1}{du_1}, & \frac{df_1}{du_2}, & \frac{df_1}{du_3}, & \cdots & \frac{df_1}{du_n} \\ \frac{df_2}{du_1}, & \frac{df_2}{du_2}, & \frac{df_2}{du_3}, & \cdots & \frac{df_2}{du_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df_n}{du_1}, & \frac{df_n}{du_2}, & \frac{df_n}{du_3}, & \cdots & \frac{df_n}{du_n} \end{matrix}\right\}$$

und setze statt $u_1, u_2 \cdots u_n$ die simultanen Wurzeln der n Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ f_2(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(u_1, \cdots u_n, 0) = 0 \end{array}\right\}$$

und mache rational. Die Konstante, welche man erhält, ist $\triangle$.[1]) Dieser Satz und mehrere dieser Art bilden characteristische Unterschiede zwischen den algebraischen und den transcendenten durch Differenzialgleichungen bestimmten Funktionen; wenn aber eine Differenzialgleichung oder ein System von Differenzialgleichungen sich algebraisch integrieren lässt, so erhält man durch Anwendung jener Sätze merkwürdige Resultate, indem man die Reihenentwickelung mit Hülfe der Differenzialgleichungen vornimmt; Specielleres hierüber bei einer anderen Gelegenheit; zum besseren Verständnis will ich Sie nur auf die Entwickelung von $\lg(1 + x)$ aufmerksam machen, wo die Nenner der Koeffizienten $1, 2, 3, \cdots$ nämlich nach der Reihe alle ganze Zahlen sind, so dass man immer Nenner findet, welche durch eine beliebige noch so grosse Primzahl teilbar sind; dergleichen kann bei algebraischen Funktionen nie stattfinden, sondern die Anzahl der Primzahlen, welche in den Nennern der Entwickelung aufgehen, ist begrenzt.

Nun will ich Sie nicht länger mit mathematischen Verirrungen quälen, denn vielleicht sind Sie eben mitten in praktisch populärer Astronomie oder gar in Familien-Sorgen und -Freuden, und ich komme mit meiner Zahlentheorie sehr ungelegen, vielleicht habe ich jedoch auch gerade eine glückliche Stunde getroffen. Ein Onkel von mir behauptet, dass man nur irgend jemand aus dem Tollhause oder Irrenhause zu nehmen brauchte, das würde gewiss der beste Mathematiker sein; ich sage dazu und so meint auch Dirichlet, man könne allenfalls behaupten, die Mathematik sei überhaupt eine Verirrung, deshalb braucht aber nicht jede Tollheit mathematischer Natur zu sein. Besagter Onkel, der, wie alle meine Verwandten (ich Glücklicher in ihrer Mitte?) die Menschen nur nach ihrem Werte (des Geldes) schätzt, meinte auch, als ich ihm mit vieler Mühe durch Beispiele die Zerlegbarkeit der Primzahlen $4n + 1$ in zwei Quadrate und die Nichtzerlegbarkeit derer $4n + 3$ darthat, „allerdings sei es merkwürdig, aber es gehöre der hyperimaginärste Grad von Verrücktheit dazu, auf so etwas zu

1) Eisenstein hat eine kurze Mitteilung über diesen Satz in den Monatsberichten der Berliner Akademie (vom Juli 1852) veröffentlicht. Beweise des Satzes wurden von Heine (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 48) und Hermite (Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7) gegeben.



verfallen, was ist das schon für Unsinn 'ne Primzahl, nu machen se da noch 'nen Unterschied zwischen $4n+1$ und $4n+3$, was kommt mer davon heraus"; die Goldmachekunst ist freilich weit besser. Dieser ist noch der geistreichste von meinen Verwandten, nun urteilen Sie über die andern und welche Rolle ich unter ihnen spielen muss. Aber lieber Eisenstein, was kümmern Sie Ihre Verwandten, lassen Sie die doch laufen; ja das thue ich auch, aber es kümmert sich auch sonst Niemand um mich, so dass ich gänzlich isoliert stehe und doch zuweilen gezwungen bin, zu meinen Verwandten zu gehen. Diese Betrachtungen führen mich auf ein anderes Thema, nämlich die gänzliche Zerrissenheit und Trostlosigkeit meines Gemütes, als Ursache meines langen Schweigens.

Ich müsste lügen, lieber Stern, wollte ich Mangel an Zeit als Grund meines Schweigens vorschützen, sondern es ist vielmehr eine mir Alles verleidende Mutlosigkeit, welche aus der Ungunst meiner Verhältnisse entspringt. Ich spreche hier durchaus nicht von pekuniären Verhältnissen, denn ich kann mit wenigem auskommen, da ich nur wenig Bedürfnisse habe und ich bekomme vom König 500 ℛ jährlich; durch Geld kann mir auch garnicht geholfen werden, denn ob ich etwas besser esse, wohne, mehr Bequemlichkeit habe, das ist sehr gleichgültig; aber es fehlt mir jede geistige Nahrung und Erhebung aufserhalb der Mathematik und im Umgange mit Menschen, die es wahrhaft gut mit mir meinen, jedoch nicht so hoch über mir stehen, dass der Umgang ein blofses steifes Ceremoniel bleibt. Wenn ich nun meinen Kopf durch mathematische Spekulationen zerarbeitet habe, so kann ich mir nachher durchaus keine Erheiterung des Geistes verschaffen, die mir nur aus einer gemütlichen Geselligkeit hervorgehen würde, d. h. einer solchen, wo ich mich nicht zu genieren brauchte, nicht immer geistreich sein müsste, sondern mich gehen lassen könnte, wie ich wollte und wie ich nun einmal bin. Es ist so unendlich schwer, aus dem Kreise herauszukommen, in dem man nun einmal geboren ist, ja für mich unmöglich, da ich mich mit Dingen beschäftige, die so wenige Menschen interessieren, und also so wenige oder gar keine Anknüpfungspunkte finde; und wie die Wenigen, welche gleiche Beschäftigung haben, sich gegen mich benehmen, wissen Sie ja; Dirichlet ist jetzt ganz freundlich gegen mich, aber es bleibt kalte Höflichkeit, er ist Professor, ich bin Privatdocent. Wie ich seit langer Zeit lebe, könnte ich mir eben so gut ein Haus auf einer wüsten Insel bauen lassen, ich würde dann Fische sehen, statt kalter steifer und liebeleerer Menschen. Es sind dies nicht etwa hypochondrische Gedanken, sondern meine Worte gehen aus einer klaren Einsicht der Verhältnisse und dessen, was mir fehlt, hervor; manche Menschen sind sich selbst genug, ich bin nicht so glücklich, sondern mich foltert die fort-

währende Sehnsucht nach Liebe und Zuneigung der Menschen und nach gemütlicheren Verhältnissen, mathematische Beschäftigung ist für mich eine Art Betäubung, um mich vor Melancholie zu retten, so wie für andere Menschen Wein oder Branntwein; daher ist meine Stimmung am düstersten gerade nach Absolvierung eines schwierigen mathematischen Problems, da ich dann recht einsehe, wie sich hierdurch doch garnichts in meiner Lage ändert. Indem ich nun immer mehr einsehe, dass ich selbst mir hierin nicht helfen kann und Andere mir nicht helfen wollen, so bin ich gänzlich meines Daseins überdrüssig geworden und ich vegetiere nur so fort, indem ich mich, wie gesagt, durch mathematische und andere Beschäftigung betäube; so treibe ich schon seit einem Jahre Anatomie und Physiologie und höre eifrig Johannes Müller's Vorlesungen, auch musiziere ich oft, doch Alles kann keine Zufriedenheit gewähren, da ewig das fehlt, was ich wünsche. Dass wirklich mein Unglück in den Verhältnissen liegt, sehe ich an einzelnen Lichtblicken, wenn etwas sich hierin zu ändern scheint, dann komme ich mir gleich wie ein ganz anderer Mensch vor, aber es sind nur Täuschungen und es wird gleich wieder dunkle Nacht, d. h. es bleibt Alles beim Alten. Wenn Sie einige Freundschaft für mich empfinden, so werden Sie mich vielleicht verstehen, von Hause aus bin ich gewiss kein Hypochonder, man bringe mich nur in heitere Verhältnisse (nicht glänzende), so werde ich der heiterste Mensch sein. Ich wollte Sie nicht mit Klagen belästigen lieber Stern, denn ich weifs, man macht sich dadurch unliebenswürdig und verscheucht seine Freunde; eben um nicht zu klagen, habe ich solange nicht geschrieben; mögen Sie eben so glücklich sein, als Ihr Freund unglücklich.

Verzeihen Sie, dass ich den Satz über die Primzahlen $8n + 1$ in meiner Abhandlung den Stern'schen Satz nenne, es ist ebenso, wie mit dem Legendre'schen Reciprocitätssatze. Das Papier geht zu Ende; leben Sie recht wohl. Mit den herzlichsten Wünschen

Ihr

Berlin 10./2. 48. Gotthold Eisenstein.

Bitte um baldige Antwort, damit der Briefwechsel nicht abermals ins Stocken gerät.

VI.

November 1848.

Lieber Stern.

Wenn man lange nicht geantwortet hat, so schämt man sich und diese Scham wächst mit der Zeit wie eine Lawine, so dass man das Antworten immer wieder aufs Neue aufschiebt; doch hoffe ich diesmal noch Verzeihung, indem ich jetzt so spät erst die Feder ergreife. Ich darf

doch nun jedenfalls zum Professor gratulieren, ohne dass Sie Sich darüber ärgern werden; ich betrachte dies, nämlich Ihre Professur, als eine der Errungenschaften unserer Freiheitsperiode, die nun bald aufhören wird, da mir nach den Wiener Ereignissen die jetzt hier stattfindende Waffenauslieferung der letzte Schlussstein zur Unterdrückung der von Frankreich ausgegangenen Bewegung zu sein scheint. Ich schreibe dies während Berlin in Belagerungszustand erklärt ist. Doch ich will nichts von Politik schreiben, einmal weil dies ein zu langes und jetzt zu abgedroschenes Kapitel wäre, und dann auch, weil man nicht genau wissen kann ...[1]).

Jedenfalls, die Dinge mögen kommen, wie sie wollen, so haben Sie das Angenehme der Freiheit genossen, es wird Ihnen aber leider durch den Anblick des jetzigen Rückschrittes verbittert werden. Ich dagegen, was mich persönlich betrifft, habe nur das Bittere von der Freiheit zu kosten bekommen; denn obgleich ich mich nicht im Mindesten thätig in die Politik gemischt habe, sondern nur einigemal die Clubs besuchte, was jeder that, ohne aber Reden zu halten, so bin ich doch, blos desshalb schon, von den Räten des Ministeriums, gewiss in Folge von Verläumdungen, als Republikaner angefahren worden. Sie wissen vielleicht, dass ich aus dem Königlichen Fond jährlich eine Unterstützung von 500 Thaler beziehe; dieses Geld ist aber schlimmer als nichts, denn ich hänge dadurch ganz speciell von der Gnade des Königs ab, und das ist, wie Sie wohl denken können, in jetzigen Zeiten sehr übel. Ich bin überzeugt, dass welcher Umschwung aller Verhältnisse in politischer und socialischer Hinsicht auch stattfinden möge, man doch Männern, namentlich Gelehrten, die bereits in Amt und Brod sind, schwerlich das Ihrige entziehen wird; jedoch wird man sich auch ebenso wenig um Menschen, wie ich z. B., kümmern, die eine vorübergehende Unterstützung ohne feste Stellung geniessen, denn die meinige läuft zum 1. Januar ab; ich habe schon alle möglichen Schritte beim Ministerium zu deren Verlängerung gethan, auch habe ich die besten Versicherungen erhalten, aber noch nichts Schwarz auf Weiss, was in solchen Angelegenheiten die Hauptsache ist. Wenn Sie also für mich irgend eine Stellung wissen, sei sie auch noch so schlecht, so werden Sie mich gewiss nicht ekel finden, dieselbe anzunehmen; denn nur darin bin ich ekel und das drückt mein Gemüt, wenn ich von der Gnade selbst des Königs abhängen soll, ich möchte nur das, was mir rechtmässig zukommt. Ich kann auch erst dann zu einigem Frohsinn und zur vollen Entwickelung meiner Kräfte gelangen, wenn ich aus meiner jetzigen, nicht gerade schlechten, aber doch gleichsam in der Luft schwebenden ökonomischen Lage heraus bin.

---

1) Die folgenden Worte sind durchgestrichen.

Ich mache hier eine Pause und lege die Feder nieder, da mich das lange Schreiben zu sehr anstrengt, denn ich bin schon seit 4 Wochen sehr krank an Fieber, Husten und Schnupfen, sogenannter Grippe, der Arzt fürchtet ein Nervenfieber, wenn ich mich nicht sehr schone. Ich werde aber bald meinen Brief fortsetzen, wenn ich mich wieder wohler fühle.

Sind Sie Ihrem Vorsatze, sich in die Zahlentheorie wieder hineinzuarbeiten, treu geblieben? Ich möchte gerne, was ich könnte, dazu beitragen.

VII.

Berlin, 12. Juli 1849.

Lieber Stern!

Da ich heute an Gauss einen Brief abschicke, so kann ich Sie nicht ohne einige Zeilen lassen. Sie müssen nicht glauben, dass ich die ganze Zeit über nicht an Sie gedacht habe; das Gegenteil beweist beiliegender Anfang eines Briefes schon vom November 48; einen zweiten umfangreichen Brief habe ich im März c. geschrieben, er schien mir aber nachher zu melancholisch und unmathematisch und ist verworfen worden. Ich wollte gern mich recht mit Ruhe im Schreiben an Sie ergehen und Ihnen eine Menge mathematischer und unmathematischer Mitteilungen machen, aber ich bin nicht dazu gekommen. Heute nur ganz kurz; erwarten Sie aber bald einen inhaltreichen Brief oder mich selbst, wenn ich Ihnen angenehm bin. Ich hätte wirklich Lust jetzt auf ein paar Wochen nach Göttingen zu kommen, weiss aber noch nicht recht, wie es sich mit der Kasse vertragen wird; bin ich Ihnen willkommen? — Ich hoffe, dass bei Ihnen Alles gut geht und dass Ihre Familie nicht irgendwie Unangenehmes durch den Krieg in der Pfalz, der doch auch Frankfurt berührt, erlitten hat. Grüssen Sie vielmals Ihre Frau Gemahlin, Herrn Goldschmidt und Alle, die in Göttingen einen freundschaftlichen Anteil an mir nehmen. In meinen Verhältnissen hat sich nichts geändert und schwebe ich, um es kurz zu sagen, noch immer in der Luft.

Den herzlichsten Dank für Ihre liebevolle und trostreiche Zusprache in Ihrem Briefe. Nur eine ganz kurze mathematische Mitteilung. Ich zweifle, dass Sie irgend Formeln zwischen Binomialkoeffizienten vorbringen können, die nicht in folgenden allgemeinen Sätzen enthalten sind. Es sei q wie immer eine ungerade pos. Primzahl; das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$ sei mit $n!$ bezeichnet. Wenn $a + b = q - 1$, so ist $1 \cdot 2 \cdots q - 1$ $= (1 \cdot 2 \cdots a)(q - 1 \cdot q - 2 \cdots q - b) \equiv (-1)^b a!\, b! \equiv (-1)^a a!\, b!$, also nach dem Wilson'schen Satze

$$1)\quad a!\, b! \equiv (-1)^{a+1} \equiv (-1)^{b+1} \pmod{q} \text{ wenn } a + b = q - 1.$$

Es sei jetzt ϑ eine beliebige Zahl $< q$ und $n\vartheta$ ein Vielfaches von ϑ ebenfalls $< q$; dann ist

$$(n\vartheta)! = (\vartheta \cdot 2\vartheta \cdot \cdots \cdot n\vartheta)\,\big(1.\ (\vartheta+1)\,(2\vartheta+1)\cdots((n-1)\,\vartheta+1)\big)$$
$$\big(2.\ (\vartheta+2)\,(2\vartheta+2)\cdots((n-1)\,\vartheta+2)\big)$$
$$\cdots\big((\vartheta-1)(\vartheta+\vartheta-1)(2\vartheta+\vartheta-1)\cdots\big)$$

d. h. $=$

$$\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta+1)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta+2)\cdot\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta+3)\cdots\prod_{\sigma=0}^{n-1}(\sigma\vartheta+\vartheta).$$

Setzt man

$$q=e_1\vartheta+r_1,\ 2q=e_2\vartheta+r_2,\ 3q=e_3\vartheta+r_3,\cdots(\vartheta-1)q=e_{\vartheta-1}\vartheta+r_{\vartheta-1},$$

so sind alle $r < \vartheta$ wieder die Zahlen $1, 2, 3, \cdots \vartheta-1$ in anderer Reihenfolge, folglich

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta+r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta+r_2)\,\Pi(\sigma\vartheta+r_3)\cdots\Pi(\sigma\vartheta+r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta+\vartheta)$$

Π erstreckt sich immer von $\sigma = o$ bis $\sigma = n-1$.

Aber es ist $r_1 \equiv -e_1\vartheta$, $r_2 \equiv -e_2\vartheta$, $\cdots r_{\vartheta-1} \equiv -e_{\vartheta-1}\vartheta$ (mod. q), folglich

$$(n\vartheta)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\cdot\Pi(\sigma-e_1)\,\Pi(\sigma-e_2)\cdots\Pi(\sigma-e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma+1)\ (\text{mod. } q).$$

Man hat auch, wenn $\vartheta-r_1$, $\vartheta-r_2$, $\cdots \vartheta-r_{\vartheta-1}$ statt r_1, r_2 etc. gesetzt werden, was ebenfalls erlaubt ist,

$$(n\vartheta)! = \Pi(\sigma\vartheta-r_1)\,\Pi(\sigma\vartheta-r_2)\cdots\Pi(\sigma\vartheta-r_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta),$$

wo jetzt σ von 1 bis n sich erstreckt; also auch wegen $-r_1 \equiv e_1\vartheta$, $-r_2 \equiv e_2\vartheta$ etc.

$$(n\vartheta)! \equiv \Pi(\sigma\vartheta+\vartheta e_1)\,\Pi(\sigma\vartheta+\vartheta e_2)\cdots\Pi(\sigma\vartheta+\vartheta e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma\vartheta)$$
$$\equiv \vartheta^{n\vartheta}\,\Pi(\sigma+e_1)\,\Pi(\sigma+e_2)\cdots\Pi(\sigma+e_{\vartheta-1})\,\Pi(\sigma)\ (\text{mod. } q).$$

Nun ist $\prod_{\sigma=1}^{\sigma=n}(\sigma+e) = (1+e)(2+e)(3+e)\cdots(n+e)$ nichts anders als $\frac{(n+e)!}{e!}$, folglich hat man

$$(n\vartheta) \equiv \frac{\vartheta^{n\vartheta}n!\,(n+e_1)!\,(n+e_2)!\cdots(n+e_{\vartheta-1}!)}{e_1!\,e_2!\cdots e_{\vartheta-1}!}\ (\text{mod. } q),$$

wo $\qquad e_1 = E\left(\frac{q}{\vartheta}\right),\ e_2 = E\left(\frac{2q}{\vartheta}\right),\ \cdots e_{\vartheta-1} = E\left(\frac{(\vartheta-1)q}{\vartheta}\right)$

ist, nach der Legendre'schen Bezeichnung der grössten Ganzen; da nun allgemein

$$E\left(\frac{(\vartheta-\alpha)q}{\vartheta}\right)+E\left(\frac{\alpha q}{\vartheta}\right) = q-1,$$

so hat man nach dem ersten Satze

$$e_1!\, e_{\vartheta-1}! \equiv (-1)^{e_1+1},\quad e_2!\, e_{\vartheta-2}! \equiv (-1)^{e_2+1}, \ldots$$

folglich ist, wenn ϑ ungerade, der ganze Nenner

$$\equiv (-1)^{e_1+e_2+\cdots+e_{\frac{\vartheta-1}{2}}+\frac{\vartheta-1}{2}} \equiv \left(\frac{-q}{\vartheta}\right) \pmod{q};$$

wenn ϑ gerade, so bleibt noch das mittlere Glied $e_{\frac{\vartheta}{2}}$ stehen, welches keinen Gefährten findet. Sei ϑ ungerade, so hat man nun den zwar elementaren aber wichtigen Satz[1])

2) $$(\vartheta n)! \equiv \vartheta^{n\vartheta}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) n!\left(n+E\left(\frac{q}{\vartheta}\right)\right)!\left(n+E\left(\frac{2q}{\vartheta}\right)\right)!\ldots$$
$$\ldots\left(n+E\left(\frac{(\vartheta-1)q}{\vartheta}\right)\right)! \pmod{q},$$

wo $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right)$ das Legendre'sche Zeichen. Ich überlasse Ihnen mannigfaltige Anwendungen dieser Formel für specielle Werthe von ϑ zu machen; wichtig ist, dass die Zahlen E von n unabhängig sind, und man so für jedes specielle ϑ wegen des n eine allgemeine Formel hat.

Ich verbleibe Ihr ergebener Freund

Berlin, 12. Juli 49.

G. Eisenstein,
Ritterstrasse 56.

PS. Wenn ϑ gerade, so ist $e_{\frac{\vartheta}{2}} = \frac{q-1}{2}$, also kommt dann $\left(\frac{q-1}{2}\right)!$ im Nenner.

VIII.

Juli 1849.

In Ihrem Briefe findet sich die Formel, wenn $q = 24n+1$, so ist

$$\left(\frac{12n\ldots 11n+1}{1\ldots n}\right)^2 \equiv \frac{5n+1\ldots 6n}{1\ldots n}\cdot\frac{7n+1\ldots 13n}{1\ldots 6n} \pmod{q}.$$

Um zu sehen, was man eigentlich hat, muss man erst auch Fakultäten bringen. Die linke Seite ist

$$\left(\frac{(12n)!}{n!\,(11n)!}\right)^2,\quad \text{die rechte}\quad \frac{(6n)!}{n!\,(5n)!}\cdot\frac{(13n)!}{(6n)!\,(7n)!} = \frac{(13n)!}{n!\,(5n)!\,(7n)!},$$

1) Dieser Satz ist als specieller Fall in einem anderen enthalten, welchen Herr Stickelberger im § 4 seiner Abhandlung „Über eine Verallgemeinerung der Kreisteilung“ aufgestellt hat. (Mathematische Annalen, Bd. 37.)

also ist, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor $n!$ fortlässt, zu beweisen, dass

$$(12n)!\,(12n)!\,(5n)!\,(7n)! \equiv (11n)!\,(11n)!\,n!\,(13n)!$$

Zunächst vereinfacht sich dies nach

1) $$a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}, \quad \text{wenn} \quad a+b=q-1.$$

Also hier ist

$$(12n)!\,(12n!) \equiv (-1)^{12n+1} \text{ und rechts } (11n)!\,(13n)! \equiv (-1)^{11n+1},$$

weil $$12+12=24 \quad \text{und} \quad 11+13=24.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass

$$(5n)!\,(7n)! \equiv (-1)^n n!\,(11n)! \quad (\text{mod. } q=24n+1);$$

dies ist falsch, es ist vielmehr $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ohne $(-1)^n$, wie Sie sogleich sehen werden. Sie haben also jedenfalls in Ihrer Formel rechts z. B. den Faktor $(-1)^n$ vergessen, oder sich geirrt; die richtige Formel ist

$$\left(\frac{12n\ldots 11n+1}{1\ldots n}\right)^2 \equiv (-1)^n \frac{5n+1\ldots 6n}{1\ldots n}\cdot\frac{7n+1\ldots 13n}{1\ldots\ldots 6n} \quad (\text{mod. } q);$$

ich habe auch gleich nach Empfang Ihres Briefes den fehlenden Faktor $(-1)^n$ dazu geschrieben.

Dass nun wirklich $(5n)!\,(7n)! \equiv n!\,(11n)!$ ist, geht wie folgt aus der allgemeinen Formel

2) $$(\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-q}{\vartheta}\right) z!\,(z+e_1)!\,(z+e_2)!\ldots(z+e_{\vartheta-1})! \quad (\text{mod. } q)$$

hervor. Um zunächst möglichst allgemein zu bleiben, sei ϑ irgend ein ungerader Divisor von $q-1$ und $q=e\vartheta+1$; dann hat man

$$2q=2e\vartheta+2,\; 3q=3e\vartheta+3,\ldots(\vartheta-1)q=(\vartheta-1)e\vartheta+\vartheta-1,$$

also sind in diesem Falle die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_{\vartheta-1}$ nichts anderes als $e, 2e, 3e, \ldots(\vartheta-1)e$, nämlich $\frac{q-1}{\vartheta}, 2\frac{q-1}{\vartheta}, 3\frac{q-1}{\vartheta}, \ldots(\vartheta-1)\frac{q-1}{\vartheta}$; ferner ist $\left(\frac{-q}{\vartheta}\right)=\left(\frac{-1}{\vartheta}\right)$; man erhält daher den sehr brauchbaren speciellen Fall von 2)

3) $$(\vartheta z)! \equiv \vartheta^{\vartheta z}\left(\frac{-1}{\vartheta}\right) z!\,(z+e)!\,(z+2e)!\ldots(z+\overline{\vartheta-1}\,e)! \quad (\text{mod. } q),$$

wenn ϑ ein ungerader Divisor von $q-1$ und $e=\frac{q-1}{\vartheta}$.

Sei jetzt $q=24n+1$, $\vartheta=3$ und zunächst $z=n$, dann kommt wegen $e=8n$,

$$(3n)! \equiv 3^{3n}\left(\frac{-1}{3}\right) n!\,(9n)!\,(17n)!;$$

sei $z = 3n$, so kommt

$$(9n)! \equiv 3^{9n}\left(\frac{-1}{3}\right)(3n)!\ (11n)!\ (19n!,$$

also multiplicando

$$(3n)!\ (9n)! \equiv 3^{12n} n!\ (9n)!\ (17n)!\ (3n)!\ (11n)!\ (19n)!$$

Hier ist $3^{12n} = 3^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{q}\right)$, aber $\left(\frac{3}{q}\right) = \left(\frac{q}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$, weil $q \equiv 1$ (mod. 4); also kommt $n!\ (11n)!\ (17n)!\ (19n)! \equiv 1$ (mod. q). Statt $a!$ im Zähler kann man immer $b!$ im Nenner schreiben, wenn $a + b = q - 1$, und man nicht vergisst, mit $(-1)^{a+1}$ zu multiplizieren; dies folgt aus $a!\,b! \equiv (-1)^{a+1}$.

Schreibt man daher statt $(17n)!$ und $(19n)!$ resp. $\frac{1}{(7n)!}$ und $\frac{1}{(5n)!}$ so kommt

$$\frac{n!\ (11n)!}{(5n)!\ (7n)!} \equiv (-1)^{17n+1}(-1)^{19n+1} \equiv 1,$$

d. h. $$n!\ (11n)! \equiv (5n)!\ (7n)! \text{ quod erat dem.}$$

Ihre Kongruenz geht also aus doppelter Anwendung von

$$(3z)! \equiv 3^{3z}\left(\frac{-1}{3}\right) z!\ (z + 8n)!\ (z + 16n)!\ (\text{mod. } 24n + 1)$$

hervor. — Um nicht identische Formeln für verschieden zu halten, ist es sehr wesentlich, statt Binomialkoeffizienten Fakultäten allein zu betrachten und alle Fakultäten $x!$ so zu reduzieren, dass $x \leq \frac{q-1}{2}$ wird. — Um bei Ihrem Falle $q = 24n + 1$ noch stehen zu bleiben, kann man nach allen Relationen fragen, die überhaupt zwischen $n!$, $(2n)!$, $(3n)!$, .. $(11n)$ stattfinden, denn $(12n)! \equiv \pm 1$ und die folgenden drücken sich in diesen aus, z. B. $(13n)!$ in $(11n)!$ u. s. w. Sei br. c. $(\mu n)! = [\mu]$. Setzt man in obige Formel n, $2n$, $3n$, .. $8n$ statt z, so bekommt man das System

$$\begin{aligned}
[3] &\equiv -5^{3n}[1][9]\ [17] \equiv (-1)^{7n} 3^{3n}[1][9] : [7] \\
[6] &\equiv -3^{6n}[2][10][18] \equiv 3^{6n}[2][10] : [6] \\
[9] &\equiv -3^{9n}[3][11][19] \equiv (-1)^{5n} 3^{9n}[3][11] : [5] \\
[12] &\equiv -2^{12n}[4][12][20] \equiv [4][12] : [4],
\end{aligned}$$

wird identisch; die folgenden geben nichts neues, also hat man zunächst 3 Relationen

$$[3][7] \equiv (-1)^n 3^{3n}[1][9],\quad [6]^2 \equiv 3^{6n}[2][10]$$

und $$[5][9] \equiv (-1)^n 3^{9n}[3][11];$$

man findet andere Relationen, wenn man $\vartheta = 2$, 4 oder 8 statt 3 setzt und die Formel für ein gerades ϑ anwendet. —

Nächstens mehr von dergleichen entweder schriftlich oder mündlich. — Mit der Schnelligkeit, mit der ich Ihre Abhandlung über irrationalwertige

Reihen ins Crelle'sche Journal gebracht habe, werden Sie hoffentlich zufrieden sein; ich habe dieselbe auf eigne Gefahr und auf Gefahr von Crelles höchster Ungnade nach der Druckerei getragen, selbst Redacteur gespielt und dem Setzer zum Druck empfohlen, sonst läge sie noch; übrigens kannte ich Ihre dortige Methode und hatte mich längst geärgert, denn da die Irrationalität dieser Reihen und Produkte sich so einfach beweisen lässt, wozu nutzen dann meine Kettenbrüche! — Was Sie einmal über Kongruenzen ersten Grades gesagt oder gefragt haben, habe ich wirklich nicht verstanden und bitte um Wiederholung und nähere Aufschlüsse. — Sie sagen in Ihrem Briefe, über quadratische Zerfällungen, „dass diese mühselige, für jeden besonderen Fall besonders zu behandelnde Reihenbetrachtung noch nicht der richtige Weg sei," aber ich habe ja die Reihen, welche auf alle quadratischen Formen passen und habe sie nur für Ihren Fall specialisiert, um den Geist der Methode an einem einfachen Beispiele hervortreten zu lassen und zu zeigen, dass dieselbe auch anwendbar ist, wenn die Determinante nicht Teiler von $q-1$ ist, wie bei $q = 8n + 3$. Aufserdem weifs ich nur eine umfassende freilich hiervon ganz verschiedene Methode durch die elliptischen Funktionen. Ihre neuste Abhandlung über Kettenbrüche (Konvergenz) ist sehr hübsch. Lieber Stern, ich kann schliefslich nicht unterlassen zu sagen, dass mir Ihr Brief vom vorigen Jahre unendliches Vergnügen bereitet und dass ich ihn wohl zwanzig Mal gelesen habe; ich muss dies hier ausdrücklich bemerken, weil Sie wegen meines langen Schweigens leicht daran zweifeln könnten; aber wie gesagt, nur die Fülle des Stoffes hat mich am Schreiben gehindert, und weil ich gern eine würdige Antwort schicken wollte. Unschicklich war es von mir, dass ich nicht Bescheid gab auf Ihre freundliche Einladung; aber ich wollte wirklich von Monat zu Monat kommen, was immer unterblieb.

Grüfsen Sie Ihre liebe Frau, Ihren Jungen, Goldschmidt und Meyersteins.

Ihr

Eisenstein.

IX.

Berlin 14. Januar 1850.

Lieber Stern!

Obgleich ich wohl weifs, dass ich nicht verdiene wieder vor Ihren Augen zu erscheinen, da ich auf die unhöflichste Weise von der Welt Ihren herzlichen Brief weder beantwortet, noch Ihrer freundlichen Einladung Folge geleistet habe, so hoffe ich doch, dass Sie vielleicht über einen reuigen Sünder Gnade ergehen lassen.



Was mich dazu führt, gerade jetzt an Sie zu schreiben, ist eine mathematische Kleinigkeit, die wegen ihrer grofsen Einfachheit Ihnen gewiss Spafs machen wird. Ich bin darauf bei meinen Untersuchungen über höhere Reciprocitätsgesetze gekommen; was ich Ihnen mitteilen will, lässt sich aber sehr gut von der Theorie trennen und bildet einen ganz selbstständigen Satz, dem Sie es gewiss nicht anmerken, dass er mit jener Theorie zusammenhängt. — Nehmen Sie irgend zwei positive ganze Zahlen, z. B. was das einfachste ist 1 und 1, schreiben zwischen beide ihre Summe, also 1 2 1; dann zwischen je zwei dieser drei Zahlen wieder deren resp. Summen, also 1, 3, 2, 3, 1 u. s. w. immer zwischen je zwei bereits erhaltene Zahlen ihre Summe; jede neue Einschaltung der Summe ist als eine Vervollständigung der Reihe zu betrachten, deren Gliederzahl sich fortwährend verdoppelt (mit Ausnahme eines Gliedes), und das Verfahren wird ins Unendliche fortgesetzt; nach einer gewissen Zeit erhält man z. B.

1 6 5 9 4 11 7 10 3 11 8 13 5 12 7 9 2 9 7 12 5 13 8 11 3 10 7 11 4 9 5 6 1

Am Besten nimmt sich diese Procedur aus, wenn Sie auf einen schmalen Streifen Papier oben und unten 1 schreiben, den Streifen halb falten, in den Kniff (Berliner Ausdruck) 2 setzen, abermals falten, so dass zwei neue Kniffe entstehen, wohinein Sie 3 resp. 3 schreiben, aufs Neue kniffen, um von oben nach unten 4, 5, 5, 4 hinein zu setzen u. s. w. In der so gebildeten und durch fortwährendes Einschalten der Summe zwischen je zwei Zahlen zu vervollständigenden Zahlenreihe kommt jede bestimmte ganze Zahl nur eine endliche Anzahl mal vor, weil sie nach einer gewissen Zeit wegen der wachsenden Gröfse der neu hinzutretenden Zahlen nicht wieder erscheinen kann. So kommen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 resp. 1 mal, 2 mal, 2 mal, 4 mal, 2 mal vor. Ich habe nun allgemein gefunden, „dass jede Zahl A genau $\varphi(A)$ mal vorkommt, wo $\varphi(A)$ die Bedeutung in Disq. Arithm. hat", z. B. jede Primzahl p kommt $p-1$ mal vor. Wenn man statt von 1 und 1 von zwei andern ursprünglichen Zahlen bei der Bildungsweise ausgeht, so gilt ein anderes Gesetz. Geht man von a und b aus, und nennt a^0, b^0 die kleinsten der Gleichung $ba^0 - ab^0 = 1$ genügenden Zahlen, so kommt in der nach obigem Algorithmus gebildeten Zahlenreihe, welche ich die Entwickelung von (a, b) nennen will, eine beliebige ganze Zahl A so oft vor, als es Zahlen zwischen den Grenzen

$$(\alpha) \qquad \frac{b^0}{b}A \text{ und } \frac{a^0}{a}A$$

giebt, die zu A relative Primzahl sind, wie Sie Sich leicht durch Induktion an einigen Beispielen überzeugen können. Meine Beweise dieser Sätze sind ziemlich kompliziert, vielleicht finden Sie einfachere, es wäre mir lieb, solche

zu besitzen, die sich unmittelbar aus der angegebenen Bildungsweise auf elementare Weise ergeben.[1]) Diese Formationen besitzen viele andere merkwürdige Eigenschaften; notiert man z. B. die Zahlen, welche in der Entwicklung von (a, b) je unmittelbar auf eine bestimmte Zahl A so oft dieselbe vorkommt, folgen, so sind diese die Werte von $\frac{1}{x}$ (mod A), während x zwischen den obigen Grenzen (α) liegt und zu A relative Primzahl ist; so folgen z. B. in der Entwicklung von (1, 2):

1, **7**, **6**, 11, 5, 14, 9, 13, 4, 15, 11, 16, **7**, **17**, 10, 13, 3, 14, 11, 19, 8, 21, 13, 18, 5, 17, 12, 19, **7**, **16**, 9, 11, 2,

auf die Zahl 7 an den drei Stellen, an welchen sie vorkommt, die Zahlen $6, 17 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$, $16 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$ und $2, 3, 6$ sind die Werte von resp. $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \pmod 7$, wo die Nenner, die zwischen $\frac{7}{2}$ und 7 liegenden Zahlen sind. In der Entwickelung von (1, 1) sind namentlich die auf A so oft es vorkommt je unmittelbar folgenden Zahlen die sämmtlichen $\varphi(A)$ inkongruenten Zahlen (mod A), welche mit A keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Wenn Sie diese Bemerkungen irgendwo wollen drucken lassen, vielleicht in Ihrer Akademie, so wird es mir angenehm sein. Crelle ennuiert mich jetzt schrecklich, er ändert in meinen Arbeiten, was ihm beliebt, so dass ein höchst wunderlicher Styl und manche Sinn-Entstellung herauskommt. Können Sie Sich etwas Schrecklicheres denken als folgenden Passus: Ich schreibe ganz vernünftig: Der Gleichung $P = Q$ kann man die Form $R = S$ geben. Crelle macht hieraus:

Der Gleichung $P = Q$ lässt sich die Form $R = S$ geben.

Dies nur ein Beispiel unter vielen ebenso grausigen.

Ich habe im Crelle'schen Journal eine lange Arbeit drucken lassen, die sich schon vom Sommer her bis jetzt durch drei Hefte durchzieht und die mich auch verhinderte zu Ihnen zu kommen; sie wird Ihnen wahrscheinlich bald zu Gesichte kommen; sobald ich meine Abdrücke erhalte, will ich einen an Gauss schicken, von dem ich vor einiger Zeit auf mein Gratulations-Schreiben eine Antwort empfangen habe, die mir grofse Freude gemacht hat.

Haben Sie schon gehört, dass Rosenhain in Breslau den grofsen mathematischen Preis aus Paris erhalten hat? Einer unserer jüngeren Privatdocenten hier hat die Stelle von Pohl in Breslau als Prof. extr. erhalten.

1) Solche Beweise hat Stern in seiner Abhandlung „Über eine zahlentheoretische Funktion" gegeben. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55 (1858).)



Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir mitteilten, ob und in welcher Weise man bei Ihnen einen Verleger für Tänze (Polkas, Walzer) findet; ich habe mehrere dergleichen komponiert, die hier allgemeinen Beifall finden, aber es ist schwer, hier einen Verleger zu gewinnen, wenn man nicht schon Komponist von Ruf ist. Sie teilten mir einmal früher mit, dass Sie mir einen Verleger für mathematische Sachen verschaffen könnten, wollten Sie vielleicht die Güte haben, mir nähere Nachricht darüber zukommen zu lassen.

Unter dem Siegel der tiefsten Verschwiegenheit will ich Ihnen, da Sie Sich auf so freundschaftliche Weise auch für meine menschlichen Verhältnisse interessieren, anvertrauen, dass ich, was für einen Mathematiker eine Dreistigkeit ist, ein Viertel von 1000 ℛ in der Lotterie gewonnen habe; aber sprechen Sie nicht davon, sonst denken die Leute, ich sei reich geworden, während doch die paar 100 ℛ fast schon aufgezehrt sind.

Ich weifs nicht, ob ich Ihnen schon über Riemann geschrieben habe; ich halte ihn ebenfalls für sehr talentvoll und habe auch mit Dirichlet von ihm gesprochen; sein Umgang hätte mir viel Freude gemacht; als er hier war bin ich ihm förmlich nachgelaufen, er schien mich aber zu vermeiden, was mir sehr leid that, ich kenne nicht die Ursache, vielleicht Schüchternheit oder Verlegenheit von seiner Seite, oder lag es an mir, dass ich ihm nicht so freundschaftlich erschienen bin, als ich es innerlich gewiss fühlte und beabsichtigte; wie geht es ihm jetzt?

Zum Schlusse noch etwas Mathematisches. Können Sie folgendes Problem über Permutationen lösen: die Elemente $1, 2, 3, \ldots n$ in solche noch unbekannte Reihenfolge zu bringen, dass, wenn man bei der letzteren das erste Element herausnimmt, das zweite ans Ende schreibt, das dritte herausnimmt, das vierte ans Ende schreibt u. s. w. immer abwechselnd ein Element herausnimmt und eins ans Ende schreibt, wobei denn die ans Ende geschriebenen Elemente später auch wieder vorkommen, dass bei einem solchen Verfahren die herausgenommenen Elemente in ihrer natürlichen Reihenfolge $1, 2, 3, \ldots n$ nach und nach erscheinen; z. B. die 13 Karten (Spielkarten) einer Farbe so zu legen, dass wenn man die erste auswirft (auf den Tisch), die zweite unter das Spiel steckt, die dritte auswirft, die vierte untersteckt u. s. w., bis alle Karten, auch die früher untergesteckten erschöpft sind: die ausgeworfenen Karten in natürlicher Reihenfolge 2, 3, ... 10, Bube, Dame, König, Ass folgen. Ich bin im Besitze eines sehr einfachen Princips, um allgemein folgendes Problem zu lösen, welches Obiges als speciellen Fall enthält und auch praktisches Interesse darbietet. Thätigkeit will ich jedes Verfahren, jede Art und Weise nennen, einen gewissen Zu-

stand zu verändern, den man selbst als das Resultat aller vorgehenden Thätigkeiten von $-\infty$ her ansehen kann; solche Thätigkeiten will ich mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Soll nun ein unbekannter Zustand Z gefunden werden, von der Art, dass, wenn man auf ihn nach und nach die Thätigkeiten $a, b, c, \ldots g, h$ anwendet, zuletzt ein gewisser status quo A hergestellt wird, so suche ich zunächst zu jeder der gegebenen Thätigkeiten die ihr entsprechende reciproke, durch welche sie wieder aufgehoben wird, und wende dann diese reciproken $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots \frac{1}{h}$ in umgekehrter Reihenfolge $\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ auf den status quo A an; so finde ich

$$Z = A \cdot \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{g}, \cdots \frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right).$$[1]

Bei dem obigen Beispiel bedeutet Z die gesuchte noch unbekannte Anordnung der Karten, A die Karten in ihrer natürlichen Reihenfolge, die Thätigkeiten sind das Auswerfen und unter das Spiel Stecken der Karten, ihre reciproken also das Aufnehmen einer Karte vom Tische, resp. das Legen einer unten befindlichen Karte oben auf das Spiel, so dass wenn a z. B. das Auswerfen, dann $\frac{1}{a}$ das Einnehmen bezeichnet; nach diesen Andeutungen werden Sie leicht die Lösung finden. Solche Probleme kommen unbewusster Weise bei den gewöhnlichsten Lebensverrichtungen vor. Wenn man sich des Morgens anziehen will, zuerst Strümpfe, dann Unterhosen, Hosen, Tragebänder, Weste, Rock, und man will diese Kleidungsstücke auf seinem Stuhle gleich zur Hand liegen haben, so muss man sie des Abends nicht in der genannten, sondern gerade in der umgekehrten Reihenfolge hinlegen, also zu unterst erst: Rock hinlegen, dann Weste, Tragebänder, Hosen, Unterhosen, Strümpfe. Dies klingt lächerlich und geschieht wie gesagt unbewusster Weise, aber ich nehme es in vollem Ernste und halte diese Anwendung der reciproken Thätigkeiten in **umgekehrter** Reihenfolge für ein wichtiges, mathematisches oder wenn Sie wollen, logisches Princip, von dem noch schöne Anwendungen bei Problemen gemacht werden können, die sich auf andere Art etwa combinatorisch gar nicht behandeln lassen. — Nächstens will ich Sie von einem Princip unter-

---

1) Nach der heute üblichen Bezeichnungsweise der Gruppentheorie sind $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots \frac{1}{h}$ die zu $a, b, \cdots, h$ inversen Operationen. Die Bemerkung von Eisenstein kommt auf den bekannten fundamentalen Satz hinaus, dass $\frac{1}{h} \frac{1}{g} \cdots \frac{1}{b} \frac{1}{a}$ die inverse Operation der zusammengesetzten Operation $ab \cdots gh$ ist.



halten anderer, aber ebenso allgemeiner Art, welches ich das Princip der Sparsamkeit nenne, und bei welchem die Freiheit des Willens mathematisch abgehandelt wird; es kommt dabei heraus, dass es am vorteilhaftesten ist, jedesmal so zu handeln, dass man im nächstfolgenden Zustande nach der That möglichst unfrei sei.

Leben Sie nun herzlich wohl und grüfsen vielmals Ihre Familie; haben Sie schon wieder etwas Kleines? Wenn Sie mir eine Frau empfehlen, so heirate ich auch. Uebrigens beabsichtige ich jetzt in allem Ernste unsere Korrespondenz in besseren Fluss zu bringen. Ihr ergebenster Freund

G. Eisenstein.

NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHEFSKIJ.

REDE,

GEHALTEN

BEI DER FEIERLICHEN VERSAMMLUNG DER KAISERLICHEN UNIVERSITÄT KASAN



AM 22. OKTOBER 1893

VON

PROFESSOR **A. WASSILJEF.**

AUS DEM RUSSISCHEN ÜBERSETZT

VON

PROFESSOR **FRIEDRICH ENGEL.**



Das edle Leben des Mannes, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird, ist während der ersten fünfzig Jahre des Bestehens der Universität Kasan untrennbar mit deren Geschichte verbunden; auf jeder Seite dieser Geschichte — es sind das Worte aus einer an seinem Grabe gehaltenen Rede — steht ehrenvoll und in dankbarem Andenken der Name Lobatschefskijs. 1

Lobatschefskij tritt in die Universität sogleich bei ihrer Gründung ein. Am 5. November 1804 war das Statut der Universität bestätigt worden, unter dem 9. Januar 1807 steht der Name Nikolaj Lobatschefskijs in dem Verzeichnisse der Schüler des Kasaner Gymnasiums, die für würdig erklärt wurden, die Vorlesungen der Professoren und Adjunkten zu hören, und zwar steht er da mit dem Vermerke „dignus".

Die ersten Jahre in dem Leben unsrer Universität, mit denen Lobatschefskijs Studentenjahre zusammenfallen, zeigen äusserlich viel Chaotisches, Unvorbereitetes und Ungeordnetes. Die Universität wurde ohne alle Hülfsmittel für den Unterricht eröffnet; es fehlte an der regelmässigen Vertheilung des Stoffes auf die Facultäten, und dieser Zustand schadete selbstverständlich dem Erfolge der Arbeit der Universität.

Dafür hatte sich aber an der jungen Universität, die eben erst in einem halbwilden Lande eröffnet worden war, in dieser „ultima Musarum Thule", wie die ersten hierher gekommenen deutschen Professoren die Universität Kasan nannten, es hatte sich der studirenden Jugend jener Zeit eine Begierde nach Kenntnissen, ein brennender Trieb nach Wissen bemächtigt. Noch in Dorpat, viele Jahre später, erinnerte sich Bartels, der erste Professor der Mathematik, mit lebhaftem Bedauern seiner begabten Kasaner Schüler. 2

Entsprechend dieser Begierde nach Kenntnissen herrschte, wie uns einer der ersten Zöglinge unsrer Universität, S. T. Aksakof, in seiner „Familienchronik" bezeugt, „vollständige Verachtung gegen alles Niedrige und Gemeine, und tiefe Verehrung für alles Rechtschaffene und Hohe, mochte es auch unvernünftig sein."

Dieser Geist der studirenden Jugend der damaligen Zeit, von dem auch einige uns überlieferte Thatsachen aus Lobatschefskijs Jugendjahren Zeugniss ablegen, entsprach dem allgemeinen Geiste jenes Zeitraums, den

Puschkin als den „schönen Anfang der Tage Alexanders“ bezeichnet hat, jenes Zeitraums, an den uns das schöne Bildniss erinnert, das in unsrer Aula steht und auf dem der junge Herrscher in der ganzen Anmuth seiner Schönheit dargestellt ist, wie er vor der Büste seiner erleuchteten Grossmutter und gewissermassen auf ihren Befehl der Universität Kasan die Stiftungsurkunde überreicht.

Wenige Zeiträume in der Geschichte der russischen Bildung sind so glänzend und fruchtbar wie dieser Zeitraum, wo die Regierung, an der Spitze der geistigen Bewegung des Landes stehend, einen allgemeinen Plan für die Volksbildung ausarbeitet, „grossartig,“ sagt Karamsin, „und ruhmvoll nicht nur für Russland und den Herrscher, sondern auch für das ganze Jahrhundert,“ wo sie das Blühen der Uebersetzungslitteratur begünstigt, die Russische Akademie reorganisirt, neue Universitäten eröffnet und an diese die besten ausländischen Gelehrten beruft.

Der Thätigkeit der Regierung entsprach die Belebung der geistigen Thätigkeit der Gesellschaft selbst. Mit besonderem Eifer machte man damals Stiftungen für Bildungszwecke; in diese Zeit fallen die Stiftungen Djemidofs für zukünftige Universitäten, die Stiftung des Adels von Charkof, die Stiftung des Grafen N. P. Rumjanzef. Die in der Gesellschaft erwachte Verehrung für Litteratur und Wissenschaft trug ihre Früchte. Den ersten Jahren des gegenwärtigen Jahrhunderts verdanken wir unsern unsterblichen Nationaldichter Puschkin, ihnen verdanken wir auch den genialen Mathematiker, dessen Gedächtniss heute gefeiert wird.

Aber, wenn auch auf junge, ins Leben eintretende Leute das Leben, das sie umgiebt, einen grossen Einfluss ausübt, so ist doch der Einfluss der Lehrer und der ersten Führer bei selbständigen geistigen Arbeiten nicht weniger wichtig und unmittelbar. Deshalb sind wir an dem Tage, wo wir Lobatschefskij ehren, verpflichtet, dankbar seiner Lehrer zu gedenken und vor allen der ehrwürdigen Gestalt des ersten Professors der reinen Mathematik an unsrer Universität, Bartels, dessen Schutz Lobatschefskij, der in seinen jungen Jahren hitzig, feurig und offenherzig war, auch ausserdem so viel verdankt.

Johann Martin Christian Bartels (geb. 1769) nimmt in der Geschichte der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts eine hervorragende Stelle ein. Ihm war es vergönnt, nicht nur Lobatschefskijs Lehrer zu sein, sondern auch der Lehrer und Beschützer dessen unter den Gelehrten des neunzehnten Jahrhunderts, der mehr als sonst irgend einer der Entwickelung der Mathematik sein Gepräge gegeben hat — Gauss. Um sein Brod zu verdienen, wurde der sechzehnjährige Bartels Gehülfe des Lehrers an einer Privatschule der Stadt Braunschweig, und gegen ein armseliges Entgelt schnitt

er den Schülern die Federn und half ihnen beim Schönschreiben. Unter der Zahl der Schüler befand sich der damals achtjährige Gauss, und die mathematischen Fähigkeiten des genialen Knaben zogen die Aufmerksamkeit des wissbegierigen Bartels auf sich. Trotz des Altersunterschiedes entsteht zwischen Bartels und Gauss eine enge Freundschaft; vereint studiren sie mathematische Werke, vereint lösen sie Aufgaben. Bartels gewährte mehrmals Gauss seinen Schutz, und Gauss achtete Bartels hoch wegen dessen edlen, humanen Charakters, und bis in seine allerletzten Jahre war er ihm dankbar als einem alten Freunde. Bartels war auch selber ein vortrefflicher Mathematiker. Seine „Vorlesungen über mathematische Analysis“, die er in Dorpat im Jahre 1833 herausgab, nehmen in der deutschen mathematischen Litteratur eine hervorragende Stelle ein, denn sie zeichnen sich durch Strenge der Beweise und durch Klarheit der Anordnung aus. Eine Ueberlieferung berichtet sogar, Laplace habe auf die Frage: „Wer ist der erste Mathematiker Deutschlands?“ geantwortet: „Bartels, denn Gauss ist ja der erste Mathematiker der Welt.“ 4

Dank Bartels stand der Unterricht in der reinen Mathematik an der Universität Kasan mit einem Male auf derselben Höhe wie an den besten Universitäten Deutschlands. Alle klassischen Werke der damaligen Zeit: die Differential- und die Integralrechnung — von Euler, die analytische Mechanik — von Lagrange, die Anwendung der Analysis auf die Geometrie — von Monge, die Disquisitiones arithmeticae — von Gauss wurden von dem begabten und belesenen Bartels erläutert. In eignen Vorträgen las Bartels über die Geschichte der Mathematik und entwickelte vor seinen Zuhörern das grossartige Gemälde der Fortschritte des menschlichen Geistes auf diesem Gebiete.

Nachdem Lobatschefskij (am 10. Juli 1811) trotz „schlechten Betragens“ den Magistergrad erhalten hatte, „auf Grund ausserordentlicher Fortschritte und ebensolcher Gaben in den mathematischen und physischen Wissenschaften“ und auf Grund einer von ihm vorgelegten Arbeit: „Die Theorie der elliptischen Bewegung der Himmelskörper“, beschäftigte er sich bei Bartels auf dessen Wohnung vier Stunden wöchentlich, indem er unter dessen Leitung die Disquisitiones arithmeticae und den ersten Band der Mechanik des Himmels von Laplace studirte.

Eins der Ergebnisse dieser Beschäftigungen war die Arbeit, die Lobatschefskij im Jahre 1813 unter dem Titel: „Ueber die Lösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$“ vorlegte, sie behandelt die Frage nach der Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch vier theilbar ist.

Eine der Verpflichtungen, die Lobatschefskij als Magister hatte, war 5

die „Unterstützung von Bartels in dessen Eigenschaft als Professor der reinen Mathematik, zur Erzielung grösserer Fortschritte seiner Zuhörer, und schliesslich die Erklärung dessen, was sie nicht verstanden haben.“ Es ist klar, dass Lobatschefskij in den allernächsten Beziehungen zu Bartels gestanden haben muss.

In nicht weniger enger Gemeinschaft muss Lobatschefskij auch mit Bronner gestanden haben, dem Professor der Physik und Leiter des pädagogischen Instituts, in das die jungen Magister zu ihrer Weiterbildung eintreten mussten. Bronner, der viel erlebt und viel durchdacht hatte, erst Benediktinermönch, dann Angehöriger des Illuminatenordens, dann Idyllendichter, dann Mechaniker und Physiker, endlich Historiker und Statistiker des Kantons Aargau, in dem er sein stürmisches Leben beschloss, der sich bald von den Ideen Rousseaus und der französischen Revolution hinreissen liess, bald von Kants „Kritik der reinen Vernunft“, Bronner konnte bei seiner begabten Persönlichkeit nicht umhin, auf seine Schüler einen bezaubernden Einfluss auszuüben, und seine ausgedehnte philosophische Bildung trug unzweifelhaft viel zu der geistigen Entwickelung Lobatschefskijs und seiner Genossen bei.

Später als Bartels und Bronner, aber noch während der Studentenjahre Lobatschefskijs, kamen Renner und Littrow nach Kasan und waren seine Lehrer. Der ehemalige Privatdocent der Göttinger Universität, Caspar Friedrich Renner, ein vortrefflicher Mathematiker und Lateiner, erscheint in den auf uns gekommenen Erinnerungen von der anziehendsten Seite als ein Mann, auf den Puschkins Vers „von der durchaus göttingischen Seele“ [1]) vortrefflich passt. Littrow, der bekannte Astronom, ein hochgebildeter Mann, der von der Philosophie Schellings begeistert war, erhob den Unterricht in der Astronomie an unsrer Universität auf dieselbe Höhe, die der Unterricht in der Mathematik hatte. Unter seiner Anleitung führte Lobatschefskij zusammen mit seinem Kameraden, dem späteren bekannten Professor der Astronomie, J. M. Simonof, Beobachtungen des Kometen von 1811 aus, und die Mittheilung Littrows über diese Beobachtungen (Kasaner Nachrichten von 1811, Nr. 21) ist die erste gedruckte Mittheilung über die wissenschaftlichen Arbeiten Lobatschefskijs.

Die geistige Anregung dieses glänzenden Zeitraums, in den Lobatschefskijs Jugend fiel, die talentvollen Lehrer, die eifrig die jungen Gemüther für das Licht des Wissens und der Wahrheit erweckten, das war die geistige Atmosphäre, in der Lobatschefskij mit dem Idealismus der Anschauungen erfüllt wurde, den seine merkwürdige „Rede über die wichtigsten

1) [Jewgenij Onjegin, II. Gesang, Strophe 6.]



Gegenstände der Erziehung" athmet, mit dem Durste nach mannigfaltigem Wissen, mit dieser Freiheit des Geistes, die nöthig war, um an der Wahrheit eines Axioms zu zweifeln, das im Laufe zweier Jahrtausende von allen anerkannt und durch die Autorität Euklids geheiligt war, mit dieser brennenden Liebe zur Wahrheit, die ihm erlaubte, ohne sich durch die Gleichgültigkeit oder den Spott seiner Zeitgenossen hemmen zu lassen, hartnäckig und beharrlich seine geliebten wissenschaftlichen Ideen zu verfolgen.

War Lobatschefskij vielleicht auch in diesem Punkte seinen hervorragenderen Lehrern, namentlich Bartels, verpflichtet? Verdankte er etwa diesem die Wahl des geliebten Gegenstandes seiner Arbeiten, der Frage nach den Grundlagen der Geometrie, die ihn berühmt machen sollte? Wahrscheinlich wird das immer ein Räthsel bleiben; aber, wie gross auch unsre patriotische Begeisterung für Lobatschefskij sein mag, die Liebe zur Wahrheit muss uns doch zwingen, an die Möglichkeit zu denken, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben kann.

Der grosse deutsche Mathematiker hatte schon 1816 und 1822 Besprechungen verschiedener Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, veröffentlicht, und die Entschiedenheit, mit der er in diesen Besprechungen seiner Ueberzeugung Ausdruck verleiht, dass alle Versuche, die Lücke der Geometrie auszufüllen, die mit dieser Forderung zusammenhängt, vergeblich seien, erlaubt uns nicht, an der Richtigkeit der Behauptung zu zweifeln, die er im Jahre 1846 in seinem bekannten Briefe an Schumacher ausspricht, dass er nämlich schon 1792 zu der Ueberzeugung von der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie gelangt sei. Die Zeit, in der sich diese Ansichten bei Gauss entwickelten, ist die Zeit seiner engen Freundschaft mit Bartels, die schon 1785 entstanden war, als Bartels sechzehn und Gauss acht Jahre alt war. Ihre unausgesetzten, persönlichen, freundschaftlichen Beziehungen wurden zwanzig Jahre hindurch fortgesetzt, bis 1807, wo Bartels nach Kasan übersiedelte. Mit Ausnahme einer kurzen Zwischenzeit lebten sie fast unzertrennlich in Braunschweig und bekamen beide ein Stipendium von dem Herzoge von Braunschweig, der die Absicht hatte, ein Observatorium zu erbauen, dessen Direktor Gauss werden sollte, und eine höhere mathematische Schule zu gründen, an der Gauss und Bartels Professoren werden sollten. Ihre Namen waren so sehr mit einander verbunden, dass beide gleichzeitig von Fuss, dem ständigen Secretär der Petersburger Akademie der Wissenschaften, Briefe erhielten, in denen Gauss die Direktorstelle der St. Petersburger Sternwarte und Bartels die Professur in Kasan angeboten wurde.

Man kann daher die Vermuthung nicht für zu gewagt halten, dass Gauss seine Gedanken über die Frage der Parallellinien seinem Lehrer

und Freund Bartels mitgetheilt habe.[1]) Konnte nicht andrerseits Bartels seinem wissbegierigen und talentvollen Kasaner Schüler etwas von den kühnen und interessanten Ansichten mittheilen, die Gauss über eine der Grundfragen der Geometrie gefasst hatte?

Aber selbst wenn wir diese Hypothese aussprechen, so müssen wir natürlich auch noch eine andre Erklärung dafür zu geben versuchen, dass Lobatschefskij bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie und über die Parallellinien verweilte.

Auf der einen Seite hatte das Interesse an den Parallellinien, das ja auch schon bei den griechischen Mathematikern (Proklus und Ptolemäus) und bei den Arabern (Naṣîr-Eddîn), und vom 16. bis zum 18. Jahrhundert in Europa (Clavius, Saccheri, [Lambert] und andere) vorhanden gewesen war, am Ende des vergangenen Jahrhunderts und beim Beginn des gegenwärtigen ganz besonders zugenommen. In dem einen Jahre 1786 zum Beispiel erschienen sieben Abhandlungen, die der Frage der Parallellinien gewidmet waren. Im Jahre 1794 erschien die erste Ausgabe des bekannten Lehrbuchs der Geometrie von dem berühmten französischen Mathematiker Legendre mit einem Beweise der Euklidischen Forderung, der auf das Gesetz der Homogeneität gegründet war. Mit diesem Beweise begann Legendre die Reihe seiner merkwürdigen Arbeiten über die Theorie der Parallellinien, zum Theil in den neuen, zahlreichen Ausgaben seines Lehrbuchs, zum Theil in besonderen Abhandlungen.[2]) Legendre, so kann man sagen, versucht von allen Seiten her zur Entscheidung der schwierigen Frage zu gelangen und verwendet die ganze Kraft seines Verstandes und seines Wissens darauf, einen einwandfreien Beweis der Euklidischen Forderung zu liefern.

Diese Arbeiten Legendres verstärkten ihrerseits das Interesse an der Theorie der Parallellinien. In den fünfundzwanzig Jahren, die dem Er-

---

1) Es ist ein Brief von Gauss auf uns gekommen, der an einen andern seiner Freunde und Studiengenossen gerichtet ist, an Wolfgang Bolyai, den Vater Johann Bolyais, des Verfassers der Abhandlung: Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (1832), in der zwar nach Lobatschefskij aber von ihm unabhängig die Grundlagen einer Geometrie entwickelt sind, die nicht auf dem Euklidischen Axiome beruht. In diesem Briefe, der 1799 abgeschickt ist und der in einer Rede Prof. Scherings mitgetheilt wird (Gedächtnissrede zum 100jähr. Geburtstage von Gauss, S. 7 (1877)), schreibt Gauss: „Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande, die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht“ u. s. w.

2) Nouvelle théorie des parallèles avec un appendice contenant la manière de perfectionner la théorie des parallèles. Paris 1803.



scheinen der ersten Arbeit Lobatschefskijs vorausgingen, verstrich kein Jahr, in dem nicht eine oder einige Abhandlungen über die Theorie der Parallellinien erschienen wären. Aus dem Zeitraume von 1813 bis 1827 kennt man allein in deutscher und in französischer Sprache gegen dreissig gegedruckte Abhandlungen. Einige von diesen Abhandlungen befinden sich seit Lobatschefskijs Zeiten auf unsrer Bibliothek und sind, wie deren Einlaufkatalog zeigt, von Lobatschefskij selbst angeschafft.[1])

Die Erfolglosigkeit aller dieser Versuche, die Euklidische Forderung zu beweisen, das heisst, sie auf die vorhergehenden Axiome, Forderungen und Erklärungen zurückzuführen, veranlasste Gauss 1816, seine Meinung in folgenden Worten gedruckt auszusprechen: „Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.“

Diese Erfolglosigkeit aller früheren Versuche konnte auch unabhängig von dem Einflusse von Gauss und Bartels Lobatschefskij auf den Gedanken bringen, entsprechend der Geometrie, die auf die Euklidische Forderung begründet ist, ein andres geometrisches System zu studiren, das von dieser Forderung unabhängig ist. Der Lösung dieser Aufgabe, die Lobatschefskij so glänzend durchgeführt hat, war schon in der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts der italienische gelehrte Jesuit Saccheri nahe gekommen.[2]) Fast gleichzeitig mit Lobatschefskij gelangte Johann Bolyai,

1) Hessling. Versuch einer Theorie der Parallellinien. Halle 1818. Lüdicke. Versuch einer neuen Theorie der Parallellinien, im Zusammenhange mit den Grundlehren der Geometrie dargestellt. Meissen 1819.

2) Ueber Saccheri, als einen Vorläufer Lobatschefskijs, siehe meinen Artikel in den „Mittheilungen der physisch-mathematischen Gesellschaft [zu Kasan],“ Bd. 3, Heft 3. In der letzten Zeit sind die Mathematiker auf einige andre Abhandlungen aufmerksam geworden, in denen ebenfalls der Gedanke der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie ausgesprochen ist. So stammt von Lambert, dem bekannten Philosophen und Mathematiker, eine Abhandlung: „Zur Theorie der Parallellinien“, die 1786 in dem „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik“ erschien. In dieser Abhandlung, auf die zuerst von Stäckel wieder hingewiesen worden ist, macht Lambert zwar viele vergebliche Versuche, die

der Sohn Wolfgang Bolyais, des Studiengenossen und Freundes von Gauss, zur nichteuklidischen Geometrie.

Auf der andern Seite führte auch das philosophische Denken der damaligen Zeit zu der Frage nach dem Wesen und der Entstehung der geometrischen Axiome.

Die Zeit, in der Lobatschefskij mit jugendlichem Eifer und mit Ruhmbegierde seine selbständige, geistige Arbeit begann, war eine in der Geschichte des menschlichen Verstandes berühmte Zeit. Sie erscheint uns nach den beredten Worten von Helmholtz in seiner Rede „Die Thatsachen in der Wahrnehmung", als eine Zeit, „reich an Gütern geistiger Art, an Begeisterung, an Energie, idealen Hoffnungen und schöpferischen Gedanken." Diese Zeit stellte die grundlegende Aufgabe jeder Wissenschaft, die Aufgabe der Erkenntnisstheorie: „Was ist Wahrheit? In wieweit entsprechen unsre Vorstellungen der Wirklichkeit?" Zur scharfen Formulirung dieser Aufgabe hat besonders Kant beigetragen, namentlich seine „Kritik der reinen Vernunft" und die darin enthaltene Lehre vom Raume.

Der grosse Königsberger Philosoph hat die Frage nach dem Wesen des Raumes im Laufe seines Lebens mehrere Male und auf verschiedene Weisen beantwortet. In seiner ersten darauf bezüglichen Arbeit: „Gedanken über die wahre Schätzung der lebendigen Kräfte" (1746) wirft der zwanzigjährige Kant mit jugendlicher Kühnheit die Frage auf nach dem Grunde der drei Ausdehnungen des Raumes und erblickt diesen Grund darin, dass die Seele ihre Eindrücke gemäss dem von Newton entdeckten Gesetze der Anziehung empfängt, also umgekehrt proportional dem Quadrate des Ab-

---

Euklidische Forderung zu beweisen, behandelt aber andrerseits auch die beiden Möglichkeiten, dass die Winkelsumme im Dreieck grösser oder kleiner als zwei Rechte ist. Er bemerkt, dass die erste Möglichkeit auf der Kugel verwirklicht ist, und spricht die Vermuthung aus, dass die andre auf einer imaginären Kugel stattfinde. Er hat auch erkannt, dass es, sobald eine von beiden Möglichkeiten stattfindet, für die Längen ein absolutes Mass giebt. Ueberdies ist er selber offenbar von seinen Versuchen, die Euklidische Forderung zu beweisen, unbefriedigt gewesen, sonst hätte er die Arbeit wohl noch bei seinen Lebzeiten veröffentlicht.

In seiner „Theorie der Parallellinien" (1825) sagt Taurinus: „Die Idee einer Geometrie, in welcher die Summe der Dreieckswinkel kleiner als zwei Rechte wäre, ist mir schon vor vier Jahren mitgetheilt worden (von meinem Oheim, Prof. S. in K., damals noch in M.); ich habe mich aber nicht damit befreunden können und kann es jetzt noch viel weniger." Nach der sehr wahrscheinlichen Vermuthung G. S. Semikolefs, des Verfassers der „Studien über die Lobatschefskijsche Geometrie" meint er damit Professor Schweikart, den Gauss in seinem bekannten Briefe an Schumacher erwähnt (s. „Ueber die Grundlagen der Geometrie", Veröffentlichung der physisch-mathematischen Gesellschaft. Kasan 1893, S. IX).

standes. Später zu der Zeit, wo er, noch unter dem Einflusse Newtons stehend, seine „Allgemeine Naturgeschichte des Himmels" schrieb, theilte er auch die Ansicht Newtons über den Raum, als etwas objektiv Vorhandenes, was allen Dingen vorausgeht, indem es ihr Behälter ist, und in der für die Geometer so interessanten Arbeit: „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume" (1768) benutzt er das Vorhandensein der Paare von symmetrischen Körpern, um zu zeigen, dass der absolute Raum seine selbständige Realität besitzt, nicht nur unabhängig von dem Vorhandensein jeder Materie, sondern sogar als eine nothwendige Bedingung für deren Vorhandensein. Aber schon zwei Jahre später, in der Abhandlung: „De mundi sensibilis atque intelligibilis forma atque principiis" (1770) entwickelt Kant seine Lehre vom Raume als etwas Apriorischem, was aller Erfahrung vorausgeht, einer völlig subjektiven Form unsrer Anschauung, eine Lehre, die auch eine der wichtigsten Theorien der „Kritik der reinen Vernunft" (1781) bildet. Für diese Kantische Lehre besitzt seine Ansicht über die geometrischen Axiome entscheidende Bedeutung. Kant stützt sich auf die augenscheinliche Thatsache, dass diese geometrischen Axiome uns als nothwendig wahr erscheinen, und dass wir uns sogar keinen Raum vorstellen können, der nicht die Eigenschaften besitzt, die in diesen Axiomen zum Ausdruck kommen, und er benutzt diese Thatsache, um zu zeigen, dass die Axiome früher gegeben sind als jede Erfahrung; deshalb ist auch der Raum eine transscendente, von der Erfahrung unabhängige Form der Anschauung.

Kants Lehre, die den Lehren Lockes, Condillacs und andrer Sensualisten gerade entgegengesetzt war, fand zahlreiche Gegner.[1])

Gauss, zum Beispiel, sprach sich mehrmals gegen die Lehre Kants aus und erklärte: „Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre zu unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass wenn die Zahl bloss unseres Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.[2])

---

1) Als einer dieser Gegner erwies sich zum Beispiel Adam Weishaupt, der bekannte Begründer des Illuminatenordens, in seinem Schriftchen: „Zweifel über die Kantischen Begriffe von Zeit und Raum. Nürnberg 1788." Ueber Weishaupt siehe mein Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij. Zwei Episoden aus dem Leben der ersten Professoren an der Universität Kasan." Kasan 1893.

2) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig 1880, S. 497.



In den ersten Studentenjahren Lobatschefskijs trat in Russland ein andrer Gegner der Kantischen Lehre vom Raume auf, ein begabter russischer Mathematiker aus dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts, Timofej Ossipofskij, Professor an der Universität Charkof, der Uebersetzer von Condillacs Logik. Er that das in der Rede: „Ueber Raum und Zeit."[1]) In seiner Kritik stellt sich Ossipofskij auf den sensualistischen Standpunkt und spricht sich kategorisch für die Objektivität des Raumes aus. „Raum und Zeit sind die Bedingungen für das Dasein der Dinge und existiren in der Natur selbst und an und für sich, nicht aber bloss in unsrer Vorstellung. Der Begriff des Raumes entsteht durch die Eindrücke, die von ihm durch Vermittelung unsrer äusseren Sinne zu unsern inneren Sinnen gelangen."

Es ist kaum möglich anzunehmen, dass der vielseitig gebildete Lobatschefskij gegenüber diesen die Geister der damaligen Zeit bewegenden Fragen theilnahmlos geblieben sein sollte. Auch hat Lobatschefskij durch seine geometrischen Untersuchungen, indem er die Möglichkeit einer streng logischen nichteuklidischen Geometrie nachwies, ein gewichtiges Wort zu der von Kant erhobenen Frage gesprochen. Auf die Lösung, die in der Kritik der reinen Vernunft gegeben worden war, antwortet Lobatschefskij damit, dass er eine der nothwendigen Wahrheiten der Geometrie — die Euklidische Forderung — als ein physisches Gesetz anerkennt, das heisst als etwas durch die Erfahrung Gegebenes, und dass er in astronomischen Beobachtungen die Antwort auf die Frage nach der Wahrheit dieser Forderung sucht.

Am allerklarsten hat Lobatschefskij seinen genialen Gedanken auf der ersten Seite seiner „Neuen Anfangsgründe der Geometrie" formulirt, in den Worten: „Den geometrischen Begriffen selbst ist noch nicht die Wahrheit eigen, die man hat beweisen wollen und die ebenso wie andre physische Gesetze nur durch die Erfahrung bestätigt werden kann, also zum Beispiel durch astronomische Beobachtungen." Dieser Gedanke steht in geradem Widerspruche zu der Meinung, nach der unser Wissen vom Raume ein absolutes Wissen ist, das zu prüfen und mit der Erfahrung zu vergleichen durchaus nicht nöthig erscheint.

Dieser Lehre von dem absoluten Wissen vom Raume, die einen der Ecksteine der „Kritik der reinen Vernunft" bildet, hat Lobatschefskij einen vernichtenden Schlag versetzt. Vor Lobatschefskij war es möglich zu behaupten, dass wir, während wir von dem Wesen der Erscheinungen, die in

---

1) Reden, gehalten in der feierlichen Versammlung der Universität Charkof, am 30. August 1807.

der Welt vorgehen, nichts wissen und nur die Phänomene sehen, aber die „Dinge an sich" nicht kennen, doch wenigstens in der Geometrie ein absolutes Wissen vom Raume haben, dass dieser überall dieselben Eigenschaften besitzt, hier sowie in ungeheuer grossen Entfernungen, heute sowie gestern und morgen. Nach Lobatschefskij gelten für den Geometer der Gegenwart die von Euklid behandelte Raumform, die von Lobatschefskij behandelte Raumform und die nach Riemann benannte Raumform alle drei als gleich logisch möglich und er kann nicht behaupten, dass er die Eigenschaften des Raumes in ungeheuer grossen Entfernungen von uns kennt; er kann nicht behaupten, darüber etwas zu wissen, welche Eigenschaften der Raum gehabt hat und welche er haben wird.[1])

Aehnlich wie nach den Entdeckungen des Kopernikus, so hat sich auch nach den Untersuchungen Lobatschefskijs der geistige Horizont der Menschheit ausserordentlich erweitert. Die Menschen, die geglaubt hatten, einen absoluten Begriff von dem Weltgebäude zu haben, in dessen Mitte sich die Erde befinde, die von concentrischen Krystallsphären umgeben sei, — nach Kopernikus erkannten sie plötzlich, dass sie auf einem nichtigen Sandkörnchen in einem Meere von Welten lebten. Giebt es eine Gränze für dieses Meer und worin besteht sie? Das sind die Fragen, zu denen das Kopernikanische System führte. Die Untersuchungen Lobatschefskijs führten zu einer naturphilosophischen Frage von nicht geringerer Wichtigkeit, zu einer Frage über die Eigenschaften des Raumes; sind diese Eigenschaften genau dieselben hier bei uns und in jenen entlegenen Welten, von denen das Licht erst in hunderttausenden, ja Millionen von Jahren zu uns gelangt? sind diese Eigenschaften jetzt dieselben, die sie waren, als sich das Sonnensystem aus einem Nebelflecke bildete, und die sie sein werden, wenn sich die Welt dem Zustande der überall gleichmässig vertheilten Energie nähern wird, in dem die Physiker die Zukunft der Welt erblicken? Hierin besteht die Parallele zwischen Kopernikus und Lobatschefskij, die zum ersten Male von Clifford in seiner „Philosophy of the pure sciences[2]) durchgeführt worden ist. Die Benennung „Kopernikus der Geometrie", die für ein slavisches Herz doppelt schmeichelhaft ist, wendet zum Beispiel der hoch bejahrte englische Mathematiker Sylvester auf Lobatschefskij an.[3])

Indem er die Relativität unsrer Kenntnisse von dem Raume behauptet,

1) W. K. Clifford, Lectures and Essays, S. 213.

2) Lectures and Essays. Second edition. London 1886, S. 180—243.

3) „I cordially join with you in the hope that our english mathematicians may not be wanting in the manifestation of a honor due to your illustrious compatriot, »the Copernicus of geometry«." (Aus einem Briefe Prof. Sylvesters an den Verfasser der Rede.)

zeigt Lobatschefskij zugleich den Weg, auf dem wir unsre Kenntniss von diesem erwerben und erweitern müssen. Dieser Weg ist der der Erfahrung. In dieser Beziehung erscheint Lobatschefskij als Fortsetzer der Arbeit der grossen Gelehrten und Philosophen: Bacon, Descartes, Galilei und Newton, die, auf apriorische Betrachtungen verzichtend, die Natur zu fragen begannen, in dem Bewusstsein, dass diese, wie Lobatschefskij sagt, 15 unabänderliche und befriedigende Antworten auf die Fragen giebt.[1]) Die Untersuchungen Lobatschefskijs beleuchten den Gedanken über die Geometrie, den Newton in der Vorrede zu seinen Principien hingeworfen hat, sie sei ein Theil der Mechanik, der sich auf die mechanischen Wirkungen gründet, die bei Messungen nöthig sind: „Fundatur igitur geometria in praxi Mechanica, et nihil aliud est quam Mechanicae universalis pars illa quae artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat."

In seiner ganzen wissenschaftlichen Thätigkeit zeigt sich Lobatschefskij als ein hervorragender Vertreter des klaren russischen Verstandes, der nach Klarheit strebt und der den unsichern Weisungen des innern Gefühls und den metaphysischen Spekulationen die auf Erfahrung gegründete wissenschaftliche Wahrheit vorzieht. Oefters spricht Lobatschefskij seine gesunden Ansichten über die Naturphilosophie aus. „In der Natur", sagt er, „erkennen wir eigentlich nur die Bewegung, ohne die Sinneseindrücke nicht möglich sind. Alle übrigen Begriffe, zum Beispiel die geometrischen, sind künstlich von unserm Verstande erzeugt, indem sie aus den Eigenschaften der Bewegung abgeleitet sind, und deshalb ist der Raum an und für sich, abgesondert[2]), für uns nicht vorhanden." (Neue Anfangsgründe der Geometrie. Vollständige Sammlung der geometrischen Abhandlungen Lobatschefskijs. Bd. I, S. 227.)

„Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur vermittelst unsrer Sinne erwerben. Der Verstand kann und muss sie auf die kleinste Zahl zurückführen, damit sie dadurch der Wissenschaft als feste Grundlage dienen können." (Neue Anfangsgründe der Geometrie; a. a. O. S. 231.)

Seiner hohen Achtung vor der Erfahrung hat Lobatschefskij in seiner merkwürdigen Rede „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung"

---

1) Rede über die wichtigsten Gegenstände der Erziehung. (Kasaner Bote.)

2) Mir scheint, dass das Wort abgesondert in dem Sinne: unabhängig von Bewegung und Messung zu verstehen ist. Die Frage nach den Eigenschaften des Raumes erscheint auf diese Weise als gleichbedeutend mit der Frage nach den Methoden zur Messung. Dieser Gedanke liegt den Ansichten Cayleys und F. Kleins über die Lobatschefskijsche Geometrie zu Grunde, von denen später gesprochen werden wird.

Ausdruck verliehen: „Die Mathematiker haben direkte Hülfsmittel zur Erwerbung von Kenntnissen eröffnet. Es ist noch nicht lange her, dass wir diese Hülfsmittel benutzen. Der berühmte Bacon hat sie uns gezeigt. 16 „Hört auf," sagte er, „unnütz zu arbeiten und euch zu bemühen, alle Weisheit aus der Vernunft abzuleiten; befragt die Natur, sie bewahrt alle Wahrheiten und auf eure Fragen wird sie euch entschieden und befriedigend antworten." Schliesslich hat der Genius Descartes diese glückliche Veränderung hervorgerufen und, Dank seinen Gaben, leben wir bereits in Zeiten, wo kaum noch ein Schatten der alten Scholastik auf den Universitäten umgeht."

Aus dem Gesagten geht klar hervor, dass der Gedanke Lobatschefskijs, eine jener Forderungen Euklids, die Kant für eine nothwendige Wahrheit gehalten hatte, zu verwerfen, die Möglichkeit eines logischen Gebäudes der Geometrie, auch ohne diese Forderung, darzuthun und damit zugleich die Vergeblichkeit aller Anstrengungen sie zu beweisen, dass dieser Gedanke nicht der Einfall eines eigensinnigen nach Originalität strebenden Kopfes war, wie die Mehrzahl der Mathematiker seiner Zeit gedacht hat. Die Aufgabe, die Lobatschefskij löste, war eine Aufgabe, die sowohl die Mathematik als die Philosophie seiner Zeit der Reihe nach gestellt hatten, aber um diese Aufgabe zu erkennen, dazu gehörte die Genialität eines Gauss und eines Lobatschefskij, um sie zum Abschluss zu bringen, dazu gehörten die Beharrlichkeit und Arbeitsamkeit des letzteren. Für uns wird es immer ein Gegenstand andächtiger Bewunderung und hohen patriotischen Stolzes bleiben, dass diese Aufgabe, die durch die geistige Bewegung der hervorragendsten Nationen Europas gestellt worden war, ein Gelehrter gelöst hat, der in Kasan lebte, weit entfernt von den Centren des geistigen Lebens, der niemals Russland verlassen hat und der mit den Denkern und Geometern des westlichen Europas gar nicht in lebhaftem unmittelbarem Verkehre stand.

Die Musse zum Arbeiten, zur zusammenhängenden Entwickelung einer von Euklids Forderung unabhängigen Geometrie, jener Geometrie, die jetzt den Namen Lobatschefskijs trägt, gewährte Lobatschefskij der Zeitraum in der Geschichte der Universität Kasan, der mit dem Namen Magnizkij verknüpft ist. Dieser Zeitraum war für streng wissenschaftliche Arbeiten nicht günstig. Aber in dieser Zeit, wo sich Lobatschefskijs Kollege auf dem Katheder, der Professor Nikolskij, der herrschenden Richtung unterwarf, indem er in seiner Rede „Ueber den Nutzen der Mathematik" nach mystischen Deutungen der mathematischen Wahrheiten strebte, trachtet 17 Lobatschefskij in Bemühungen, die einzig und allein die wissenschaftliche Wahrheit im Auge hatten, danach, sich über die schwer lastende Gegenwart zu beruhigen und diese zu vergessen.

Im Archiv der Universität Kasan hat man ein interessantes Aktenstück gefunden, aus dem hervorgeht, dass die Arbeiten Lobatschefskijs an der systematischen Entwickelung der Geometrie bereits vor dem Jahre 1823 begonnen haben. In diesem Jahre überreichte er Magnizkij ein von ihm verfasstes Lehrbuch der Geometrie, damit es auf öffentliche Kosten als ein „klassisches" Buch gedruckt werden sollte. Magnizkij übersandte das Buch dem Akademiker Nik. Fuss, der sich über die Arbeit sehr streng aussprach und fand, „dass der Verfasser, wenn er glaubt, sie könne als Lehrbuch dienen, dadurch zeigt, dass er keinen rechten Begriff von den Erfordernissen eines Lehrbuchs hat, das heisst, keinen Begriff von der Fülle der geometrischen Wahrheiten, die den Inbegriff eines Elementarkursus der Wissenschaft bilden, von der mathematischen Methode, von der Nothwendigkeit scharfer und deutlicher Erklärungen aller Begriffe, von der logischen Ordnung und der methodischen Vertheilung des Stoffs, von der gehörigen Aufeinanderfolge der geometrischen Wahrheiten, von der unerlässlichen und möglichst rein geometrischen Strenge ihrer Beweise. Von allen diesen nothwendigen Eigenschaften ist in der Geometrie, die ich durchgesehen habe, auch nicht eine Spur."

Aber besonders empört ist Fuss, in Uebereinstimmung mit dem Geiste der Zeit und mit seinem Korrespondenten, darüber, dass der Verfasser das französische Meter bei der Ausmessung gerader Linien als Einheit benutzt und ausserdem unter der Benennung Grad den hundertsten Theil des Viertelkreises als Einheit bei der Ausmessung des Kreisbogens. „Bekanntlich", schreibt Fuss, „ist diese Eintheilung in der Zeit der französischen Revolution erdacht worden, als die Wuth der Nation, Alles früher dagewesene zu vernichten, sich sogar auf den Kalender und die Eintheilung des Kreises erstreckte. Aber diese Neuerung ist nirgends angenommen worden und in Frankreich selbst schon längst wieder aufgehoben in Folge augenscheinlicher Unzuträglichkeiten."

Fuss, der in seiner Antwort so schonungslos verfuhr, konnte nicht voraussehen, dass nach siebzig Jahren die Mathematiker nicht bloss Russ-
18 lands, sondern der ganzen Welt für den ersten Versuch Lobatschefskijs zur Entwickelung der Geometrie das lebhafteste Interesse haben würden. Leider ist diese interessante Handschrift verloren.

Aus dem Briefe von Fuss geht nicht hervor, dass Lobatschefskij in seinem Lehrbuche originelle Ansichten über die Theorie der Parallellinien entwickelt hatte; aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij bereits vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen. Wahrscheinlich hat Lobatschefskij bald nach der Ueberreichung seines Lehrbuchs der Geometrie, die mit einem Misserfolg endete, sein System

der Geometrie ausgearbeitet, aber mit der Veröffentlichung wartete er einige Zeit. Es scheint kein zufälliges Zusammentreffen zu sein, dass am 8. Februar 1826 der Generalmajor Sheltuchin die Revision der Universität Kasan begann, die unter dem Vorwande einer „Erneuerung“ in vollständige Zerrüttung gebracht worden war, und dass nach Verlauf dreier Tage am 11. Februar 1826 die physisch-mathematische Abtheilung die von Lobatschefskij vorgelegte Schrift: „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles“ einer Prüfung unterzog.

Die Revision Sheltuchins hatte die Entfernung Magnizkijs zur Folge. Für die Universität Kasan begann damit eine andere, lichtere Zeit, wo man Männer brauchte, die der Wissenschaft ergeben waren und die Universität lieb hatten. Das Vertrauen der Kollegen richtet sich auf Lobatschefskij und vom 3. Mai 1827 an nimmt dieser neunzehn Jahre hindurch die erste Stelle an der Universität Kasan ein und dient ihr uneigennützig und unermüdlich.

Der junge Rektor (Lobatschefskij war beim Antritt nur dreiunddreissig Jahre alt) benutzt die erste günstige Gelegenheit, um offen seine Ansichten über die Erziehung der Jugend und über die Ziele der Universität zu zeigen, Ansichten gerade entgegengesetzt denen, die während einer Reihe von Jahren an dieser herrschend gewesen waren, und in der feierlichen Versammlung des 5. Juli 1828 hielt er seine merkwürdige Rede: „Ueber die wichtigsten Gegenstände der Erziehung,“ auf die ich mir jetzt erlaube Ihre Aufmerksamkeit hinzulenken.

19

Die Rede beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung der Erziehung.

„Ich stelle mir vor, in welchem Zustande sich ein Mensch befinden muss, der der menschlichen Gesellschaft entfremdet, ganz dem Ermessen der wilden Natur überlassen ist. Sodann richte ich meine Gedanken auf einen Menschen, der inmitten der wohlgeordneten, gebildeten Bürgerschaft des letzten aufgeklärten Jahrhunderts durch tiefe Kenntnisse seinem Vaterlande zur Ehre und zum Ruhme gereicht. Welcher Unterschied! Welcher unermessliche Abstand trennt den einen vom andern. Diesen Unterschied hat die Erziehung hervorgebracht. Sie beginnt von der Wiege an; zuerst wird sie durch die blosse Nachahmung erworben, allmählich entwickeln sich Verstand, Gedächtniss, Einbildungskraft, Geschmack für das Schöne, es erwacht die Liebe zu sich selbst und zum Nächsten, die Liebe zum Ruhme, der Sinn für die Ehre, der Wunsch das Leben zu geniessen. Alle Fähigkeiten des Verstandes, alle Gaben, alle Leidenschaften, Alles das verwerthet die Erziehung und stellt es in den Dienst eines wohlgeordneten Ganzen,

und der Mensch, als wäre er von Neuem geboren, zeigt sich als das Geschöpf in seiner Vollkommenheit.“ Aber die Erziehung darf die Leidenschaften des Menschen und die ihm angebornen Begierden nicht unterdrücken und ausrotten. „Alles das muss bei ihm erhalten bleiben: sonst würden wir seine Natur verderben, ihr Gewalt anthun und sein Glück schädigen.“ „Es ist nichts gewöhnlicher, als über die Leidenschaften klagen zu hören, aber wie richtig hat Mably[1]) gesagt: je stärker die Leidenschaften, um so nützlicher sind sie für die Gesellschaft; schädlich sein kann nur ihre Richtung.“

„Aber die blosse Verstandesbildung ist noch nicht der Abschluss der Erziehung. Während der Mensch seinen Verstand mit Kenntnissen bereichert, muss er auch noch verstehen lernen, das Leben zu geniessen. Ich meine damit die Bildung des Geschmacks. Leben heisst: empfinden — das Leben geniessen: unaufhörlich etwas Neues empfinden, was uns daran erinnert, dass wir leben.... Nichts hemmt den Strom des Lebens so sehr wie die Unwissenheit; wie ein verödeter, geradliniger Weg begleitet sie das Leben von der Wiege bis zum Grabe. In den niederen Klassen erquicken noch die anstrengenden Arbeiten für des Lebens Nothdurft abwechselnd mit der Erholung den Geist des Landmannes, des Handwerkers.
20 Ihr aber, deren Dasein ein ungerechtes Schicksal andern als eine schwere Last auferlegt hat, ihr, deren Geist abgestumpft, deren Gefühl erstickt ist, ihr geniesst das Leben nicht. Für euch ist die Natur todt, die Schönheiten der Poesie fremd, die Baukunst ihrer Reize und ihrer Herrlichkeiten entblösst, die Weltgeschichte gleichgültig. Ich tröste mich mit dem Gedanken, dass aus unsrer Universität derartige Erzeugnisse vegetabilischer Natur nicht hervorgehen werden; sie werden nicht einmal hierher kommen, wenn sie unglücklicherweise zu einem solchen Schicksal geboren sind. Sie werden nicht herkommen, wiederhole ich, denn hier weilt die Liebe zum Ruhme, das Gefühl für Ehre und inneres Verdienst.“

„Die Natur, die den Menschen bei seiner Geburt so freigebig beschenkt hat, scheint noch nicht zufrieden gewesen zu sein und so hat sie einem jeden den Wunsch eingeflösst, die andern zu übertreffen, bekannt zu sein, ein Gegenstand der Bewunderung zu sein, berühmt zu werden, und auf diese Art hat sie dem Menschen die Pflicht auferlegt, selbst für seine Vervollkommnung zu sorgen. In unaufhörlicher Thätigkeit strebt der Geist, Ehrenbezeugungen zu erringen, sich emporzuheben und das ganze Menschengeschlecht schreitet von Vervollkommnung zu Vervollkommnung — und wo ist ein Ende abzusehen?“

---

1) [Gabriel Bonnot de Mably (1709—1785), französischer Philosoph, Condillacs Bruder.]

„Wir wollen das Leben hochschätzen, solange es seine Würde nicht verliert. Mögen Vorbilder in der Geschichte, der wahre Begriff von der Ehre, Liebe zum Vaterlande, die in jungen Jahren erweckt ist, bei Zeiten den Leidenschaften die edle Richtung und die Kraft geben, die uns erlauben, über die Schrecken des Todes zu siegen."

Indem er sich zur Moral als dem wichtigsten Gegenstande der Erziehung wendet, verweilt Lobatschefskij besonders bei der Liebe zum Nächsten. „Duclos, Rochefoucauld, Knigge haben erklärt, auf welche Weise die Selbstliebe die versteckte Triebfeder aller Handlungen der Menschen in der Gesellschaft zu sein pflegt. Wer, frage ich, hat vollständig darzulegen verstanden, welche Pflichten aus der Liebe zum Nächsten entspringen?"[1])

Die ganze Rede, aus der ich Bruchstücke angeführt habe, athmet, wie man sieht, feurigen Idealismus, Liebe zur Universität, Ehrfurcht vor der menschlichen Natur, vor der menschlichen Vernunft, vor der menschlichen Würde. 21

Den schönen Worten der Rede entsprach auch ein schönes Leben, ganz erfüllt von der Arbeit für die Entwickelung der Wissenschaft, für das Wohl der heimischen Universität. Als das werthvollste Ergebniss dieses Lebens erschienen die geometrischen Untersuchungen, von deren Bedeutung für Mathematik und Naturphilosophie schon die Rede war. Aber unser grosser Geometer war nicht ausschliesslich Geometer, wie es Steiner oder Staudt waren, und seine Arbeiten in der Algebra und Analysis haben ebenfalls nicht geringes Interesse. Vorhin ist erwähnt worden, dass sich Lobatschefskij unter der Anleitung von Bartels mit dem Studium des berühmten Gaussschen Werkes: „Disquisitiones arithmeticae" beschäftigt hatte. In diesem Werke macht Gauss, um seine Untersuchungen über die Zahlentheorie zu krönen, eine merkwürdige Anwendung von ihnen. Die alten Geometer hatten die bekannten Konstruktionen für das regelmässige Dreieck, Sechseck, Zehneck gegeben, mit Hülfe von Zirkel und Lineal. Gauss zeigte, dass es eine unendliche Menge andrer regelmässiger Vielecke giebt, die ebenfalls mit Hülfe von Zirkel und Lineal konstruirt werden können.

Die erste Arbeit Lobatschefskijs, die er 1813 der physisch-mathematischen Abtheilung vorlegte: „Ueber Auflösung der algebraischen Gleichung $x^n - 1 = 0$", bezog sich ausdrücklich auf diese Frage. Später kam Lobatschefskij auf dieselbe Frage zurück in dem Aufsatze: „Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte

1) In meinem vorhin erwähnten Schriftchen: „Bronner und Lobatschefskij" habe ich als eine Vermuthung den Gedanken ausgesprochen, dass Lobatschefskij seine moral-philosophischen Ansichten wesentlich dem Einflusse seines Lehrers Bronner verdankt.

Grad durch 8 theilbar ist" und fügte zu der Theorie von Gauss eine wichtige Ergänzung hinzu.

Schon Ende der zwanziger Jahre, so muss man annehmen, dachte Lobatschefskij daran, ein Lehrbuch der Algebra für Gymnasien zu schreiben. Später führte er diese Absicht aus und entschloss sich, einen Leitfaden für Lehrer und ein Lehrbuch für Hörer an der Universität abzufassen. Ein solches Buch gab er in der That 1834 heraus unter dem Titel: „Die Algebra oder die Rechnung des Endlichen." Das Lehrbuch Lobatschefskijs unterscheidet sich vortheilhaft von den gleichzeitigen Lehrbüchern der Algebra, nicht nur von den russischen sondern auch von den ausländischen, und zwar durch seine systematische Anordnung und durch die Strenge in der Erklärung der Grundbegriffe. „In allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften," so schreibt er im Vorwort, „erwirbt man die ersten Begriffe leicht, aber immer mit Mängeln behaftet. Schliesslich muss man aber einmal wieder zu den Grundlagen zurückkehren und dann ist es angebracht, auf vollkommene Strenge Gewicht zu legen." Nach der Ansicht Lobatschefskijs „beginnt erst in der Algebra die Mathematik mit der ganzen Schärfe der Begriffe und mit der ganzen Weite des Gesichtskreises; während die Arithmetik bloss den Anfang bildet und nur zur Vorbereitung und zur Uebung dient." Deshalb beginnt Lobatschefskij seine Algebra von den ersten Begriffen der Arithmetik aus, von den Grundgesetzen der arithmetischen Operationen und giebt eine systematische Entwickelung der Wahrheiten der reinen Mathematik. Er zeigt sich dabei als ein würdiger Vorgänger des grossen Systematikers der Mathematik unsrer Zeit, des deutschen Gelehrten Weierstrass. Als ein charakteristischer Zug der Algebra Lobatschefskijs erscheint auch ihre bemerkenswerthe Reichhaltigkeit. So bringt Lobatschefskij in der Algebra zum Beispiel die Lehre von den trigonometrischen Funktionen, indem er für diese Funktionen eine rein analytische Erklärung giebt; in dieser Beziehung hat sein Lehrbuch den Vorzug sogar von den klassischen Werken Eulers: „Introductio in Analysin infinitorum," und Cauchys: „Analyse algébrique." In seinem Lehrbuche setzt Lobatschefskij unter Anderm auch seine eigenthümliche Methode auseinander, das Verschwinden oder die Konvergenz unendlicher Reihen festzustellen. Diese Methode entwickelte er später in den Abhandlungen:

1) Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen (Gelehrte Schriften der Kaiserlichen Universität Kasan für 1834).

2) Eine Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen und sich dem Werthe von Funktionen sehr grosser Zahlen zu nähern (Gelehrte Schriften für 1835).

3) Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen. [Deutsch, Kasan 1841.]

Schon in der ersten dieser Abhandlungen berührt Lobatschefskij die 23 grundlegende Frage der Differentialrechnung, die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit, und eilt hier ebenso wie bei der Frage über die Grundlagen der Geometrie seinen Zeitgenossen um ein halbes Jahrhundert voraus. Die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts hatten die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit nicht berührt, weil sie stillschweigend voraussetzten, dass jede stetige Funktion von selber auch eine Ableitung besitze. Ampère hatte versucht, diese Eigenschaft zu beweisen, aber sein Beweis zeichnet sich nicht durch Strenge aus. Die Frage nach der Beziehung zwischen Stetigkeit und Differentiirbarkeit zog in den siebziger Jahren die Aufmerksamkeit auf sich, als Weierstrass ein Beispiel einer Funktion gab, die in einem bestimmten Intervalle stetig war und zu gleicher Zeit in diesem Intervalle keine bestimmte Ableitung hatte (nicht differentiirbar war). Indessen hatte Lobatschefskij schon in den dreissiger Jahren auf die Nothwendigkeit hingewiesen, zwischen „allmählicher Aenderung“ (nach unsrer Ausdrucksweise: Stetigkeit) und zwischen „Ununterbrochenheit“ (jetzt: Differentiirbarkeit) der Funktionen zu unterscheiden. Besonders scharf spricht er diesen Unterschied aus in seiner „Methode, das Verschwinden unendlicher Reihen festzustellen u. s. w.“ „Eine Funktion ändert sich allmählich, wenn ihre Zuwachse zugleich mit den Zuwachsen der Veränderlichen zur Null herabsinken. Eine Funktion ist ununterbrochen, wenn das Verhältniss zweier solcher Zuwachse bei deren Verkleinerung unmerklich in eine neue Funktion übergeht, die mithin der Differentialquotient sein wird. Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden, dass die Elemente unter jedem Integralzeichen sich immer allmählich ändern und ununterbrochen bleiben.“

Ausführlicher geht Lobatschefskij auf diese Frage ein in der Arbeit „Ueber das Verschwinden trigonometrischer Reihen“, in der auch sehr interessante allgemeine Betrachtungen über Funktionen enthalten sind. „Wie es scheint,“ so schreibt er, „sind das zwei Wahrheiten, an denen man nicht zweifeln kann, dass sich nämlich Alles in der Welt durch Zahlen darstellen lässt und dass jede Veränderung und Beziehung darin durch eine analytische Funktion dargestellt wird. Indessen erlaubt eine weite Auffassung der Theorie das Bestehen einer Abhängigkeit nur in dem Sinne, 24 dass man die Zahlen, mit einander verbunden, als zusammen gegeben annimmt. In seiner Funktionenrechnung (Calcul des functions), durch die er die Differentialrechnung ersetzen wollte, hat Lagrange die Allgemeinheit der Begriffe in demselben Maasse beeinträchtigt, in dem er an Strenge der Behandlung zu gewinnen dachte.“ (Gelehrte Schriften der Universität Kasan. 1834. Heft II, S. 183.)

Ich will die andern Arbeiten von Lobatschefskij, über die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und über die Mechanik unerwähnt lassen. Alle Arbeiten Lobatschefskijs legen von seiner merkwürdigen Beherrschung des Rechnungsapparates Zeugniss ab und beweisen, dass sein mathematischer Genius in die feinsten Fragen der Analysis eindrang.

Seine Liebe zur Wissenschaft beschränkte sich nicht bloss auf die Mathematik, diesen „Triumph des menschlichen Verstandes.“ Sie erstreckte sich auf alle Zweige des Wissens: Botanik, Chemie, Anatomie zogen ihn ebenso an und waren ihm gut bekannt.

Aber ganz besonders liebte Lobatschefskij die Erfahrungswissenschaften. Nicht umsonst spricht er in seiner Rede an einer vorhin erwähnten Stelle mit solchem Eifer von der Bedeutung der Erfahrung.

Wir finden Lobatschefskij zum Beispiel als einen thätigen Theilnehmer an Beobachtungen über die Temperatur des Erdbodens. Zu diesem Zwecke wurde auf dem Hofe der Universität ein Brunnen angelegt, in dem bis zu einer Tiefe von 15 Sashen [32 m] gegen zwanzig Thermometer aufgestellt wurden. 1833 und 1834 belief sich die Zahl der Beobachtungen jährlich auf 3050. Die Beobachtungen hörten im Jahre 1835 auf, weil in dem Brunnen ungewöhnliche Mengen Kohlensäure auftraten; aber 1841 erneuert Lobatschefskij die Beobachtungen und richtet seine Aufmerksamkeit besonders auf die Temperatur der vegetabilischen Bodenschicht; für die Beobachtungen über die Temperatur dieser Schicht, deren Wichtigkeit für die Landwirthschaft erst in der letzten Zeit anerkannt zu werden beginnt, ersinnt Lobatschefskij selber ein Metallthermometer von besondrer Konstruktion.

Ebensolches wissenschaftliches Interesse zeigte Lobatschefskij auch für die Astronomie.

25 Im Jahre 1842, am 26. Juli, war in einem Theile des europäischen Russland eine totale Sonnenfinsterniss sichtbar. Der Expedition nach Pensa, die von der Universität Kasan ausgerüstet wurde und die aus dem Astronomen Lapunof und dem Professor der Physik, Knorr, bestand, schloss sich auch Lobatschefskij an. Nach der Rückkehr liess Lobatschefskij einen ungewöhnlich ausführlichen Bericht drucken. In diesem Berichte Lobatschefskijs ist unter Anderm eine Sammlung von Mittheilungen über die wunderbare Erscheinung der Sonnenkorona enthalten, die nur während einer Sonnenfinsterniss zu beobachten ist, und es werden die verschiedenen Theorien, die über diese Frage bestehen, auseinandergesetzt und erörtert. Lobatschefskij erklärt sich weder für die Theorie, die zur Erklärung der Sonnenkorona das Vorhandensein einer Sonnenatmosphäre annimmt, noch für die Theorie, die diesen Ring durch Beugung der Strahlen in der Nähe der Oberfläche des Mondes erklärt. Bei der Besprechung der zweiten Theorie setzt Lobat-

schefskij seine Ansicht über die Lichttheorien auseinander. „Die Wellenlehre," sagt er, „kann man eigentlich nicht als Theorie bezeichnen, sondern nur als eine Darstellung der Erscheinungen, die man erklären will. Die wahre Theorie muss in einem einfachen, einzigen Principe bestehen, aus dem sich die Erscheinung in aller ihrer Mannigfaltigkeit als nothwendige Folge ergiebt. Von Wellen reden, heisst die ganze Betrachtung auf etwas gründen, was im strengen Sinne gar nicht vorhanden ist, ebenso wie wir von Linien und Flächen reden, während es doch in der Natur nur Körper giebt."

Unbefriedigt von der Wellentheorie spricht Lobatschefskij den Gedanken aus, es sei möglich, die Wellentheorie und die Emanationstheorie mit einander zu vereinigen, indem man annehme, dass die Lichttheilchen an ihrer Ausgangsstelle nicht bloss eine Translations-, sondern auch eine Vibrationsbewegung erhalten. Die erste ist die Ursache des Leuchtens und der Wärme; die zweite erklärt die Entstehung der Farben und aller Erscheinungen des polarisirten Lichtes. Nach seiner Ansicht kann die Newtonsche Emanationstheorie bestehen bleiben, wenn man nur hinzufügt, dass „der Strom des Aethers, wenn er auf seinem Wege Hindernisse trifft, eine Welle bildet, ebenso wie das Wasser in einem Flusse, das einen Damm getroffen hat, sich als Woge erhebt und sich in zwei Wellen theilt, zwischen denen ein 26 leerer Raum entsteht; schliesslich vereinigt sich das Wasser wieder in einen allgemeinen Strom. Oder es ist ebenso wie bei der Luft, die, ein Hinderniss treffend, gleichfalls Wellen schlägt und sich in zwei Ströme theilt, mit einem leeren Raume dazwischen; die Wellenbewegung bringt hier bisweilen einen Schall hervor und hinter dem leeren Raume erneuert sich das frühere Fliessen. Das Fallen des Wassers hinter dem Damm und der leere Raum, den die Luft hinter der Wand bildet, entsprechen folgerichtig dem Schatten, der hinter undurchsichtigen Körpern geworfen wird; das Streben des Wassers oder der Luft, sich von zwei Seiten her zu vereinigen, stellt uns die Ablenkung des Lichtes nach der Mitte des Schattens dar."

Zur Erscheinung der Sonnenkorona zurückkehrend, erklärt Lobatschefskij diese dadurch, dass unsre Atmosphäre, wenn sie vom Lichte berührt wird, selbst zu leuchten anfängt, und dass wir in dem Ringe um den Mond herum das eigene Licht der oberen Luftschichten erblicken, ebenso wie diese feine Hülle der Erde für die Bewohner der übrigen Planeten und des Mondes in hellem Lichte erglänzen muss.

Ueber die Mannigfaltigkeit der wissenschaftlichen Beschäftigungen Lobatschefskijs müssen wir uns um so mehr verwundern, als seine eifrige Thätigkeit als Professor und ausserdem als Rektor der Universität schon allein seine ganze Zeit in Anspruch nehmen konnte.

Vom Jahre 1820 an zum Beispiel befand sich an der Universität

Kasan kein einziger mehr von den deutschen Lehrern Lobatschefskijs. 1816 geht Littrow weg und stirbt Renner, ein Jahr später nimmt Bronner auf sechs Monate Urlaub, reist nach der Schweiz und kehrt nicht wieder nach Kasan zurück. 1820 vertauscht Bartels die Professur in Kasan mit einer in Dorpat. In der physisch-mathematischen Abtheilung, die kurz zuvor eine Fülle wissenschaftlicher Kräfte besessen hatte, verbleiben Lobatschefskij, Simonof und Nikolskij. Aber der zweite von diesen wird bald zu der Weltumsegelung mit Bellingshausen entsendet und Nikolskij widmet sich der Angelegenheit des Universitätsbaues. Die ganze Last des Unterrichts liegt auf Lobatschefskij. Er trägt die gesammte reine Mathematik, die Physik und die Astronomie vor.[1])

Nach der Rückkehr Simonofs von seiner Weltreise hörte Lobatschefskij auf die Astronomie zu lesen, dafür übernahm er aber die Vorlesungen über Mechanik und mathematische Physik.

Erst in der Mitte der dreissiger Jahre, als die physisch-mathematische Facultät Knorr als Professor der Physik erhielt und als Professor der Mechanik den vielen, von uns noch persönlich bekannten, ehrwürdigen

---

1) Ich führe als Beispiel ein Bruchstück an aus dem Plane der Vorlesungen und Lehrgegenstände an der Kaiserlichen Universität Kasan, vom 17. August 1824 bis zum 28. Juni 1825. Nikolaj Lobatschefskij, Dekan der physisch-mathematischen Abtheilung, ordentlicher Professor der reinen Mathematik, kündigt

a) Aus dem Gebiete der reinen Mathematik für die Studenten der ersten Abtheilung Folgendes an: Ueber die Eigenschaften der ganzen Zahlen, über imaginäre Potenzen, über die Wurzeln der Gleichungen, Elemente der Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie nach eigenen Heften; für die Studenten der zweiten Abtheilung: Analytische Geometrie, Differenzenrechnung, Anfangsgründe der Differentialrechnung nach dem Leitfaden von Lacroix; für die Studenten der dritten Abtheilung: Integral- und Variationsrechnung, Anwendung der Analysis auf Geometrie, die ersten beiden nach Lacroix, die letztere nach Monge.

b) Aus dem Gebiete der Physik für die Studenten der ersten Abtheilung: Grundlagen der Physik, die Untersuchungsmethoden in dieser Wissenschaft, über die anziehenden und die abstossenden Kräfte, die Anschauungen der Physiker über die Körper, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, über die Elasticität der Körper und über die Verdampfung der Flüssigkeiten. Für die Studenten der zweiten und dritten Abtheilung: Ueber Elektricität, Magnetismus, Licht und Wärme, wobei er in seinem Unterrichte das Werk Biots zu Grunde legt: Traité complet de Physique, zugleich mit Benutzung andrer Schriftsteller.

c) Aus dem Gebiete der Astronomie wird er den Studenten der dritten Abtheilung sphärische und theoretische Astronomie anbieten nach Anleitung der Werke von Delambre.

Im Jahre 1826—27 las er ausser den Vorlesungen über reine Mathematik noch Statik und Mechanik der festen und der flüssigen Körper nach Lagrange und Poisson und mathematische Physik nach Fourier, Laplace, Poisson und Fresnel.

P. J. Kotjelnikof, konnte sich Lobatschefskij auf den Unterricht in der reinen Mathematik beschränken.[1])

Noch nicht zufrieden mit dem obligatorischen Unterrichte an der Universität, hielt Lobatschefskij mehrmals öffentliche Vorlesungen über Physik. Eine dieser Vorlesungen behandelte die Theorie der chemischen Trennung und Zusammensetzung der Körper durch die Wirkung der Elektricität und war von Versuchen begleitet. Für den Handwerkerstand hielt er 1839—1840 einen besonderen populären Kursus der Physik unter dem Namen: „Volksthümliche Physik".

28

Ueber die Methode, die Lobatschefskij beim Halten der Vorlesungen befolgte, hat sein begabter Schüler und Nachfolger auf dem Lehrstuhle, Professor A. F. Popof, Erinnerungen hinterlassen. Nach diesen Erinnerungen „verstand es Lobatschefskij, im Hörsaale scharfsinnig oder hinreissend zu sein, je nach dem Gegenstande seines Vortrags. Im Allgemeinen glich sein gesprochener Stil dem geschriebenen nicht. Während sich seine Abhandlungen durch einen knappen und nicht immer klaren Stil auszeichneten, liess er es sich im Hörsaale angelegen sein, die Auseinandersetzungen mit aller Klarheit zu geben, er liebte es aber mehr, selbst zu lehren, als die Schriften andrer auszulegen, indem er es den Zuhörern überliess, sich selbst mit der gelehrten Litteratur bekannt zu machen. Seine öffentlichen Vorlesungen über Physik zogen ein zahlreiches Publikum in den Hörsaal, und die Vorlesungen für einen auserwählten Zuhörerkreis, in denen Lobatschefskij seine neuen Elemente der Geometrie entwickelte, müssen mit Fug und Recht als äusserst scharfsinnig bezeichnet werden."

Wie ernst es Lobatschefskij bis zum Ende seines Lebens mit seinen Pflichten nahm, dafür zeugt seine gedruckte, ausführliche und auch an selbständigen Ergebnissen reiche Besprechung der Doktordissertation A. F. Popofs: „Ueber die Integration der Differentialgleichungen der Hydrodynamik, nachdem man sie auf lineare Form gebracht hat." Kasan 1845. Der Veröffentlichung der Urtheile über die Dissertationen legte Lobatschefskij sehr grosse Bedeutung bei, und in seiner Eigenschaft als Verwalter des Kasaner Lehrbezirks setzte er dem Minister für Volksaufklärung seine Ansicht auseinander, dass jeder Doktordissertation eine gedruckte, ausführliche Besprechung beigelegt werden müsse. Obgleich ihm anheim gestellt wurde,

---

1) Im Jahre 1833—34 las Lobatschefskij mit Benutzung der Werke von Cousin, Lagrange und Lacroix für die Studenten des zweiten Kurses: Integration der Funktionen, für die des dritten Kurses: Integration der Differentialgleichungen mit einer Veränderlichen und für die Studenten des vierten Kurses: Integration der partiellen Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Diese Kurse behielt er bis zum Ende seiner Professorenthätigkeit bei.

nach seinem Ermessen zu handeln, zog er doch vor, über diesen Punkt die Ansicht des Senates der Universität Kasan zu hören. Der Senat verhielt sich dem Plane Lobatschefskijs gegenüber ablehnend, indem er der Ansicht war, eine solche Veröffentlichung dürfe, da man sie dem Urtheile des Publikums gegen den Willen des Verfassers aussetze und daher von diesem besondere Strenge verlange, die zuweilen für die Doktoranden lästig sei, 29 nicht als eine beständige Pflicht auferlegt werden, sondern müsse dem eigenen Ermessen und dem Wunsche der Professoren überlassen werden, die diese Beurtheilungen abfassten.“ In seinem Antwortschreiben erklärte Lobatschefskij dem Senat, „dem Urtheile des Publikums ist ein Verfasser bei jeder von ihm veröffentlichten Arbeit gegen seinen Willen ausgesetzt. Wenn daher der vom Senate angeführte Grund durchschlagend wäre, so wäre das ein Zeichen, dass die Professoren beabsichtigten, ihre Arbeiten nicht drucken zu lassen.“ Aber angesichts des Widerstandes des Senats gegen die von ihm vorgeschlagene Maassregel beschränkte sich Lobatschefskij auf das Anerbieten: „jedesmal ausführlich die Gründe anzugeben, die ihn veranlassten, an der Veröffentlichung der ganzen Beurtheilung der Dissertation festzuhalten.“

An strenge Erfüllung seiner Pflichten gewöhnt, wie das aus dem eben angeführten Zwischenfalle hervorgeht, und von dem Wunsche beseelt, ebensolche Pflichterfüllung auch bei andern zu finden, bethätigte Lobatschefskij auch bei der Erfüllung seiner Rektorpflichten die ganze Energie, die ihn auszeichnete, die ganze Unermüdlichkeit in der Arbeit, die um so nöthiger war, als gerade in die Zeit seines Rektorats die Reorganisation der Universität fiel, die in dem vorhergehenden Zeitraume ganz in Verwirrung gerathen war, und ausserdem die Erbauung vieler Gebäude unsrer Universität (des physikalischen Kabinets, der Bibliothek, der Anatomie und des Observatoriums).

Ein unermüdlicher und energischer Verwaltungsmann, der auf alle Einzelheiten des ökonomischen Lebens der Universität einging, der sogar die Baukunst studirte, um den Bau der Gebäude mit Erfolg beaufsichtigen zu können, beschäftigte sich Lobatschefskij doch mit besondrer Vorliebe mit den Hülfsmitteln und den äusseren Zeichen des geistigen Lebens der Universität, mit ihrer Bibliothek und mit ihrer Zeitschrift.

Die Bibliothek befand sich in vollständiger Unordnung, als Lobatschefskij (am 8. Okt. 1825) die Pflichten des Bibliothekars übernahm. Drei Jahre unermüdlicher, energischer Arbeit brachten die Bibliothek in Ordnung; es wurde ein vollständiges Inventar der Bibliothek aufgenommen, Kataloge hergestellt, alle ihre Lücken ermittelt. Lobatschefskij liebte die Bibliothek so sehr, dass er die Pflichten des Bibliothekars auch dann nicht

aufgab, als er Rektor wurde und sie erst im Jahre 1835 einem andern überliess. 30

Die Universität Kasan hatte seit 1812 ihr Organ, das anfangs „Kasaner Nachrichten“ hiess, nachher „Kasaner Bote“. Aber dieses Organ besass ganz und gar nicht den Charakter einer gelehrten Zeitschrift: Originalaufsätze gelehrten Inhalts waren unter Aufsätzen vollständig andern Charakters versteckt, unter Uebersetzungen und litterarischen Aufsätzen, und waren mit politischen Nachrichten und obrigkeitlichen Verordnungen untermischt. Auf Lobatschefskijs Veranlassung wurde diese Zeitschrift seit 1834 durch die „Gelehrten Schriften“ ersetzt.

Die Gedanken, die Lobatschefskij bei dieser Umgestaltung leiteten, sind in dem Vorworte zu dem ersten Hefte der „Gelehrten Schriften“ auseinandergesetzt. Das Vorwort beginnt mit einem Hinweise auf die Bedeutung des Buchdruckes, dieser zweiten Gabe des Wortes, dank der „ein Gedanke, der abends im Geiste eines Menschen entstanden ist, morgens auf dem Papiere tausendmal wiederholt und so an allen Enden der bewohnten Erde verbreitet wird. So ergiesst ein Funke, der sich an einem Punkte entzündet hat, seine Strahlen augenblicklich auch in einem weiten Umkreise. So verbreitet sich das Licht des Geistes, dieses Abbild des Tageslichtes, und vermag zu leuchten. So können Männer, die den Wissenschaften ergeben sind, dem Wunsche nicht widerstehen, ihre Entdeckungen, ihre Meinungen und Erläuterungen aufzuschreiben und drucken zu lassen.“ Aber ebenso wie es „in jedem aufgeklärten Reiche zwei Arten der Bildung giebt, eine allgemeine, die man als die volksthümliche bezeichnen kann, und eine andre, die der gelehrten Welt gehört,“ so muss es auch zwei Arten von periodischen Veröffentlichungen geben. „Die einen müssen einen mannigfaltigen Inhalt haben, wie es ja auch bei der Volksbildung sein muss, anziehend durch seine Neuheit und verlockend durch ein Gemälde des Lebens der Gegenwart, durch wahrheitsgetreue Schilderung der Leidenschaften und Gefühle.“ „Höhere gelehrte Anstalten, Akademien und Universitäten sollen keine solchen Zeitschriften herausgeben; sie müssen eine andre Pflicht übernehmen.“ Diese andre Pflicht ist die Herausgabe einer rein gelehrten Zeitschrift. Eine Zeitschrift dieser Art sind auch unsre „Gelehrten Schriften“ von Anfang an gewesen. Der erste Aufsatz des 31 ersten Heftes: „Die Erniedrigung des Grades einer zweigliedrigen Gleichung, wenn der um Eins verminderte Grad durch acht theilbar ist“ stammt von Lobatschefskij.

Von der rastlosen Arbeit des Gelehrten, des Professors und Rektors suchte Lobatschefskij Erholung in der Liebe zur Natur, in bescheidenen landwirthschaftlichen Beschäftigungen. Sechzig Werst [64 km] von Kasan,

an der Wolga stromaufwärts, liegt ein kleines Dorf „Belowolshskaja Slobodka", das Lobatschefskij gehörte; hier legte er einen schönen Garten an, und noch heutigen Tages hat sich darin ein Cedernhain erhalten. Nach einer rührenden Ueberlieferung, die seine Familie bewahrt hat, sagte Lobatschefskij, als er die Cedern pflanzte, schwermüthig, er werde deren Früchte nicht erleben; seine Voraussagung hat sich erfüllt: die ersten Cedernnüsse wurden im Todesjahre Lobatschefskijs gepflückt, aber erst nach seinem Tode.

Aber auch bei der Beschäftigung mit dem Gartenbau und der Landwirthschaft strebte sein forschender Geist danach, Neuerungen einzuführen und mit dem Schlendrian der in den vierziger Jahren üblichen gutsherrlichen Wirthschaft zu brechen. Bei seinem Besitzthume legte er eine Wassermühle an und erfand ein eignes Verfahren zur Herstellung von Mühlsteinen, auch kaufte er Guano auf zum Düngen. Besondere Aufmerksamkeit widmete er dem Gartenbau und der Schafzucht. Lobatschefskij brachte Merinoschafe auf sein Besitzthum, die er aus dem Erlös für einen Brillantring anschaffte, den er vom Kaiser Nikolaus erhalten hatte, und für seine Verbesserungen bei der Bearbeitung der Wolle wurde er durch die silberne Medaille der Kaiserlichen Landwirthschaftlichen Gesellschaft zu Moskau belohnt. Noch nicht zufrieden mit der Anwendung seiner wissenschaftlichen Kenntnisse in der eigenen Wirthschaft, wusste Lobatschefskij ausserdem auch andre Landwirthe des Gouvernements Kasan anzuregen und wurde eins der eifrigsten Mitglieder der 1839 zu Kasan eröffneten Kaiserlich Kasanischen Oekonomischen Gesellschaft, in der er ungefähr fünfzehn Jahre lang das Amt des Vorsitzenden einer ihrer Abtheilungen einnahm.

Die ernstliche Hingabe an so zahlreiche Beschäftigungen machte Lobatschefskij verschlossen, für den Verkehr unzugänglich und wortkarg; er
32 erschien finster und streng. Man findet das oft bei Leuten, die in ihrer Jugend feurig und stürmisch sind, die aber gerade wegen ihres Feuers sich häufiger als andre den Stürmen des Lebens aussetzen. Solche Lebensstürme, die geeignet sind, den Charakter stark zu beeinflussen, hat es, wir wissen das, auch im Leben Lobatschefskijs gegeben.

Aber unter der strengen, fast mürrischen Aussenseite verbarg sich wahrhafte „Liebe zum Nächsten", ein gutes Herz, Theilnahme für alles redliche Streben, brennende Liebe, ja ein wahrhaft väterliches Verhältniss zur studirenden Jugend und zu allen begabten jungen Leuten. Ein junger Handlungsdiener, der hinter dem Ladentisch ein mathematisches Buch liest, zieht Lobatschefskijs Aufmerksamkeit auf sich; dieser ermöglicht ihm zuerst den Eintritt ins Gymnasium und dann in die Universität, und der junge Handlungsdiener wird nach einigen Jahren der bekannte Professor der

Physik an der Universität Kasan, Bolzani. Der Sohn eines armen Priesters war aus Sibirien zu Fuss nach Kasan gekommen, mit Lobatschefskijs Hülfe tritt er in die medicinische Facultät ein, gelangt dann zu einer angesehenen Dienststellung und aus Dank für die Universität Lobatschefskijs vermacht er dieser seine kostbare Büchersammlung. Mehrfach hat Lobatschefskij als Rektor junge Leute vor den Folgen ihrer Uebereilungen bewahrt, und die Studenten, die aus Lobatschefskijs Zeit und auch die heutigen, bewahren ihm ein ehrfurchtsvolles Andenken.

Die hohen Verstandes- und Gemüthseigenschaften Lobatschefskijs erwarben ihm bei seinen Lebzeiten allgemeine Achtung an der Universität und in der Stadt. Diese Achtung galt in gleicher Weise Lobatschefskij dem Rektor wie Lobatschefskij dem Gehülfen des Kurators, der als „Belisar", wie man ihn damals nannte, zu den Universitätsprüfungen kam.

Aber die Achtung galt dem Menschen, dem Professor, dem Verwaltungsmanne, sie konnte den Mann der Wissenschaft nicht befriedigen, der sich bewusst war, „neue Principien" in diese eingeführt zu haben.

In dieser Beziehung stiess Lobatschefskij bekanntlich entweder auf Gleichgültigkeit[1]) oder grobe und kränkende Spöttereien, von denen eine 33 Beurtheilung, die sich in einer der Petersburger Zeitschriften befindet, voll ist.[2]) Sogar unter den Schülern Lobatschefskijs fand sich keiner, der dessen Ideen bearbeitete und als ihr überzeugter Vertheidiger auftrat. Als Trost konnte ihm einzig der Beifall von Gauss dienen, mit dem Lobatschefskij in Briefwechsel stand, und vielleicht noch die „Beispiele aus der Geschichte", die lehren, dass zu hoch über ihren Zeitgenossen stehende Männer den Lohn der Anerkennung und des Ruhms erst nach ihrem Tode empfangen.

Es vergingen auch keine vierzig Jahre nach Lobatschefskijs Tode, als dieser Lohn nunmehr auch ihm zu Theil wurde.

Der allerhöchste Lohn für einen Denker, der Lohn, der Lobatschefskij bei seinen Lebzeiten versagt blieb, ist die Weiterentwickelung seiner Ideen, das Arbeiten in der Richtung, die er der Wissenschaft gegeben hat. Ein solches Arbeiten findet man jetzt nicht bloss im Vaterlande Lobatschefskijs, sondern auch in allen Kulturländern Europas: in England, Frankreich, Deutschland, Italien und in dem eben aus seinem geistigen Schlafe erwachenden Spanien, ja sogar in den jungfräulichen Wäldern von Texas.

Diese Arbeiten haben seit 1866 begonnen, wo der jetzt verstorbene französische Mathematiker Houël, dessen wir heute mit Dankbarkeit gedenken müssen, eine französische Uebersetzung der deutsch geschriebenen

1) Der Akademiker W. Ja. Bunjakofskij erwähnt in seiner Arbeit „Die Parallellinien", die 1853 gedruckt ist, Lobatschefskijs Untersuchungen gar nicht.

2) „Sohn des Vaterlandes." 1834.

Arbeit Lobatschefskijs: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" herausgab[1]), indem er einen Auszug aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher beifügte. Er hat überdies der Entwickelung der Ideen Lobatschefskijs auch ein eignes selbständiges Werk gewidmet.[2])

34 Im Jahre 1867 wurde eine Abhandlung Riemanns veröffentlicht, die auf die Möglichkeit der Geometrie eines sphärischen Raumes hinwies, einer Geometrie, in der auch das Axiom „zwei gerade Linien können keinen Raum einschliessen" nicht gültig ist.[3]) Andrerseits stellte der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami Untersuchungen über krumme Oberflächen an[4]), bei denen er sich der Principien bediente, die Gauss in seiner berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" entwickelt hatte, und er wurde so zur Behandlung einer besondern Gattung von Flächen geführt, den pseudosphärischen, wie er sie nannte, wobei er auf die Uebereinstimmung der Geometrie dieser Flächen mit der Planimetrie Lobatschefskijs hinwies. Durch Verbindung aller dieser Untersuchungen gelangte man so zu dem Ergebniss, dass ein überall gleichartiger mathematischer Raum von drei Dimensionen (das heisst einer, in dem die Bewegung eines festen, unveränderlichen Körpers möglich ist) von dreierlei Art sein kann. An die eine dieser drei Arten knüpft sich immer fester und fester die Benennung: Lobatschefskijscher Raum. Die beiden andern heissen der Euklidische und der Riemannsche Raum. Die analytische Theorie dieser Räume unterscheidet sie nach dem Vorzeichen eines gewissen Ausdrucks, der der Krümmung einer Fläche analog ist. Für den Euklidischen Raum ist dieser Ausdruck, die Krümmung des Raums, gleich Null, für den Lobatschefskijschen ist er negativ und für den Riemannschen positiv.[5])

35 Die Erforschung der Eigenschaften der Räume im allgemeinen Sinne

1) Études géometriques sur la théorie des parallèles, suivies d'un extrait de la correspondance de Gauss et Schumacher. Traduit de l'Allemand par J Hoüel.

2) Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. 1867. Séconde édition 1883.

3) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Eine russische Uebersetzung dieser Abhandlung, von D. M. Sinzof, befindet sich in dem Sammelwerke „Ueber die Grundlagen der Geometrie", das von der physisch-mathematischen Gesellschaft an der Kais. Universität Kasan zum Jubiläum N. J. Lobatschefskijs herausgegeben worden ist.

4) Saggio di una rappresentazione della geometria non-euclidea — Teorica degli spazii di curvatura costante.

5) [Man vergleiche hierzu und zu dem Folgenden namentlich die gruppentheoretischen Arbeiten von Lie über die Grundlagen der Geometrie, s. Theorie der Transformationsgruppen Bd. III, Leipzig 1893.]

ist nun der Gegenstand der nichteuklidischen Geometrie. Als ein nothwendiges Hülfsmittel erscheint dabei die Vorstellung, dass diese Räume in einem Raume von vier Dimensionen enthalten sind. Deshalb schliesst sich die Geometrie der mehrfach ausgedehnten Räume an die nichteuklidische Geometrie an und bildet sozusagen deren Fortsetzung; indem sie zahlreiche Fragen der Geometrie beleuchtet, erscheint sie gegenwärtig als ein unentbehrliches Hülfsmittel bei der Lösung vieler Aufgaben der Analysis.[1]) Ich erwähne zum Beispiel die merkwürdigen Untersuchungen von Poincaré über die Theorie der automorphen Funktionen und den Nutzen, den Kronecker aus der Geometrie mehrerer Dimensionen bei der Frage über die Trennung der Wurzeln von Systemen simultaner Gleichungen gezogen hat.

Der Gedanke Lobatschefskijs hat, wie das bei allen genialen Gedanken zu geschehen pflegt, die mannigfaltigsten Fragen hervorgerufen. Einerseits stellt er die Frage: Ist denn „der physische Raum unsrer Erfahrung" wirklich ein Euklidischer Raum, wie es uns erscheint und wie unsre begränzte Erfahrung uns zu überreden versucht? Newcomb, Ball, Peirce und andre haben sich nach dem Vorgange von Lobatschefskij mit der Frage beschäftigt, in wie weit astronomische Beobachtungen uns gestatten, die Frage über die Winkelsumme im Dreieck zu erledigen, und indem sie dem von Lobatschefskij selbst angegebenen Wege folgten, sahen sie die Antwort auf diese Frage in der Bestimmung der Parallaxen von Fixsternen. Der königlich irische Astronom Ball, ein bekannter Gelehrter, sagt über diese Frage Folgendes: „Die Astronomen sind oft unangenehm überrascht gewesen, wenn sie als Ergebniss ihrer Bemühungen eine negative Parallaxe erhielten. Schliesslich ist das im Allgemeinen eine Folge der unvermeidlichen Fehler bei solchen mühsamen Beobachtungen, aber man darf nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass, wenn der Raum wirklich eine Krümmung besässe, die negative Parallaxe sich auch aus Beobachtungen von mathematischer Genauigkeit ergeben würde." Der amerikanische Gelehrte C. S. Peirce geht sogar noch weiter und glaubt auf Grund astronomischer Beobachtungen bewiesen zu haben, dass unser Raum ein Lobatschefskijscher Raum ist. 36

Dagegen kam Zöllner auf Grund der Erscheinung, dass der Himmel dunkel ist, und auf Grund von Untersuchungen über die gegenseitige Einwirkung von Massen, die in den Räumen der verschiedenen Arten vertheilt sind, zu dem Schlusse, dass unser Raum zu der Klasse der Riemannschen Räume gehört.

1) Eine schöne Darstellung der Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie und über die Geometrie von mehreren Dimensionen findet man in dem eben erschienenen und unsrer mathematisch-physischen Gesellschaft gewidmeten Werke Prof. Killings: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie".



Viele Gelehrte haben versucht, Naturerscheinungen durch die Annahme zu erklären, dass der Raum eine Krümmung besitzt, indem sie einen Raum von grösserer Dimensionenzahl zuliessen.[1]) Am weitesten ist in dieser Richtung der begeisterte Verehrer Lobatschefskijs, Clifford, gegangen, indem er sich zu der Annahme verstieg, die uns sichtbare Bewegung der Materie sei nichts anderes als eine Aenderung der Krümmung des Raumes. Die wichtigsten Behauptungen seiner merkwürdigen Hypothese bestehen in Folgendem:

1) Die unendlich kleinen Theile des Raumes sind ihrer Natur nach analog mit Erhebungen und Vertiefungen auf einer im Allgemeinen ebenen Fläche; die gewöhnlichen Gesetze der Geometrie finden bei ihnen nicht statt.

2) Die Eigenschaften, sich zu krümmen und sich wieder gerade zu biegen, pflanzen sich unausgesetzt von einem Theile des Raumes zum andern fort, ähnlich wie eine Welle.

37 3) In dieser Veränderung der Krümmung des Raumes besteht nun die Erscheinung, die man als Bewegung der wägbaren oder der ätherischen Materie bezeichnet.

4) In der physischen Welt geht nichts weiter vor als eine Veränderung der Krümmung des Raumes, die (vielleicht) an das Gesetz der Stetigkeit gebunden ist.

Dies die kühnen Spekulationen Cliffords. Ob etwa derartige Spekulationen über die Eigenschaften des Raumes wirklich neue Hypothesen zur Erklärung der Erscheinungen in der Welt liefern können, das wird die Zukunft zeigen. Wie Riemann[2]) sagt, ist es wichtig, dass die Arbeit an der Erklärung der Erscheinungen, die in uns und um uns vorgehen, „nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird."

Ich erwähne übrigens noch, dass Lobatschefskij, was für seine philosophischen Ansichten sehr charakteristisch ist, nicht nur niemals von Eigenschaften des Raumes spricht, sondern sogar behauptet, dass der Raum an und für sich, abgesondert gar nicht vorhanden ist. Es scheint demnach,

---

1) Mach, Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872. „Warum es bis jetzt nicht gelungen ist, eine befriedigende Theorie der Elektricität herzustellen, das liegt vielleicht mit daran, dass man sich die elektrischen Erscheinungen durchaus durch Molekularvorgänge in einem Raume von drei Dimensionen erklären wollte." Mach und auch Bresch (Der Chemismus im Lichte mehrdimensionaler Raumanschauung. Leipzig 1882) haben die Annahme eines Raumes von vier Dimensionen zur Erklärung chemischer Erscheinungen benutzt.

2) [Am Schlusse seiner Habilitationsrede. Ges. Werke, 1. Aufl., S. 268.]

dass Lobatschefskij die Theorien über die Eigenschaften des Raumes nicht gebilligt haben würde, er würde vielmehr, scheint es, die Weiterentwickelung seiner Ansichten und Gedanken in der Stellung der Frage über die nicht-euklidische Geometrie erblickt haben, die wir bei Cayley und F. Klein[1]) finden. Bei diesen Mathematikern wird die etwas metaphysische Frage nach den Eigenschaften des Raumes durch die Frage nach dem Verfahren zur Ausmessung von Abständen ersetzt. Um einen Begriff von ihrem Gedanken zu geben, wollen wir uns vorstellen, dass wir auf der geraden Linie $ABCDEFG\ldots$ Abstände messen, die absolut genommen folgende Werthe haben:

$AB = 1$ Werst[2]), $BC = \frac{1}{2}$ Werst, $CD = \frac{1}{4}$ Werst, $DE = \frac{1}{8}$ Werst, ...,

wir messen sie aber mit einem Massstabe, der sich (zum Beispiel vermöge schneller Temperaturveränderung) verkürzt und zwar beim Uebergang von 38 AB zu BC auf die Hälfte, beim Uebergang von BC zu CD nochmals auf die Hälfte, und so weiter. Dann wird es uns so erscheinen, als ob alle Abschnitte unserm Massstabe gleich wären, also gleich einer Werst und ein Abstand von zwei Werst, der der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

gleich ist, wird subjektiv gleich einer unendlich grossen Zahl von Werst sein; das Ende dieses Abstandes wird bei unserm Messverfahren niemals erreicht werden können. Ein um den Punkt A mit einem Halbmesser von zwei Werst beschriebener Kreis wird der Gränzkreis der Lobatschefskijschen Geometrie sein. Das System der Beziehungen zwischen Abständen und Winkeln wird, wie Cayley und Klein gezeigt haben, mit dem Systeme zusammenfallen, das die Lobatscheftskijsche Geometrie bildet.

Aber welche Stellung der Frage wir auch vorziehen mögen, die Fragen, die unser unsterblicher Geometer auf die Tagesordnung gebracht hat, beschränken sich augenscheinlich nicht bloss auf das Gebiet der Geometrie. An ihrer Lösung muss auch die Physiologie der Sinnesorgane (vorzugsweise des Gesichts und des Gefühls) theilnehmen und ebenso der Zweig der Philosophie, den man als Erkenntnisstheorie bezeichnet. Von ihrer Lösung sind unsre Ansichten über die allgemeine Naturphilosophie abhängig.

Hierin zeigt sich nun die Grösse der Ideen Lobatschefskijs. Je stärker der Schlag ist, den ein schwerer Körper bei seinem Fall auf ein stehendes

1) F. Klein, Ueber nicht euklidische Geometrie. (Math. Ann. Bd. IV und VI.) A. Cayley. Address as President of British Association at Southport 1883.

2) [1067 m.]

Gewässer ausübt, um so weiter dehnt sich die Bewegung der Wellen aus, um so mehr Stellen werden davon ergriffen. Je genialer ein Gedanke, um so grösser das Gebiet wissenschaftlichen Denkens, das seinem Einflusse unterworfen wird. Darin, dass Lobatschefskijs Ideen von jetzt an nicht nur das Interesse der Mathematiker, sondern auch das der Physiker, Astronomen, Physiologen und Philosophen immer mehr auf sich ziehen werden, besteht eben der erste Lohn für unsern Geometer und Denker.

Als zweiter Lohn für Lobatschefskij erscheint die allgemeine Verehrung seines Namens; Zeugniss für diese Verehrung legen ab die zahlreiche Zuhörerschaft, die sich versammelt hat, um sein Andenken zu ehren, die Be-
39 grüssungen, die wir vor Kurzem gehört haben, und die Theilnahme, mit der der Aufruf der physisch-mathematischen Gesellschaft zur Bildung einer Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs aufgenommen worden ist. Beiträge sind fast aus allen Gegenden Europas eingegangen; betheiligt haben sich daran das ferne Amerika ebenso wie eine der ersten gelehrten Anstalten der Welt — die Königliche Gesellschaft zu London, und wie die Realschule einer kleinen deutschen Stadt. Auf unsern Aufruf haben nicht nur Mathematiker geantwortet, sondern auch Philosophen.

Dank allen diesen Beiträgen wird die Stiftung auf den Namen Lobatschefskijs ins Leben treten und wird, durch Unterstützung und Ermuthigung junger Mathematiker, zur Entwickelung der geliebten Wissenschaft Lobatschefskijs beitragen.

Aber Russlands gebildeten Ständen und vor allen Dingen den gebildeten Ständen dieser Stadt, in der Lobatschefskij erzogen ist, gelehrt, gedacht und gewirkt hat, liegt noch eine andere Pflicht ob.

Ein Denkmal Lobatschefskijs gegenüber dem Gebäude seiner geliebten Universität ist kein zu weit getriebener Dank für den Mann, dessen ganzes Leben der Aufklärung seiner heimathlichen Gegend gewidmet war, für den grossen Denker, der für den wissenschaftlichen Ruhm Russlands und der Universität Kasan so viel gethan hat.

Möge dieses Denkmal zukünftige Geschlechter von Lehrenden und Lernenden der Universität Kasan an die erhabene Gestalt des Professors erinnern, der sein ganzes Leben in den Dienst seiner heimathlichen Universität gestellt hat, an den Professor, der es als Ziel der Universität hinstellte, nicht nur den Verstand durch Kenntnisse aufzuklären, sondern auch zur Tugend anzuleiten, Liebe zum Ruhm einzuflössen, Gefühl für Edelmuth, Recht und Ehre, für diese unberührte Redlichkeit, die auch gegenüber verführerischen Beispielen des Missbrauchs, die der Strafe unerreichbar sind, Stand zu halten vermag.

40 Möge dieses Bild des genialen und mächtigen Denkers, der über einen

der wichtigsten Zweige des menschlichen Wissens neues Licht verbreitet und „neue Principien" darin eingeführt hat, ganz Russland verkündigen:

„Auf der Bahn des Verstandes giebt es kein Zurückweichen."

ZUSÄTZE DES VERFASSERS.[1])

S. 220, Z. 4 v. u. „aber es ist wohl unzweifelhaft, dass Lobatschefskij schon vor dem Jahre 1823 begonnen hat, sich mit der Geometrie zu beschäftigen."

Diese Annahme ist jetzt zur Gewissheit geworden, denn nach dem Erscheinen der russischen Ausgabe meiner Rede erhielt ich ein altes Kollegienheft mit einer Nachschrift der Vorlesungen, die Lobatschefskij während der Jahre 1815 und 16 an der Universität Kasan gehalten hat. In diesem Hefte befinden sich drei kurze Darstellungen einer systematischen Bearbeitung der Parallelentheorie und in jeder dieser Darstellungen ist eine andere Auffassung der Parallelentheorie enthalten.

Nach dem Vorgange von L. Sohncke in Ersch und Grubers „Allgemeiner Encyclopädie der Wissenschaften und Künste" kann man die Versuche, die zur Vervollständigung der Parallelentheorie gemacht worden sind, in drei Klassen eintheilen.

In die erste Klasse gehören die Versuche, bei denen eine neue, von der Euklidischen abweichende, Erklärung der Parallellinien zu Grunde gelegt wird. Man erklärt die Parallellinien entweder als solche, die in allen Punkten gleich weit von einander abstehen, oder als solche, die ein und dieselbe Richtung haben. Lobatschefskij schliesst sich in dem ersten Vorlesungshefte der letzteren Auffassung an, die später von C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation: „De undecimo Euclidis axiomate iudicium. Jena 1824" sehr ausführlich entwickelt worden ist. Vor dem Jahre 1815 findet sich diese Auffassung nur in einem holländischen Werke von Swinden: „Grondbeginsels der Meetkunde. Amsterdam 1790."

Die zweite Klasse der Beweisversuche führt Unendlichkeitsbetrachtungen ein und benutzt unendlich grosse Theile der Ebene. Ihr erster Vertreter ist Bertrand de Génève in seinem Buche: „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. 1778." Auch Legendre hat diese Betrachtungsweise vielfach benutzt. Der damit verwandte Beweis, den

---

1) Der Verfasser hat diese Zusätze eigens für die vorliegende deutsche Uebersetzung geschrieben.



Lobatschefskij in dem zweiten Vorlesungshefte giebt, hat besonders mit dem Beweise grosse Aehnlichkeit, den Crelle in dem Schriftchen: „Ueber Parallelentheorien und das System der Geometrie.“ Berlin 1816, gegeben hat. Später hat Crelle seinen Beweis in der Abhandlung: „Theorie der Parallelen, Crellesches Journal Bd. 11“ wieder abgedruckt.

Am anziehendsten ist aber das dritte Heft. Dieses enthält einen Beweis des Satzes, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist. Der Beweis schliesst sich am nächsten denen von Legendre an und zeigt, dass sich Lobatschefskij sehr eingehend mit den Arbeiten Legendres über diesen Gegenstand beschäftigt hat. Zunächst beweist Lobatschefskij, dass die Winkelsumme zwei Rechte nicht übersteigen kann; sodann zeigt er, dass die Winkelsumme in jedem Dreiecke gleich zwei Rechten ist, sobald sie nur in einem einzigen diesen Werth hat. Es handelt sich also noch darum, ein Dreieck zu finden, dessen Winkelsumme gleich zwei Rechten ist. Lobatschefskij glaubt beweisen zu können, dass ein rechtwinkliges Dreieck, in dem einer der spitzen Winkel gleich $\frac{\pi}{8}$ ist, eine Winkelsumme von zwei Rechten besitzt; man kann aber gegen seinen Beweis dieselben Einwürfe machen wie gegen den von Legendre. In historischer Beziehung ist Lobatschefskijs Beweis deswegen merkwürdig, weil sich darin schon mehrere Sätze über Defekte finden. Zum Beispiel wird bei dem Beweise der Satz benutzt, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks, das in einem andern enthalten ist, aber mit diesem einen Winkel und eine Seite gemein hat, grösser als die Summe der Winkel des grösseren Dreiecks sein muss. Sätze dieser Art gehören schon dem Gebiete der nichteuklidischen Geometrie an.[1])

Zu S. 224, Z. 1 v. u. „Ueber die Konvergenz der unendlichen Reihen [Kasan 1841.]“[2])

Das von Lobatschefskij angegebene Verfahren, um über die Konvergenz unendlicher Reihen zu entscheiden, beruht auf den folgenden Betrachtungen:

Ist eine unendliche Reihe:

$$\sum_{i=\infty}^{i=\infty} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

gegeben, so kann man sich auf den Fall beschränken, dass alle $f(i) \leq 1$ sind, und kann dann die einzelnen Glieder in Ausdrücke von der Form:

---

1) [Im Ganzen hat also Lobatschefskij in den Jahren 1815—16 noch ungefähr auf demselben Standpunkte gestanden, wie Saccheri und Lambert. Diese Thatsache spricht nicht gerade für die Annahme, dass Gauss durch die Vermittelung von Bartels Lobatschefskij beeinflusst haben sollte.]

2) Vgl. hierzu und zu dem folgenden Zusatze die Note Wassiljefs in dem Bulletin of the New York mathematical society. Bd. III, 1894, S. 231—235.

$$\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2^2} + \cdots$$

verwandeln, wo jedes λ einen der beiden Werthe 0, 1 besitzt. Gelingt es nun, für jedes k eine Zahl μ_k so zu bestimmen, dass

$$f(\mu_k) \geqq 2^{-k}, \quad f(\mu_k + 1) < 2^{-k},$$

so können höchstens μ_k verschiedene Glieder den Bruch 2^{-k} in ihrer Entwickelung enthalten und in der Summe der Reihe kann 2^{-k} keinen Koefficienten haben, der grösser ist als μ_k. Demnach kann die Summe der Reihe den Werth:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \mu_k \, 2^{-k}$$

nicht übersteigen.

Die Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt in der Bestimmung der Zahl μ_k.

Es ist bemerkenswerth, dass Lobatschefskij sein Verfahren zur Bestimmung einer oberen Gränze für die gegebene Reihe auch auf die einfache Exponentialreihe

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{x^i}{i!}$$

anwendet, um die Funktionalgleichung:

$$f(x)\,f(y) = f(x+y)$$

zu beweisen. Wie es scheint, hat er das aus denselben Gründen gethan, die später die Mathematiker veranlasst haben, zwischen gleichmässiger und ungleichmässiger Konvergenz zu unterscheiden.

Zu S. 225, Z. 17 v. u. „Die Integrale müssen immer derart in Intervalle zerlegt werden u. s. w."

Diese Worte zeigen, dass Lobatschefskij seinen Zeitgenossen auch in der Frage über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung voraus war. Mit noch grösserer Schärfe hat er seine Ansichten in der Abhandlung: „Ueber das Verschwinden der trigonometrischen Reihen" ausgesprochen. Er giebt darin die Definition des Differentialquotienten in folgender Form:

„Es bezeichne $F(k)$ eine Funktion, die sich mit x ändert und von einem bestimmten Werthe von x bis zu $x = a$ zunimmt. Wir theilen $a - x$ in i gleiche Theile und bezeichnen $\frac{a-x}{i}$ mit h. Ferner seien die Werthe $F(x)$, $F(x+h)$, ..., $F(a)$ bekannt für jeden noch so kleinen Werth von h, das ja mit zunehmendem i unbeschränkt abnimmt. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

wird sich mit h verändern. Für $i' > i$ sei nun $\frac{a-x}{i'}$ gleich h'. Wenn dann die Differenz

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x+h')-F(x)}{h'} = \varepsilon,$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdruck:

$$\frac{h' F(x+h) - h F(x+h') + (h-h') F(x)}{hh'} = \varepsilon$$

für jeden Werth von x mit h abnimmt und beliebig klein gemacht werden kann, so soll die Funktion eine ununterbrochene Funktion heissen. Der Quotient

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

hat in diesem Falle eine Gränze und diese Gränze ist

$$\frac{dF}{dx}.\text{"}$$

NACHWORT DES ÜBERSETZERS.

Durch die vorstehende Uebersetzung der Wassiljefschen Rede möchte ich dazu beitragen, dass Lobatschefskij auch in den Kreisen der deutschen Mathematiker etwas mehr als dem Namen nach bekannt werde. Die Rede ist wörtlich übersetzt, nur in der Anmerkung 2 auf S. 213 habe ich mir erlaubt, den Text des Verfassers etwas zu ändern und die Angaben über Lamberts Theorie der Parallellinien zu berichtigen.[1]) Ich bin wohl auch an andern Stellen nicht immer ganz derselben Ansicht, wie der Verfasser, aber ich habe es nicht für nöthig gehalten, etwaige Meinungsverschiedenheiten, die nur Kleinigkeiten betreffen, zum Ausdrucke zu bringen. Die wenigen Zusätze, die ich gemacht habe, sind in eckige Klammern ein-

1) Die Abhandlungen Saccheris und Lamberts findet man in dem von Stäckel und mir bearbeiteten Buche: „Die Parallelentheorie von Euklid bis Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, Leipzig 1895 bei Teubner." Dort sind auch ausführliche geschichtliche Mittheilungen über die Parallelentheorie überhaupt gemacht. Insbesondere sind zwei bisher unbekannte Aeusserungen von Gauss über die Parallelentheorie mitgetheilt, und ausserdem kommen Schweikart und Taurinus (vgl. S. 214, Anm.) hier zum ersten Male zu ihrem Rechte.

geschlossen. Ausserdem habe ich die Seitenzahlen des Originals beigefügt, was eigentlich bei jeder Uebersetzung geschehen sollte.

Ich habe die Wassiljefsche Rede nach dem Original übersetzt, obwohl bereits eine englische Uebersetzung von G. B. Halsted (Austin, Texas 1894) vorlag; es schien mir aber für einen Deutschen nicht passend, eine russische Schrift nach einer englischen Uebersetzung zu übertragen. Selbstverständlich habe ich aber die Halstedsche Uebersetzung überall verglichen und bekenne gern, dass sie mir an manchen Stellen gute Dienste geleistet hat.

Zu besonderem Danke verpflichtet bin ich meinem Leipziger Freunde und Kollegen Professor W. Wollner, der mir über verschiedene sprachliche und sachliche Fragen Klarheit verschafft hat.

Es scheint mir angemessen, die Mittheilungen, die in der Rede über das Leben Lobatschefskijs gemacht sind, in einigen Punkten zu vervollständigen, denn die Rede ist ja keine Lebensbeschreibung Lobatschefskijs, sondern eine Würdigung seiner Leistungen.

Nikoláj Iwánowitsch Lobatschéfskij ist am 22. Oktober (2. Nov.) 1793 im Gouvernement Nishnij-Nowgorod geboren. Sein Vater, ein Architekt, starb 1797 und hinterliess seine Frau mit zwei kleinen Söhnen in sehr bescheidenen Verhältnissen. Die Wittwe zog nach Kasan, und es gelang ihr, ihre Söhne auf dem dortigen Gymnasium auf Staatskosten unterzubringen. Die weitern Lebensumstände Lobatschefskijs sind in der Rede Wassiljefs mitgetheilt. Es ist nur noch zu bemerken, dass Lobatschefskij von 1816 bis 1846 als Professor thätig war und in dem letztgenannten Jahre zum Gehülfen des Kurators des Lehrbezirks Kasan ernannt wurde; ferner dass er gegen Ende seines Lebens das Augenlicht verlor, aber auch blind immer noch seine wissenschaftlichen Arbeiten fortsetzte. Sein letztes Werk „Pangéométrie“ diktirte er seinen Schülern. Er starb am 12. (24.) Februar 1856.

Die geometrischen Werke Lobatschefskijs sind von der Kaiserlichen Universität Kasan in zwei Bänden neu herausgegeben worden. Der erste (bereits vergriffene) Band: „Vollständige Sammlung der geometrischen Arbeiten N. J. Lobatschefskijs“ ist in Kasan 1883 erschienen und enthält die russisch geschriebenen Arbeiten. Es sind das folgende:

1) Ueber die Anfangsgründe der Geometrie. S. 1—70. (Kasaner Bote 1829.) Diese Abhandlung ist ein Auszug aus der auf S. 221 erwähnten, ungedruckten Arbeit vom Jahre 1826: „Exposition succincte de la géometrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles.“ Leider scheint das Manuscript der „Exposition succincte“ verloren zu sein.

2) Imaginäre Geometrie. S. 71—120. (Gelehrte Schriften der Kais. Universität Kasan 1835.)

3) Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. S. 121—218.

4) Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallelen. S. 219—486. (Gelehrte Schriften u. s. w. 1835—38.)

5) Pangeometrie. S. 487—550. (Gelehrte Schriften 1836.)

Der zweite Band (Kasan 1886) enthält die in deutscher und in französischer Sprache geschriebenen Arbeiten, sowie ein Bild Lobatschefskijs. Man findet darin Folgendes:

6) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. S. 553—578. (Berlin 1840. In der Finkeschen Buchhandlung.)

7) Géométrie imaginaire. S. 581—613. (Crellesches Journal Bd. 17, 1837.)

8) Pangéométrie, ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. S. 618—680. (Kasan 1855.)

Nr. 7 ist eine Bearbeitung, theilweise eine Uebersetzung von Nr. 2. Nr. 8 ist eine Uebersetzung von Nr. 5. Uebersetzungen von Nr. 4 giebt es meines Wissens leider bis jetzt nicht, sie wären aber höchst erwünscht.

Ich füge noch einige wenige Bemerkungen bei.

S. 209, Z. 15 v. o. Die Laplacesche Aeusserung bezog sich wohl nicht auf Bartels, sondern auf Pfaff.

S. 212, Z. 2, 1 v. u. Diese Schrift ist nicht von Legendre, sondern von Adolf Kircher, s. Stäckel u. Engel, Theorie der Parallellinien S. 304.

S. 218, Z. 4 v. o. Das von Stäckel aufgestellte Verzeichniss weist für die Jahre 1818—1827 nicht weniger als 67 Schriften und Abhandlungen über die Parallelentheorie nach (a. a. O., S. 305—310).

S. 219, Z. 9 v. u. Ueber Magnizkij vergleiche man: Alfred Rambaud, Histoire de la Russie. 3me éd. Paris 1884. — chap. XXXV, p. 624—625 und: (J. Eckardt) Aus der Petersburger Gesellschaft. 5. Aufl. Leipzig 1880. — X. Unsere Unterrichtsminister. S. 257.

S. 233, Z. 5 v. u. Hier hätte Baltzer erwähnt werden sollen, durch den Hoüel erst auf Lobatschefskij und Bolyai aufmerksam gemacht worden war (a. a. O., S. 239).

S. 235, Z. 9—5 v. u. Zöllner hat das doch wohl nur als eine Möglichkeit hingestellt.

Leipzig, im Juli 1895.

Friedrich Engel.



